

ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

К. ИТО * Г. МАККИН

и их ТРАЕКТОРИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

Band 125

**DIFFUSION PROCESSES
AND THEIR SAMPLE PATHS**

by

KIYOSI ITÔ

Kyôto University, Kyôto/Japan

and

HENRY P. McKEAN, Jr.

Massachusetts Institute of Technology
Cambridge/Mass.

SPRINGER-VERLAG

Berlin · Heidelberg · New York

1965

К. ИТО и Г. МАККИН

Диффузионные процессы и их траектории

Перевод с английского

А. Д. ВЕНТЦЕЛЯ

Под редакцией

Е. Б. ДЫНКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1968

Эта книга посвящена одному из важных разделов современной теории вероятностей — диффузионным процессам, которые находят широкое применение в различных областях физики и прикладной математики. Книга содержит большой фактический материал по теории диффузионных процессов и по смежным вопросам теории дифференциальных уравнений, впервые публикующийся в виде отдельной монографии. Помимо сведений, освещавшихся ранее в периодической литературе, приводятся оригинальные результаты авторов. В книгу включено большое число задач, многие с решением.

Книга будет интересна научным работникам в области теории вероятностей, математикам других специальностей и физикам. Она окажется полезной студентам старших курсов, аспирантам и преподавателям университетов, пединститутов и инженерно-физических вузов.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Ито и Маккина посвящена бурно развивающейся области математики, лежащей на границе между теорией вероятностей и теорией дифференциальных уравнений. Если в 30-е годы специалисты по теории вероятностей только использовали для своих целей методы анализа, то в 50-е и, особенно, в 60-е годы методы теории марковских процессов все более широко применяются при решении разнообразных аналитических задач (краевые и асимптотические задачи теории дифференциальных уравнений, теория потенциала и др.). На центральное место в теории марковских процессов выдвигаются так называемые диффузионные процессы, связанные с эллиптическими дифференциальными операторами второго порядка. Если стать на вероятностную точку зрения, то теория диффузионных процессов должна рассматриваться как глава общей теории марковских процессов с непрерывными траекториями. Авторы понимают термин «диффузия» в этом расширенном смысле. За последние 10—12 лет была построена достаточно совершенная общая теория одномерной диффузии. Изложению (и развитию) такой теории и посвящена основная часть книги Ито и Маккина (около 80% ее объема).

Авторы идут от частного к общему и изучают в первых двух главах простейшую диффузию — одномерное броуновское движение. В последующих главах показывается, что любая одномерная диффузия может быть построена из броуновского движения посредством преобразования фазового пространства, случайной замены времени и «убивания». Из многомерных диффузионных процессов сколько-нибудь подробно рассматривается только броуновское движение (в гл. 7).

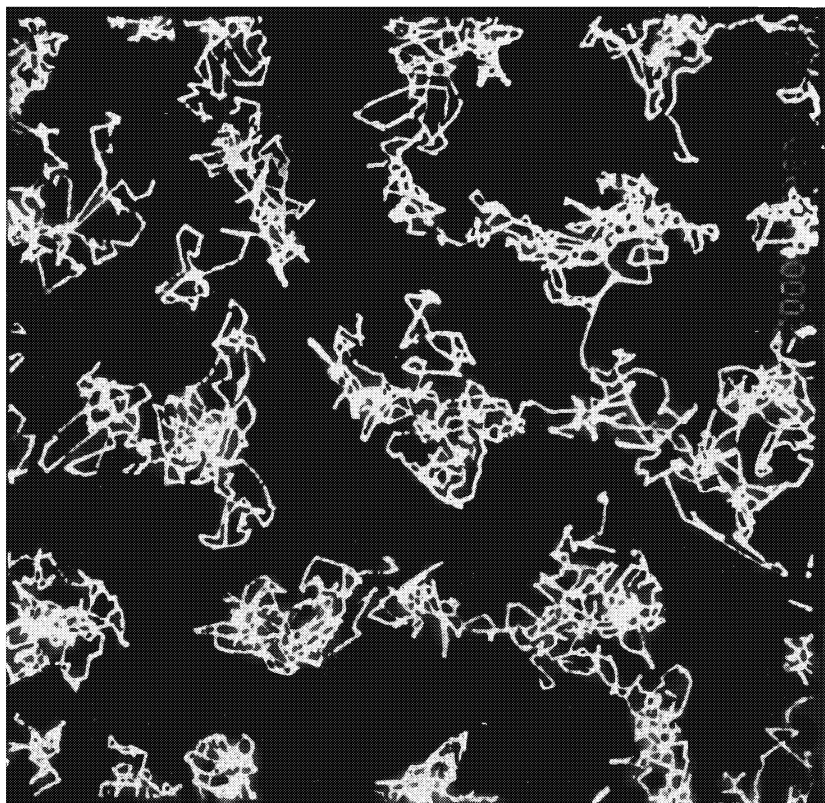
По своей теме книга Ито и Маккина близка к вышедшей в 1963 г. монографии Е. Б. Дынкина «Марковские процессы», которая также содержит полное описание одномерных диффузий (без сингулярных точек) и подробную теорию многомерного броуновского движения. Однако в книге Дынкина эти вопросы излагаются в заключительных главах как приложение более общих теорий, охватывающих и марковские процессы с разрывными траекториями, и поэтому

читателю добраться до этих результатов значительно труднее, чем в книге Ито и Маккина.

Сужение класса рассматриваемых процессов позволяет авторам изложить весьма богатый конкретный материал о таких процессах. Частично это делается в виде задач, к которым даются краткие указания на их решения. Книга требует от читателя очень активной работы, но зато она дает возможность действительного овладения излагаемыми методами.

При переводе книги исправлены очевидные недосмотры авторов. Иногда это делается непосредственно в тексте, а иногда в виде подстрочных примечаний.

Е. Б. ДЫНКИН



Смодулированные на вычислительной машине движения молекул, дающие представление о двумерном броуновском движении. [Из статьи Олдера Б. Дж., Уэйнрайта Т. Э. (Alder B. J., Wainwright T. E.), *Molecular motions*, *Scientific American*, 201, № 4 (1959), 113—126).]

*Посвящается П. Леви,
работа которого явилась для нас
источником вдохновения и предметом
восхищения*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Роберт Броун, английский ботаник, обнаружил (1828), что частицы пыли, взвешенные в воде, совершают непрерывное беспорядочное движение (см., например, Томпсон [1 : 73—77]).

Л. Башелье (1900) вывел закон, которому подчиняется положение отдельной частицы, совершающей одномерное броуновское движение, начинающееся в момент $t=0$ в точке $a \in R^1$:

$$P_a \{x(t) \in db\} = g(t, a, b) db, \quad (t, a, b) \in (0, +\infty) \times R^2, \quad (1)$$

где g — функция источника (функция Грина)

$$g(t, a, b) = \frac{e^{-(b-a)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \quad (2)$$

для задачи распространения тепла

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \quad (t > 0). \quad (3)$$

Башелье также указал на марковское свойство броуновской траектории, которое выражается в том, что

$$\begin{aligned} P_a \{a_1 \leq x(t_1) < b_1, a_2 \leq x(t_2) < b_2, \dots, a_n \leq x(t_n) < b_n\} = \\ = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} g(t_1, a, \xi_1) g(t_2 - t_1, \xi_1, \xi_2) \dots \\ \dots g(t_n - t_{n-1}, \xi_{n-1}, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n, \end{aligned} \quad (4)$$

и применил это свойство к нахождению распределения максимального смещения

$$P_0 \{\max_{s \leq t} x(s) \leq b\} = 2 \int_0^b \frac{e^{-a^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} da, \quad t > 0, b \geq 0. \quad (5)$$

(См. Башелье [1].)

А. Эйнштейн (1905) также вывел формулу (1) из статистико-механических соображений и применил найденный закон к определению диаметров молекул (см., например, А. Эйнштейн [1]).

Башелье не удалось получить ясной картины броуновского движения, и его идеи не были оценены в то время; и это не удивительно, потому что точное определение броуновского движения включает в себя меру на пространстве траекторий, а классический мемуар Э. Бореля [1] об испытаниях Бернулли был опубликован только в 1909 году. Но после того, как появились идеи Бореля, Лебега и Даниеля, стало возможным поставить броуновское движение на прочное математическое основание; это было выполнено в 1923 году Н. Винером [1].

Рассмотрим пространство всех *непрерывных* траекторий $\omega: t \in [0, +\infty) \rightarrow R^1$ с координатами $x(t) = \omega(t)$, и пусть B — наименьшая σ -алгебра подмножеств B этого пространства траекторий, включающая все простые события $B = \{\omega: a \leq x(t) < b\} (t \geq 0, a < b)$. Винер установил, что существуют неотрицательные меры $P_a(B)$ ($a \in R^1, B \in B$), для которых выполняется равенство (4); в частности, этот результат придает точный смысл утверждению Башелье о том, что *броуновская траектория непрерывна*.

П. Леви [2] нашел другую конструкцию броуновского движения и в своей монографии 1948 года [3] дал глубокое описание тонкой структуры индивидуальной броуновской траектории. Результаты Леви с некоторыми дополнениями, принадлежащими Д. Б. Рэю [4] и нам самим, будут изложены в гл. 1 и 2, причем особое внимание будет уделяться стандартному броуновскому *локальному времени* (mesure du voisinage П. Леви)

$$t(t, a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{\text{mes} \{s : a \leq x(s) < b, s \leq t\}}{2(b-a)}. \quad (6)$$

Пусть $\mathcal{G} = (c_2/2) D^2 + c_1 D$ ($c_2 > 0$) — оператор Штурма — Лиувилля на прямой. Функция источника (функция Грина) $p = p(t, a, b)$ задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{G}u \quad (t > 0), \quad (7)$$

так же, как и гауссово ядро (2), обладает следующими свойствами:

$$0 \leq p; \quad (8a)$$

$$\int_{R^1} p(t, a, b) db = 1; \quad (8b)$$

$$p(t, a, b) = \int_{R^1} p(t-s, a, c) p(s, c, b) dc, \quad t > s > 0. \quad (8c)$$

Вскоре после опубликования в 1930 году монографии Винера [3] началось изучение случайных движений, связанных с такими операторами (диффузий) и аналогичных броуновскому движению

($\mathfrak{G} = D^2/2$); здесь необходимо отдельно упомянуть имена В. Феллера и А. Н. Колмогорова. Позднее (1946) К. Ито доказал, что если

$$|c_1(b) - c_1(a)| + |\sqrt{c_2(b)} - \sqrt{c_2(a)}| < \text{const} \cdot |b - a|, \quad (9)$$

то движение, связанное с оператором $\mathfrak{G} = (c_2/2) D^2 + c_1 D$, совпадает по распределению с *непрерывным* решением уравнения

$$a(t) = a(0) + \int_0^t c_1(a) ds + \int_0^t \sqrt{c_2(a)} db, \quad (10)$$

где b — стандартное броуновское движение.

Ведущую роль в дальнейшем развитии теории сыграл В. Феллер.

Пусть имеется марковское движение с траекториями $w: t \rightarrow x(t)$ и вероятностями $P_a(B)$ на отрезке прямой Q ; тогда операторы

$$H_t: f \rightarrow \int P_a\{x(t) \in db\} f(b) \quad (11)$$

составляют *полугруппу*

$$H_t = H_{t-s} H_s \quad (t \geq s). \quad (12)$$

Как доказали Э. Хилле [1] и К. Иосида [1],

$$H_t = e^{t\mathfrak{G}} \quad (t > 0), \quad (13)$$

если понимать экспоненту в соответствующем смысле; здесь \mathfrak{G} — так называемый *производящий оператор*.

Д. Рэй [2] доказал, что если движение *строго марковское* (т. е. *начинается заново* в некоторые случайные (марковские) моменты, к которым относятся моменты $m_a = \min\{t: x(t) = a\}$ первого достижения, и т. п.), то оператор \mathfrak{G} является *локальным* тогда и только тогда, когда у движения *непрерывные* траектории; это подтвердило догадку В. Феллера. Из этого результата в сочетании со статьями Феллера [4, 5, 7, 9] вытекает, что производящий оператор строго марковского движения с непрерывными траекториями (диффузии) можно представить в виде *дифференциального оператора*

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{u^+(b) - u^+(a)}{m(a, b)}, \quad (14)$$

где m — неотрицательная мера, положительная на открытых интервалах, а $u^+(a) = \lim_{b \downarrow a} (b - a)^{-1} [u(b) - u(a)]$ с точностью до замены шкалы; это представление имеет место всюду, за исключением некоторых сингулярных точек, в которых \mathfrak{G} вырождается в оператор порядка не более 1.

Е. Б. Дынкин [1] также пришел к идее строго марковского процесса; он вывел изящную формулу для \mathfrak{G} и, применив ее, дал простое (вероятностное) доказательство феллеровского выражения для \mathfrak{G} .

В этой связи также следует упомянуть работы Р. Блюментала [1] и Дж. Ханта [1] и монографии Е. Б. Дынкина [6, 8].

Наш план заключается в следующем.

В гл. 1 и 2 рассматривается броуновское движение; затем, в гл. 3, вводится общая одномерная *диффузия* как строго марковское движение с непрерывными траекториями на отрезке прямой, возможно, с уничтожением массы. В гл. 4 подробно вычисляется \mathfrak{G} , причем используются вероятностные методы, аналогичные методам Е. Б. Дынкина [5]; в так называемом несингулярном случае \mathfrak{G} оказывается дифференциальным оператором

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{u^+(b) - u^+(a) - \int_{(a,b]} u dk}{m(a,b)}, \quad (15)$$

где u^+ и m имеют тот же смысл, что в формуле (14), а k — (неотрицательная) мера, управляющая уничтожением массы (в другой форме такие производящие операторы появляются у В. Феллера [9]).

Пусть даны оператор \mathfrak{G} вида (14) и стандартное броуновское движение с траекториями $w: t \rightarrow x(t)$. Обозначим через t *броуновское локальное время* П. Леви. Если f^{-1} — обратная функция для интеграла от локального времени

$$f(t) = \int t(t, \xi) m(d\xi), \quad (16)$$

то движение $x(f^{-1})$ совпадает по распределению с диффузией, соответствующей \mathfrak{G} , о чем догадывался Г. Троттер; это будет доказано в гл. 5. Такая же *замена времени* была получена В. Волконским [1] в менее явном виде.

Если \mathfrak{G} — оператор вида (15), то связанное с ним движение можно получить при помощи *убивания* траекторий, о которых говорилось выше, в некоторый (случайный) момент m_∞ с условным распределением

$$P\{m_\infty > t \mid x(f^{-1})\} = e^{-\int t(f^{-1}(t), \xi) h(d\xi)}, \quad (17)$$

это также будет доказано в гл. 5. В частном случае *броуновского движения с эластичным экраном* на $[0, +\infty)$ (производящий оператор $\mathfrak{G} = D^2/2$ с граничным условием $\gamma u(0) = (1-\gamma)u^+(0)$ ($0 < \gamma < 1$)) имеем

$$f = \int_0^{+\infty} t(t, \xi) 2 d\xi = \text{mes}\{s: x(s) \geq 0, s \leq t\};$$

процесс $x(f^{-1})$ совпадает по распределению с классическим *броуновским движением с отражением* $x^+ = |x|$, а формула (17) принимает

простой вид

$$P. \{m_\infty > t \mid x^+\} = e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma} t^{+(1,0)}} \quad (t^+ = 2t). \quad (18)$$

Это подтверждает гипотезу В. Феллера, состоящую в том, что броуновское движение с эластичным экраном должно получаться из броуновского движения с отражением при помощи убивания в тот момент, когда некоторый возрастающий функционал $e(\mathcal{Z}^+ \cap [0, t])$ от момента t и множества моментов пребывания $\mathcal{Z}^+ = \{t: x^+(t) = 0\}$ достигнет какого-то уровня.

В гл. 6 подробно изучается тонкая структура траекторий общей диффузии на прямой, причем особое внимание уделяется локальным временам. В гл. 7 рассматривается многомерное броуновское движение, а в гл. 8 читатель найдет беглый обзор общей многомерной диффузии.

В заключение мы хотели выразить нашу признательность всем тем, кто помогал нам в нашей работе.

Прежде всего мы благодарны В. Феллеру, идеи которого пронизывают всю книгу, и мы будем считать, что достигли успеха, если она ему понравится.

Мы должны также поблагодарить Р. Блюменталья и Дж. Ханта, которые предоставили в наше распоряжение свои неопубликованные результаты, касающиеся марковских моментов, и Г. Троттера, с которым мы имели много плодотворных бесед.

Эта книга была начата в Принстоне в Институте фундаментальных исследований (1954/56) при частичной поддержке Управления артиллерийских исследований; затем продолжена в Киото (1957/58) с помощью дотации фонда Фулбрайта; в 1960 году в Ганovere (Нью-Хэмпшир) и Кембридже (Массачусетс) при поддержке Управления военно-морских исследований и в Стэнфорде (Калифорния) при поддержке Национального научного фонда (1962/63); этим учреждениям и организациям мы также выражаем свою искреннюю благодарность. Наконец мы должны поблагодарить персонал издательства Шпрингер за кропотливый труд и интерес к этой, по-видимому, нелегкой работе.

Киото (Япония)
Кембридж (Массачусетс)
1964

К. ИТО
Г. П. МАККИН МЛ.

Нумерация: § 1.2 означает параграф 2 главы 1;
(1.2.3), задача 1.2.3, рис. 1.2.3 означают соответственно формулу, задачу, рисунок 3 параграфа 1.2;
(3), задача 3, рис. 3 означают соответственно формулу, задачу, рисунок 3 текущего параграфа.

Р. Броун [1:2] означает страницу 2 работы Р. Броун [1] из библиографии.

В конце каждого параграфа помещаются *задачи* с некоторыми указаниями по их решению; они часто содержат добавочную информацию, нужную в дальнейшем, и являются существенной частью изложения.

Рисунки не претендуют на фотографическую верность; например, броуновская траектория часто изображается так, как если бы она имела изолированные нули, что на самом деле не так.

Список *обозначений* помещен в конце книги.

Предупреждение: слово «положительный» означает > 0 , тогда как «неотрицательный» означает ≥ 0 ; то же для слов «отрицательный» (< 0) и «неположительный» (≤ 0). Символ $a \wedge b$ означает меньшее из чисел a и b , а $a \vee b$ — большее из этих двух чисел.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Предполагается, что читатель имеет примерно такую математическую подготовку, какая требуется, чтобы читать книги Куранта и Гильберта [1, 2]. Кроме этого, он должен владеть материалом бóльшей части книги В. Феллера по теории вероятностей [3], а также материалом, описанным ниже (полезный обзор и некоторые из доказательств см. в книге А. Н. Колмогорова [2]).

Алгебры. Класс A подмножеств пространства W называется *алгеброй*, если

$$W \in A \quad (1)$$

и для любых $A, B \in A$

$$A \setminus B, A \cup B, A \cap B \in A. \quad (2)$$

Алгебра A называется σ -*алгеброй*, если, кроме того, для любой последовательности $B_n \in A$ ($n \geq 1$)

$$\bigcup_{n \geq 1} B_n, \bigcap_{n \geq 1} B_n \in A. \quad (3)$$

σ -*алгебра, порожденная классом множеств.* Класс A подмножеств пространства W содержится в некоторой наименьшей σ -*алгебре* B , которую называют σ -*алгеброй, порожденной* A .

Вероятностные меры. Рассмотрим неотрицательную функцию множества $P(C)$, определенную на алгебре A . Функция P называется *конечно-аддитивной вероятностной мерой*, если

$$P(W) = 1 \quad (1)$$

и

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A, B \in A, A \cap B = \emptyset. \quad (2)$$

Функция называется *вероятностной мерой*, если, кроме того,

$$P(B_n) \downarrow 0 \quad (n \uparrow + \infty), \quad B_n \downarrow \emptyset, \quad B_n \in A \quad (n \geq 1), \quad (3a)$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) &= \sum_{n \geq 1} P(B_n), \quad B_n \cap B_m = \emptyset \quad (n < m), \\ B_n &\in \mathbf{A} \quad (n \geq 1), \quad \bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3b)$$

Колмогоровское продолжение. Если дана вероятностная мера P на алгебре \mathbf{A} , то существует единственная вероятностная мера Q на σ -алгебре \mathbf{B} , порожденной алгеброй \mathbf{A} , совпадающая с P на \mathbf{A} , а именно $Q(B) = \inf \sum_{n \geq 1} P(A_n)$, где нижняя грань берется по всем таким покрытиям $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ множества $B \in \mathbf{B}$, что $A_n \in \mathbf{A} \quad (n \geq 1)$. Тройка (W, \mathbf{B}, Q) называется *вероятностным пространством*.

Измеримые функции. Пусть дано пространство W и σ -алгебра \mathbf{B} его подмножеств; функция $f: W \rightarrow [-\infty, +\infty]$ называется *измеримой относительно \mathbf{B}* (или *\mathbf{B} -измеримой*), если $f^{-1}[a, b] \in \mathbf{B}$ при любом выборе $a < b$.

Интегралы. Пусть дано вероятностное пространство (W, \mathbf{B}, Q) . *Интеграл*, или *математическое ожидание*, неотрицательной \mathbf{B} -измеримой функции f определяется как

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_W f dQ = \\ &= \begin{cases} \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{l \geq 1} l \cdot 2^{-n} Q[f^{-1}[(l-1) \cdot 2^{-n}, l \cdot 2^{-n})], & Q[f^{-1}(+\infty)] = 0; \\ +\infty, & Q[f^{-1}(+\infty)] > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Математическое ожидание E в применении к таким неотрицательным функциям удовлетворяет следующим условиям:

$$E(f) \geq 0; \quad (1)$$

$$E(1) = 1; \quad (2)$$

$$E(f_1 + f_2) = E(f_1) + E(f_2); \quad (3)$$

$$E(f_n) \uparrow E(f), \quad f_n \uparrow f; \quad (4a)$$

$$E(f_n) \downarrow E(f), \quad f_n \downarrow f, \quad E(f_1) < +\infty; \quad (4b)$$

$$E(\lim f_n) \leq \lim E(f_n). \quad (5)$$

Интеграл $\int_B f dQ$ будем сокращенно обозначать $E(f, B) = E(B, f)$.

Произведения. Пусть (W_1, \mathbf{B}_1, Q_1) и (W_2, \mathbf{B}_2, Q_2) — вероятностные пространства. Класс \mathbf{A} конечных сумм непересекающихся прямо-

угольников $B_1 \times B_2$ ($B_1 \in \mathbf{B}_1$, $B_2 \in \mathbf{B}_2$) является алгеброй, и функция

$$Q(B_1 \times B_2) \equiv Q_1(B_1) \times Q_2(B_2)$$

может быть продолжена до вероятностной меры на \mathbf{A} . Произведение $Q_1 \times Q_2$ есть колмогоровское продолжение этой функции Q на σ -алгебру $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, порожденную алгеброй \mathbf{A} .

Теорема Фубини. Пусть имеется $(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2)$ -измеримая функция $f: W_1 \times W_2 \rightarrow [0, +\infty)$; тогда

$$\int_{W_1 \times W_2} f d(Q_1 \times Q_2) = \int_{W_1} dQ_1 \int_{W_2} f dQ_2 = \int_{W_2} dQ_2 \int_{W_1} f dQ_1.$$

Бесконечные произведения. Если даны вероятностные пространства (W_n, \mathbf{B}_n, Q_n) ($n \geq 1$), то $\mathbf{A}_n: A = B \times W_{n+1} \times W_{n+2} \times \dots$ (где $B \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \times \dots \times \mathbf{B}_n$) есть σ -алгебра, а

$$Q(A) = (Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n)(B)$$

является вероятностной мерой на алгебре $\mathbf{A} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbf{A}_n$. Бесконечное произведение $\times_{n \geq 1} Q_n$ определяется как колмогоровское продолжение функции Q на σ -алгебру $\times_{n \geq 1} \mathbf{B}_n$, порожденную алгеброй \mathbf{A} .

Независимость. Пусть дано вероятностное пространство (W, \mathbf{B}, P) ; σ -алгебры $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \subseteq \mathbf{B}$ называются независимыми, если

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2), \quad B_1 \in \mathbf{B}_1, \quad B_2 \in \mathbf{B}_2;$$

σ -алгебры \mathbf{B}_n ($n \geq 1$) независимы, если для любого $n \geq 1$ σ -алгебра \mathbf{B}_n независима от σ -алгебры, порожденной алгеброй $\bigcup_{l \neq n} \mathbf{B}_l$; множества $B_n \in \mathbf{B}$ ($n \geq 1$) независимы, если независимы алгебры $\mathbf{B}_n = \{\emptyset, B_n, W \setminus B_n, W\}$ ($n \geq 1$); \mathbf{B} -измеримые функции f_n ($n \geq 1$) независимы, если независимы σ -алгебры \mathbf{F}_n , порожденные прообразами $f_n^{-1}[a, b)$ ($a < b$); \mathbf{B} -измеримая функция f независима от σ -алгебры $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, если σ -алгебра, порожденная прообразами f^{-1} , независима от \mathbf{A} , и т. д. Если f_1 независима от f_2 , то $E(f_1 f_2) = E(f_1)E(f_2)$.

Колмогоровский закон 0—1. Если \mathbf{A}_n ($n \geq 1$) — независимые подалгебры \mathbf{B} , если \mathbf{B}_n есть σ -алгебра, порожденная алгеброй $\bigcup_{l \geq n} \mathbf{A}_l$, и если $B \in \bigcap_{n \geq 1} \mathbf{B}_n$, то $P(B) = 0$ или 1.

Усиленный закон больших чисел. Если даны независимые неотрицательные \mathbf{B} -измеримые функции f_n ($n \geq 1$) с одним и тем же

распределением, то

$$P\left\{\lim_{n \uparrow +\infty} n^{-1} \sum_{k \leq n} f_k = E(f_1)\right\} = 1.$$

Леммы Бореля — Кантелли. Пусть даны события $B_n \in \mathbf{B}$ ($n \geq 1$); если $\sum_{l \geq 1} P(B_l) < +\infty$, то $P\left[\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{l \geq n} B_l\right] = 0$; если $\sum_{l \geq 1} P(B_l) = +\infty$ и события независимы, то $P\left[\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{l \geq n} B_l\right] = 1$.

Условные математические ожидания. Если даны под- σ -алгебра \mathbf{A} σ -алгебры \mathbf{B} и неотрицательная \mathbf{B} -измеримая функция f , то *условное математическое ожидание* $E(f|\mathbf{A})$ функции f относительно \mathbf{A} определяется как класс таких \mathbf{A} -измеримых функций g , что $E(g, A) = E(f, A)$ ($A \in \mathbf{A}$); две такие функции g отличаются только на множестве меры нуль, принадлежащем \mathbf{A} . Функция $E(f|\mathbf{A})$ есть производная Радона — Никодима от функции множества $Q(A) = E(f, A)$ относительно сужения P на \mathbf{A} . Условное математическое ожидание $E(f|\mathbf{A})$ (в применении к неотрицательным f) удовлетворяет следующим условиям:

$$E(f|\mathbf{A}) \geq 0, \quad (1)$$

$$E(1|\mathbf{A}) = 1, \quad (2)$$

$$E(f_1 + f_2|\mathbf{A}) = E(f_1|\mathbf{A}) + E(f_2|\mathbf{A}), \quad (3)$$

$$E(f_n|\mathbf{A}) \uparrow E(f|\mathbf{A}), \quad f_n \uparrow f, \quad (4)$$

$$E(E(f|\mathbf{A}_2)|\mathbf{A}_1) = E(f|\mathbf{A}_1), \quad \mathbf{A}_2 \supseteq \mathbf{A}_1, \quad (5)$$

$$E(E(f|\mathbf{A})) = E(f); \quad (6)$$

кроме того,

$$E(f|\mathbf{A}) = E(f), \quad (7)$$

если f и \mathbf{A} независимы, и

$$E(e f|\mathbf{A}) = e E(f|\mathbf{A}), \quad (8)$$

если функция e измерима относительно \mathbf{A} . Здесь всюду $E(f|\mathbf{A}) = (\geq) f_1$ понимается как сокращенное обозначение для утверждения, что для некоторого элемента f_2 из класса $E(f|\mathbf{A})$ выполнено $f_2 = (\geq) f_1$.

Условные вероятности. Пусть дано множество $B \in \mathbf{B}$; условное математическое ожидание $E(e|\mathbf{A})$ его характеристической функции e есть так называемая *условная вероятность* $P(B|\mathbf{A})$ множества B относительно \mathbf{A} ; правила обращения с ней ясны из предыдущего пункта.

Гауссовские распределения. Класс измеримых функций f называется *гауссовским* и *центрированным*, если при любом выборе

$x = (f_1, \dots, f_d)$ и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in R^d$ скалярное произведение $\gamma \cdot x$ имеет гауссовское распределение со средним $E(\gamma \cdot x) = 0$; т. е.

$$P\{a \leq \gamma \cdot x < b\} = \int_a^b \frac{e^{-c^2/2Q}}{\sqrt{2\pi Q}} dc, \quad (1)$$

где Q —квадратичная форма $Q(\gamma) = E[(\gamma \cdot x)^2] = \sum_{ij} E(f_i f_j) \gamma_i \gamma_j$, причем если $Q = 0$, то интеграл интерпретируется как единичная масса в точке $c = 0$. Предположим, что детерминант $|Q|$ отличен от нуля; тогда можно обратить преобразование Фурье $E(e^{i\gamma \cdot x}) (= e^{-Q/2})$ и получить плотность распределения x :

$$p(x) = (2\pi)^{-d} \int_{R^d} e^{-i\gamma \cdot x} e^{-Q/2} d\gamma = \frac{e^{-Q^{-1}(x)/2}}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{|Q|}}, \quad (2)$$

где Q^{-1} —обратная квадратичная форма. Относительно нормы $\|f\|_2 = \sqrt{E(f^2)}$ функции f образуют гильбертово пространство; в этой геометрической интерпретации статистическая независимость означает перпендикулярность.

СТАНДАРТНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

1.1. Стандартное случайное блуждание

Рассмотрим человека, блуждающего по целым числам в соответствии со следующим правилом: он начинает в момент $n=0$ в точке $s(0)=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и бросает правильную монету. Если выпадает герб, он шагает в момент $n=1$ в точку $s(1)=s(0)-1$; если выпадает решетка, то в $s(1)=s(0)+1$. Придя таким образом в момент $n-1$ в точку $s(n-1)$, он бросает монету и если выпадает герб, то шагает в момент n в точку $s(n)=s(n-1)-1$, а если решетка, то в $s(n)=s(n-1)+1$; и т. д.

Нам понадобятся несколько определений.

W — пространство траекторий

$$w: n=0, 1, 2, \dots \rightarrow s_n = s(n) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (1)$$

если нужно выделить траекторию w , то вместо $s_n = s(n)$ употребляется обозначение $s_n(w) = s(n, w)$.

B — σ -алгебра, порожденная множествами

$$\{w: s(n)=l\}, \quad n \geq 0, \quad l=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

$P_l(B)$ — вероятность того, что траектория $s(n): n \geq 0$ лежит в множестве $B \in B$, как функция от начальной точки траектории $s(0)=l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; например,

$$P_l \{s(n)=k\} = \binom{n}{n_+} 2^{-n}, \quad (3)$$

где $n_+ = n/2 + (k-l)/2$,

$$\binom{n}{n_+} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-n_+)! n_+!}, & n_+ = 0, 1, \dots, n, \\ 0 & \text{для всех остальных } n_+. \end{cases}$$

$D = [W, B, P_l: l=0, \pm 1, \pm 2, \dots]$ — стандартное случайное блуждание.

Если дано $m \geq 0$, то

$$P \cdot \{s(m+1)=l | s(n): n \leq m\} = P_{s(m)} \{s(1)=l\}, \quad l=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4)$$

т. е. если $s(m)$ известно, то положение $s(m+1)$ в следующий момент не зависит от прошлого $s(n): n < m$; другими словами, **D** — марковский процесс.

На самом деле **D** является даже строго марковским процессом, как будет сейчас объяснено.

Определим $B_m = B\{s(n): n \leq m\}$ как наименьшую под- σ -алгебру **B**, включающую все события $\{a \leq s(n) < b\} (n \leq m, a < b)$. Пусть $m = m(\omega) = 0, 1, 2, \dots, +\infty$ — марковский момент, т. е.

$$\{m \leq m\} \in B_m \quad (m \geq 0). \quad (5)$$

Пусть B_m есть σ -алгебра таких событий $B \in B$, что $B \cap \{m \leq m\} \in B_m$ для любого $m \geq 0$. Пусть ω_m^+ — сдвинутая траектория $s_n(\omega_m^+) = s_{n+m}(\omega)$. Алгебре B_m нужно представлять себе как наблюдение прошлого $s(n): n \leq m$; и утверждение состоит в том, что если $m < +\infty$, то при условии, что фиксировано настоящее $s(m)$, прошлое $s(n): n \leq m$ и будущее $s(n+m): n \geq 0$ независимы, причем будущее является стандартным случайным блужданием, начинающимся в $s(m)$:

$$P.\{\omega_m^+ \in B | B_m\} = P_{s(m)}(B), \quad m < +\infty, \quad B \in B, \quad (6a)$$

т. е.

$$P.\{A, \omega_m^+ \in B, m < +\infty\} = E.[A \cap \{m < +\infty\}, P_{s(m)}(B)], \\ A \in B_m, \quad B \in B. \quad (6b)$$

Другими словами, если $m < +\infty$, то блуждание начинается в момент $n = m$ так, как если бы до этого ничего не было.

Вот простое доказательство этого.

Если дано $m = 0, 1, 2, \dots$, то константа $m = m$ представляет собой марковский момент, $B_m = B_m = B\{s(n): n \leq m\}$, и (6a) совпадает с

$$P.\{\omega_m^+ \in B | s(n): n \leq m\} = P_{s(m)}(B), \quad B \in B, \quad (7)$$

что становится очевидным, если несколько раз применить формулу (4); это так называемое *простое* марковское свойство.

Рассмотрим общий марковский момент m и событие $A \in B_m$.

Характеристическая функция события A есть борелевская функция $e[s(1), s(2), \dots, s(m), s(m), s(m), \dots]$ от $s(n \wedge m)$ ($n \geq 0$), причем $e[s(1), \dots] = e[s(1), s(2), \dots, s(m), s(m), s(m), \dots]$ на множестве $\{m = m\}$; а так как $\{m = m\} \in B_m$, то $A \cap \{m = m\} \in B_m$. Поэтому для $B \in B$

$$P.\{A, \omega_m^+ \in B, m < +\infty\} = \\ = \sum_{m \geq 0} P.\{A \cap \{m = m\}, \omega_m^+ \in B\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m \geq 0} E. [A \cap \{m = m\}, P. \{\omega_m^+ \in B \mid B_m\}] = \\
&= \sum_{m \geq 0} E. [A \cap \{m = m\}, P_{s(m)}(B)] = \\
&= E. [A \cap \{m < +\infty\}, P_{s(m)}(B)],
\end{aligned} \tag{8}$$

что нам и было нужно.

Рассмотрим пространственный сдвиг $w \rightarrow w + l$:

$$s(n, w + l) = s(n, w) + l \quad (n \geq 0)$$

и отражение $w \rightarrow -w$:

$$s(n, -w) = -s(n, w) \quad (n \geq 0).$$

Используя (3), легко доказать, что

$$P_0\{w + l \in B\} = P_l(B), \quad P_l\{-w \in B\} = P_{-l}(B), \quad B \in \mathcal{B}. \tag{9}$$

Задача 1. Рассмотреть функции Радемахера

$$\begin{aligned}
e_1(t) &= \begin{cases} -1 & (0 \leq t < \frac{1}{2}), \\ +1 & (\frac{1}{2} \leq t < 1); \end{cases} \\
e_{n+1}(t) &= e_1(2^{-n}t) \quad (0 \leq t < 1, n \geq 1),
\end{aligned}$$

где $(2^{-n}t)$ — дробная часть от $2^{-n}t$, и проверить, что относительно классической меры Лебега на $[0, 1]$

$$s(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ e_1 + e_2 + \dots + e_n, & n \geq 1, \end{cases}$$

является стандартным случайным блужданием, начинающимся в точке 0.

1.2. Моменты первого достижения для стандартного случайного блуждания

Особенно важными марковскими моментами являются *моменты первого достижения*

$$m_k = \min \{n: s_n = k\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1}$$

Используя строго марковское свойство стандартного случайного блуждания, вычислим производящие функции

$$E_l(\alpha^{m_k}) = \sum_m \alpha^m P_l\{m_k = m\}, \tag{2}$$

$$l, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Так как $m_k(w+l) = m_{k-l}(w)$ и $m_k(-w) = m_{-k}(w)$, то из (1.1.9) ясно, что

$$\begin{aligned} E_l[\alpha^{m_k(w)}] &= E_0[\alpha^{m_k(w+l)}] = E_0[\alpha^{m_{k-l}(w)}], \\ E_0[\alpha^{m_{-k}(w)}] &= E_0[\alpha^{m_k(-w)}] = E_0[\alpha^{m_k(w)}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Ясно также, что для $k > 0$ имеем $m_k = m + m_k(w_m^+)$, где $m = m_1^1$; используя строго марковское свойство, получаем

$$\begin{aligned} E_0(\alpha^{m_k}) &= E_0[\alpha^{m_1+m_k(w_m^+)}] = \\ &= E_0[\alpha^{m_1} E_0(\alpha^{m_k(w_m^+)} | B_{m_1})] = \\ &= E_0(\alpha^{m_1}) E_1(\alpha^{m_k}) = \\ &= E_0(\alpha^{m_1}) E_0(\alpha^{m_{k-1}}) = \\ &= [E_0(\alpha^{m_1})]^k. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, $m_k = 1 + m_k(w_1^+)$, и, таким образом,

$$\begin{aligned} E_0(\alpha^{m_k}) &= E_0[\alpha^{1+m_k(w_1^+)}] = \\ &= \alpha E_0[E_0(\alpha^{m_k(w_1^+)} | B_1)] = \\ &= \alpha E_0(E_{s_1}(\alpha^{m_k})) = \\ &= \frac{\alpha}{2} E_{-1}(\alpha^{m_k}) + \frac{\alpha}{2} E_{+1}(\alpha^{m_k}) = \\ &= \frac{\alpha}{2} E_0(\alpha^{m_{k+1}}) + \frac{\alpha}{2} E_0(\alpha^{m_{k-1}}). \end{aligned} \quad (5)$$

Полагая $k = 2$ в (5) и используя (4), получаем

$$\gamma^2 - 2\alpha^{-1}\gamma + 1 = 0, \quad \gamma = E_0(\alpha^{m_1}), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) дает

$$\gamma = E_0(\alpha^{m_1}) = \alpha^{-1}(1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}), \quad (7)$$

где знак $+$ исключается из-за того, что $E_0(\alpha^{m_1}) < 1$. Разлагая (7) в ряд Маклорена, имеем

$$E_0(\alpha^{m_1}) = \sum_{n \geq 1} \alpha^{2n-1} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2^{-2n+1}, \quad (8)$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} P_0\{m_1 = 2n\} &= 0, \\ P_0\{m_1 = 2n-1\} &= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2^{-2n+1}, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

¹⁾ Для тех w , для которых $s_0 \leq 0$. — Прим. перев.

Используя (3) и (4), получаем, что

$$E_l(\alpha^{m_k}) = \gamma^{|l-k|}. \quad (10)$$

Так как $\gamma \uparrow 1$ при $\alpha \uparrow 1$, то

$$P_l\{m_k < +\infty\} \equiv 1. \quad (11)$$

Отсюда, учитывая тот факт, что блуждание s_n : $n \geq 0$ начинается заново в момент первого достижения, легко видеть, что *блуждание посещает точки $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ каждую бесконечное число раз.*

Задача 1 (по Чжун Кай-лаю и В. Феллеру [1]). Рассмотрим число t_{2n} таких целых чисел $k=1, 2, \dots, 2n$, что большее из s_{k-1} и s_k положительно. Доказать, что

$$\sum_{n \geq 0} \beta^{2n} E_0\{\alpha'^{2n}, s_{2n}=0\} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2\beta^2} + \sqrt{1-\beta^2}}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1,$$

и вывести отсюда так называемый закон арксинуса:

$$P_0\{t_{2n}=2k | s_{2n}=0\} = (n+1)^{-1}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n, n \geq 1.$$

[Пусть дано $0 < \alpha < 1$. Если $e_{2n} = E_0\{\alpha'^{2n}, s_{2n}=0\}$, а m — наименьшее целое $n=2, 4, \dots$, такое, что $s_n=0$, то для $n \geq 1$

$$\begin{aligned} e_{2n} &= \sum_{k \leq n} E_0\{\alpha'^{2n}, m=2k, s_{2n}=0\} = \\ &= \sum_{k \leq n} E_0\{\alpha'^{2k}, m=2k\} E_0\{\alpha'^{2n-2k}, s_{2n-2k}=0\} = \\ &= \sum_{k \leq n} \frac{1}{2} (1 + \alpha^{2k}) P_0\{m=2k\} e_{2n-2k}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $0 < \beta < 1$, то

$$f = \sum_{n \geq 0} \beta^{2n} e_{2n} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} (1 + \alpha^{2n}) \cdot \beta^{2n} P_0\{m=2n\} f,$$

и, используя формулу

$$\sum_{n \geq 1} \alpha^{2n} P_0\{m=2n\} = 1 - \sqrt{1-\alpha^2},$$

получаем, что

$$f = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2\beta^2} + \sqrt{1-\beta^2}} = 2\beta^{-2} (1-\alpha^2)^{-1} (\sqrt{1-\alpha^2\beta^2} - \sqrt{1-\beta^2}).$$

Коэффициент при $\alpha^{2k}\beta^{2n}$ в f есть $P_0\{t_{2n}=2k, s_{2n}=0\}$; таким образом, при $k \leq n$ вероятность $P_0\{t_{2n}=2k, s_{2n}=0\}$ есть коэффициент при $\alpha^{2k}\beta^{2n+2}$ в разложении $-2\sqrt{1-\beta^2}/(1-\alpha^2)$ (поскольку разложение $2\sqrt{1-\alpha^2\beta^2}/(1-\alpha^2)$ состоит только из членов с $\alpha^{2k}\beta^{2n}$, $k \geq n$. — *Перев.*); а так как этот коэффициент не зависит от k , то доказательство закончено.]

Задача 2. Рассматривая последовательные моменты достижения

$$\begin{aligned} m^1 &= \min\{n: s_n = k\}; \\ m^2 &= \min\{n: n > m^1, s_n = k\}; \\ m^3 &= \min\{n: n > m^2, s_n = k\}; \\ &\dots \end{aligned}$$

и используя формулу (10), найти выражение для производящей функции $\sum_n \alpha^{n+1} P_l\{s_n = k\}$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq 0} \alpha^{n+1} P_l\{s_n = k\} \right| &= \sum_{n \geq 0} \alpha^{n+1} \sum_{m \geq 1} P_l\{m^m = n\} = \alpha \sum_{m \geq 1} E_l(\alpha^{m^m}) = \\ &= \alpha \sum_{m \geq 1} E_l(\alpha^{m^k}) [E_0(\alpha^m)]^{m-1} = \alpha \gamma^{l-k} [1 - E_0(\alpha^m)]^{-1}, \end{aligned}$$

где m — то же, что в решении задачи 1. Теперь примените цепочку равенств

$$\alpha^{-1} [1 - E_0(\alpha^m)] = \alpha^{-1} (1 - \alpha\gamma) = \alpha^{-1} \sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{1}{2} (\gamma^{-1} - \gamma).]$$

1.3. Хинчиновское доказательство предельной теоремы Муавра — Лапласа

Наша следующая тема — остроумное доказательство предельной теоремы Муавра — Лапласа

$$\lim_{n \uparrow +\infty} P_0 \left\{ a \leq \frac{s(n)}{\sqrt{n}} < b \right\} = \int_a^b \frac{e^{-c^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dc, \quad (1)$$

принадлежащее А. Я. Хинчину [1: 11—15] (см. другие доказательства у В. Феллера [3: 184—189], Г. Троттера [2] и в задаче 2 ниже; большую и лучшую предельную теорему см. в § 1.10).

Положим по определению¹⁾

$$u_n(t, a) = E_{[\sqrt{na}]}\{f(n^{-1/2}s_{[nt]})\}, \quad t \geq 0, \quad a \in R^1, \quad (2)$$

¹⁾ $[nt]$, $[\sqrt{na}]$, $[\sqrt{n}b]$ означают целые части; с другими выражениями скобки $[\]$ имеют свое обычное значение.

для $f \in C(R^1)$ и $n \geq 1$. Так как $u_n(t, a) = u_n(m/n, l/\sqrt{n})$ для $m = [nt]$ и $l = [\sqrt{n}a]$, то

$$\begin{aligned} u_n\left(t + \frac{1}{n}, a\right) &= E_l[f(n^{-1/2}s_{m+1})] = E_l[E_{s_1}[f(n^{-1/2}s_m)]] = \\ &= \frac{1}{2}u_n\left(t, \frac{l-1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}u_n\left(t, \frac{l+1}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}u_n\left(t, a - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}u_n\left(t, a + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (3) \end{aligned}$$

и, вычитая $u_n(t, a)$ из левой и правой частей равенств (3), находим, что

$$\begin{aligned} n \times \left[u_n\left(t + \frac{1}{n}, a\right) - u_n(t, a) \right] &= \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{n})^2 \times \left[u_n\left(t, a + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 2u_n(t, a) + u_n\left(t, a - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]; \quad (4a) \end{aligned}$$

$$u_n(0, b) = f\left(\frac{[\sqrt{n}b]}{\sqrt{n}}\right). \quad (4b)$$

Идея Хинчина состоит в том, чтобы сравнить u_n с решением

$$u = u(t, a) = \int_{R^1} \frac{e^{-(b-a)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} f(b) db \quad (5)$$

непрерывного аналога задачи (4)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2}; \quad (6a)$$

$$u(+0, \cdot) = f, \quad (6b)$$

и вывести из этого, что

$$\lim_{n \uparrow +\infty} u_n = u. \quad (7)$$

Рассмотрим вслед за Хинчиным функцию $u^* = u + n^{-1/3}t$. Заметим, что если $f \in C^4(R^1)$, то имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^3 u^*}{\partial a^3} \right| = \left| \frac{\partial^3 u}{\partial a^3} \right| = \left| \int \frac{e^{-(b-a)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{d^3 f}{db^3} db \right| \leq c_1 < +\infty; \quad (8a)$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial a^4} = \frac{1}{4} \int \frac{e^{-(b-a)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{d^4 f}{db^4} db \geq -c_2 > -\infty. \quad (8b)$$

Выбрав $n > (c_1 + c_2)^6$, проверим, что для $m \geq 1$ справедливы неравенства

$$Q_m: u_n\left(\frac{m}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}}\right) \leq u^*\left(\frac{m}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}}\right).$$

Q_0 выполнено автоматически; предполагая, что выполнено Q_m , и используя (4а), (6а) и (8), находим:

$$\begin{aligned}
 u_n \left(\frac{m+1}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{1}{2} u_n \left(\frac{m}{n}, \frac{l-1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{2} u_n \left(\frac{m}{n}, \frac{l+1}{\sqrt{n}} \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} u^* \left(\frac{m}{n}, \frac{l-1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{2} u^* \left(\frac{m}{n}, \frac{l+1}{\sqrt{n}} \right) \leq \\
 &\leq u^* \left(\frac{m}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{2n} \frac{\partial^2 u^*}{\partial a^2} \left(\frac{m}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}} \right) + n^{-3/2} c_1 = \\
 &= u^* \left(\frac{m}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{n} \frac{\partial u^*}{\partial t} \left(\frac{m}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}} \right) - n^{-4/3} + n^{-3/2} c_1 \leq \\
 &\leq u^* \left(\frac{m+1}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{2} n^{-2} c_2 - n^{-4/3} + n^{-3/2} c_1 < \\
 &< u^* \left(\frac{m+1}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}} \right) + n^{-3/2} [c_1 + c_2 - n^{1/6}] < u^* \left(\frac{m+1}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}} \right). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Другими словами, из Q_m вытекает Q_{m+1} , что завершает доказательство по индукции.

Далее,

$$u_n(t, a) \leq u^* \left(\frac{m}{n}, \frac{l}{\sqrt{n}} \right), \quad m = [nt], \quad l = [\sqrt{n}a], \quad (10)$$

и, полагая $n \uparrow +\infty$, получаем

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \overline{u_n} \leq u. \quad (11)$$

Доказательство неравенства $\lim_{n \uparrow +\infty} u_n \geq u$ оставляем читателю, так же как и вывод формулы (1) из того, что равенство (7) выполнено для $f \in C^4(R^1)$.

На основании соотношения (1) естественно предположить, что $n^{-1/2} s[nt] (t \geq 0)$ приближается к некоторому случайному (броуновскому) движению, для которого роль формулы (4а) играет уравнение (6а). Параграфы 1.4 и 1.5 посвящены конструкции броуновского движения, а в § 1.10 изучается вопрос о сходимости случайного блуждания к этому движению.

Задача 1. Проверить, что

$$\lim_{n \uparrow +\infty} P_0 \{ \max_{\theta \leq t} n^{-1/2} s_{[n\theta]} \geq a \} = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi\theta^3}} e^{-a^2/2\theta} d\theta, \quad t, a > 0$$

(см. другое доказательство в задаче 1.10.1).

[Так как $\min\{\theta: n^{-1/2}S_{[n\theta]} \geq a\} = n^{-1}m_{[\sqrt{na}] + 1}$, то очевидно, что

$$P_0\{\max_{0 \leq t} n^{-1/2}S_{[n\theta]} \geq a\} = P_0\{n^{-1}m_{[\sqrt{na}] + 1} \leq t\};$$

далее, из (1.2.7) получите

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_0\{n^{-1}m_{[\sqrt{na}] + 1} \in dt\} &= E_0(e^{-\alpha n^{-1}m_{[\sqrt{na}] + 1}}) = \\ &= (e^{\alpha/n} - \sqrt{e^{2\alpha/n} - 1})^{[\sqrt{na}] + 1} \rightarrow e^{-\sqrt{2a}\alpha} \text{ при } n \uparrow +\infty, \end{aligned}$$

после чего используйте формулу

$$e^{-\sqrt{2a}\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/2t} dt$$

(см. А. Эрдейи [1 (1): 245]).]

Задача 2. Доказать предельную теорему Муавра — Лапласа, используя приближенную формулу Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} e^{-n+\theta/12n}, \quad 0 < \theta = \theta(n) < 1, \quad n > 1.$$

[Сначала оцените сверху и снизу $P_0\{a \leq s(n)/\sqrt{n} < b\}$ для $0 < a < b < +\infty$, а затем оцените «хвост» $P_0\{s(n)/\sqrt{n} > b\}$, используя неравенство Чебышева.]

1.4. Стандартное броуновское движение

Рассмотрим пространство W непрерывных функций $w: t \rightarrow x_t = x(t)$ из $[0, +\infty)$ в $R^{1,1}$ и введем класс C подмножеств

$$C = x_t^{-1}(B) = x_{t_1 t_2 \dots t_n}^{-1}(B), \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (1)$$

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n, \quad B \in \mathcal{B}(R^n)^2, \quad n \geq 1,$$

пространства W , где x_t^{-1} — прообраз при отображении

$$x_t: w \rightarrow (x_{t_1}(w), x_{t_2}(w), \dots, x_{t_n}(w)) \in R^n. \quad (2)$$

Класс C является алгеброй; действительно,

$$W = x_t^{-1}(R^n), \quad (3)$$

$$W \setminus x_t^{-1}(B) = x_t^{-1}(R^n \setminus B) \quad (4)$$

¹⁾ Если нужно выделить траекторию w , то вместо $x_t = x(t)$ употребляется обозначение $x_t(w) = x(t, w)$.

²⁾ $\mathcal{B}(R^n)$ есть σ -алгебра борелевских подмножеств пространства R^n .

и

$$x_t^{-1}(B_1) \cup x_t^{-1}(B_2) = x_t^{-1}(B_1 \cup B_2), \quad (5)$$

т. е. $x_t^{-1}\mathbf{B}(R^n)$ — алгебра. Чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что любые две такие алгебры $x_t^{-1}\mathbf{B}(R^n)$ содержатся в некоторой третьей.

Рассмотрим далее гауссово ядро

$$g(t, a, b) = \frac{e^{-(b-a)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}, \quad t > 0, \quad a, b \in R^1, \quad (6)$$

и функции множества

$$P_1(C) = \int_B \dots \int g(t_1, 0, b_1) db_1 g(t_2 - t_1, b_1, b_2) db_2 \dots \\ \dots g(t_n - t_{n-1}, b_{n-1}, b_n) db_n, \quad (7)$$

$$C = x_t^{-1}(B), \quad B \in \mathbf{B}(R^n), \quad n \geq 1.$$

Функция P_t представляет собой конечно-аддитивную вероятностную меру на $x_t^{-1}\mathbf{B}(R^n)$; в самом деле, так как из $x_t^{-1}(B_1) = x_t^{-1}(B_2)$ вытекает $B_1 = B_2$, то определение P_t корректно; и поскольку из $x_t^{-1}(B_1) \cap x_t^{-1}(B_2) = \emptyset$ вытекает $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, из (5) и (1) ясно, что P_t аддитивна. Наконец, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t, a, b) db = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-b^2/2}}{\sqrt{2\pi}} db = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} da \int_0^{+\infty} db e^{-a^2/2} e^{-b^2/2} \right)^{1/2} = \\ = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r dr \right)^{1/2} = 1, \quad (8)$$

то $P_t(W) = 1$, что завершает доказательство.

Мера P_t совпадает с $P_{\mathfrak{g}}$ на $x_{\mathfrak{g}}^{-1}\mathbf{B}(R^m)^1$, если $\mathfrak{g} \subset t$. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s, a, c) g(s, c, b) dc = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(a-c)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \frac{e^{-(c-b)^2/2s}}{\sqrt{2\pi s}} dc = \\ = \frac{e^{-(b-a)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} = g(t, a, b), \quad t > s > 0, \quad a, b \in R^1, \quad (9)$$

¹⁾ m — число точек в \mathfrak{g} .

и беря, например,

$$C = x_{t_1 t_2 t_3 t_4 \dots t_n}^{-1}(B_1) = x_{t_1 t_2 t_4 \dots t_n}^{-1}(B_2), \quad B_1 \in \mathbf{B}(R^n), \quad B_2 \in \mathbf{B}(R^{n-1}),$$

получаем

$$\begin{aligned} P_{t_1 t_2 t_3 t_4 \dots t_n}(C) &= \int_{(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n) \in B_1} g(t_1, 0, b_1) g(t_2 - t_1, b_1, b_2) \times \\ &\quad \times g(t_3 - t_2, b_2, b_3) g(t_4 - t_3, b_3, b_4) \dots \\ &\quad \dots g(t_n - t_{n-1}, b_{n-1}, b_n) db_1 db_2 db_3 db_4 \dots db_n = \\ &= \int_{(b_1, b_2, b_4, \dots, b_n) \in B_2} g(t_1, 0, b_1) db_1 g(t_2 - t_1, b_1, b_2) db_2 \times \\ &\quad \times \int_{b_3 \in R^1} g(t_3 - t_2, b_2, b_3) db_3 g(t_4 - t_3, b_3, b_4) db_4 \dots \\ &\quad \dots g(t_n - t_{n-1}, b_{n-1}, b_n) db_n = \int_{B_2} g(t_1, 0, b_1) db_1 g(t_2 - t_1, b_1, b_2) db_2 \times \\ &\quad \times g(t_4 - t_2, b_2, b_4) db_4 \dots g(t_n - t_{n-1}, b_{n-1}, b_n) db_n = \\ &= P_{t_1 t_2 t_4 \dots t_n}(C). \quad (10) \end{aligned}$$

Положим по определению $P(C) = P_t(C)$ для $C \in x_t^{-1}\mathbf{B}(R^n)$. Функция P является конечно-аддитивной вероятностной мерой на \mathbf{C} , и, как мы сейчас покажем, ее можно продолжить до вероятностной меры на σ -алгебре \mathbf{B} , порожденной алгеброй \mathbf{C} .

Для доказательства рассмотрим такие множества $C_n \in \mathbf{C}$, что $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$ и $P(C_n) \geq c_1 > 0$ ¹⁾; нужно доказать, что $\bigcap_{n \geq 1} C_n$

непусто.

Пусть

$$C_n = x_{t_n}^{-1}(B_n), \quad (11)$$

где $t_n = (t_1, t_2, \dots, t_n, 2^{-n}, 2 \cdot 2^{-n}, \dots, n \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-n})$; $B_n \in \mathbf{B}(R^m)$, m — число точек в t_n , $n \geq 1$. (Это предположение вполне законно.)

¹⁾ c_1, c_2 и т. д. — положительные постоянные.

Пользуясь оценкой ¹⁾

$$\begin{aligned}
 P \{ \max_{\substack{0 < s_2 - s_1 \leq 2^{-n} \\ s_1, s_2 \in t_n}} |x_{s_2} - x_{s_1}| > c_2 2^{-n/3} \} &\leq \\
 &\leq \sum_{\substack{0 < s_2 - s_1 \leq 2^{-n} \\ s_1, s_2 \in t_n}} P \{ |x_{s_2} - x_{s_1}| > c_2 2^{-n/3} \} = \\
 &= \sum_{\substack{0 < s_2 - s_1 \leq 2^{-n} \\ s_1, s_2 \in t_n}} 2 \int_{c_2 2^{-n/3}}^{+\infty} \frac{e^{-b^2/2(s_2-s_1)}}{\sqrt{2\pi(s_2-s_1)}} db \leq \frac{3n}{c_2} 2^{5n/6} e^{-c_2^2 2^{n/3-1}}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

выбираем $c_2 > 0$ столь большим, что

$$\sum_{n \geq 1} \frac{3n}{c_2} 2^{5n/6} e^{-c_2^2 2^{n/3-1}} \leq \frac{c_1}{3}. \quad (13)$$

Выберем также такие компакты $B_n'' \subset B_n' \subset B_n$, что

$$P(x_{t_n}^{-1}(B_n \setminus B_n')) < c_1 3^{-n} \quad (14)$$

и

$$x_{t_n}^{-1}(B_n') \cap \{w: \max_{\substack{0 < s_2 - s_1 \leq 2^{-n} \\ s_1, s_2 \in t_n}} |x_{s_2} - x_{s_1}| \leq c_2 2^{-n/3}\} = x_{t_n}^{-1}(B_n''), \quad (15)$$

и заметим, что

$$\begin{aligned}
 P(\bigcap_{m \leq n} x_{t_m}^{-1}(B_m'')) &\geq P(C_n) - \sum_{m \leq n} P(x_{t_m}^{-1}(B_m \setminus B_m')) - \\
 &- \sum_{m \leq n} P(x_{t_m}^{-1}(B_m' \setminus B_m'')) \geq c_1 - \frac{c_1}{2} - \frac{c_1}{3} = \frac{c_1}{6} > 0. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Поэтому множество $\bigcap_{m \leq n} x_{t_m}^{-1}(B_m'')$ ни при каком n не может быть пустым; и, так как B_n'' были взяты компактными, мы можем выбрать такую точку $(x(s) : s \in t) \in R^\infty$, $t = \bigcup_n t_n$, что

$$(x(s) : s \in t_n) \in B_n'', \quad n \geq 1. \quad (17)$$

Но тогда

$$|x(s_2) - x(s_1)| \leq c_2 2^{-n/3}, \quad 0 < s_2 - s_1 \leq 2^{-n}, \quad s_1, s_2 \in t_n, \quad n \geq 1, \quad (18)$$

$$1) \int_a^{+\infty} e^{-b^2/2t} db \leq \frac{t}{a} \int_a^{+\infty} e^{-b^2/2t} \frac{b}{t} db = \frac{t}{a} e^{-a^2/2t}; \quad \text{см. более тонкую}$$

оценку в задаче 1.4.1.

откуда следует, что функция $x(s)$ равномерно непрерывна на каждом ограниченном подмножестве из t . Действительно, если

$$s_1, s_2 \in t, \quad 0 < s_2 - s_1 < 2^{-m}, \quad 0 < s_1 < s_2 < m, \quad (19)$$

то

$$|x(s_2) - x(s_1)| < c_3 2^{-m/3}, \quad c_3 = 4c_2 \sum_{n \geq 1} 2^{-n/3}. \quad (20)$$

Для доказательства этого выберем n таким, чтобы $s_1, s_2 \in t_{n+m}$, и рассмотрим такие $s'_1 = k_1 2^{-n-m}$ и $s'_2 = k_2 2^{-n-m}$, что

$$s_1 < s'_1 < s'_2 < s_2, \quad s'_1 - s_1 < 2^{-n-m}, \quad s_2 - s'_2 < 2^{-n-m}. \quad (21)$$

Используя (18) и конечные разложения

$$\begin{aligned} s'_1 &= k 2^{-l} - 2^{-p_1} - 2^{-p_2} - \dots, \quad m \leq l < p_1 < p_2 < \dots; \\ s'_2 &= k 2^{-l} + 2^{-q_1} + 2^{-q_2} + \dots, \quad m \leq l < q_1 < q_2 < \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} |x(s_2) - x(s_1)| &\leq |x(s'_1) - x(s_1)| + |x(s'_1) - x(s'_2)| + |x(s_2) - x(s'_2)| < \\ &< c_2 \cdot 2^{-(m+n)/3} + 2 \sum_{l \geq 1} c_2 2^{-(m+l)/3} + c_2 2^{-(m+n)/3} < c_3 2^{-m/3}. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь мы можем продолжить $x(s)$ ($s \in t$) до непрерывной функции на $[0, +\infty)$; а так как эта функция — элемент множества $\bigcap_{n \geq 1} x_t^{-1}(B_n) \subseteq \bigcap_{n \geq 1} C_n$, то доказательство завершено¹⁾. Мету P теперь можно продолжить до вероятностной меры на σ -алгебре \mathbf{B} , порожденной алгеброй \mathbf{C} ; обозначим это продолжение также через P . Тройка $[W, \mathbf{B}, P]$ называется стандартным броуновским движением, начинающимся в 0. P есть так называемая винеровская мера.

Если $a \in R^1$, то же самое доказательство показывает возможность продолжения на \mathbf{B} функции множества

$$\begin{aligned} P_a(C) &= \int_{\mathbf{B}} g(t_1, a, b_1) db_1 g(t_2 - t_1, b_1, b_2) db_2 \dots \\ &\dots g(t_n - t_{n-1}, b_{n-1}, b_n) db_n, \end{aligned} \quad (24)$$

$$C = x_t^{-1}(B), \quad B \in \mathbf{B}(R^n), \quad n \geq 1.$$

Так как $g(t, a, b) = g(t, 0, |b - a|)$, то

$$P_a(B) = P_0\{\omega + a \in B\}, \quad P_a\{-\omega \in B\} = P_{-a}(B), \quad B \in \mathbf{B}, \quad (25)$$

¹⁾ Приведенное доказательство является соединением доказательства теоремы Колмогорова о существовании вероятностного процесса с заданными конечномерными распределениями и колмогоровского критерия непрерывности траекторий процесса. — *Прим. перев*

где $\omega + a$ — сдвинутая траектория $x(t, \omega + a) = x(t) + a$, a — ω — отраженная траектория $x(t, -\omega) = -x(t)$.

Так как

$$\begin{aligned} P_a \{x(0) = a\} &= P_0 \{x(0) = 0\} = \lim_{n \uparrow +\infty} \lim_{t \downarrow 0} P_0 \{|x(t)| < n^{-1}\} = \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} \lim_{t \downarrow 0} 2 \int_0^{n^{-1}t^{-1/2}} \frac{e^{-b^2/2}}{\sqrt{2\pi}} db = 1, \end{aligned} \quad (26)$$

то $P_a(B)$ следует представлять себе как *вероятность того, что произойдет событие B для броуновской траектории, начинающейся в точке $a \in R^1$* .

$D = [W, B, P_a : a \in R^1]$ — стандартное броуновское движение; это набор индивидуальных случайных процессов, по одному для каждой точки $a \in R^1$, которые связаны вместе некоторым образом, как мы сейчас объясним.

Из (24) ясно, что

$$\begin{aligned} P_a \{x(t) \in db \mid x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\} &= P_{x(t_n)} \{x(t - t_n) \in db\} = \\ &= g(t - t_n, x(t_n), b) db, \quad t > t_n \geq \dots \geq t_2 \geq t_1, \quad n \geq 1, \quad a, b \in R^1; \end{aligned} \quad (27)$$

или, что то же,

$$P_a \{x(t_2) \in db \mid B_{t_1}\} = P_c \{x(t_2 - t_1) \in db\}, \quad c = x(t_1), \quad t_2 \geq t_1, \quad a, b \in R^1, \quad (28)$$

где $B_{t_1} = B \{x(s) : s \leq t_1\}$ — наименьшая под- σ -алгебра B , содержащая все события $\{\omega : a \leq x(s) < b\} (s \leq t_1)$. Это так называемое *простое марковское свойство*.

Формула (28) показывает, как *связаны друг с другом* индивидуальные броуновские движения; она утверждает, что *броуновская частица начинает движение заново в момент t_1* . Более точно, она утверждает, что *при условии фиксированного настоящего $b = x(t_1)$ будущее $x(t + t_1) (t \geq 0)$ есть броуновское движение, начинающееся в точке b , независимое от прошлого $x(t) (t < t_1)$; прилагательное «марковский» описывает именно это свойство начинаться заново*.

Рассмотрим оператор $\mathfrak{G}u = u''/2$, определенный на $D(\mathfrak{G}) = C^2(R^1)$.

Для данной функции $f \in C(R^1)$ единственным (ограниченным) решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mathfrak{G}u, \quad t > 0, \\ u(+0, \cdot) &= f, \end{aligned} \quad (29)$$

является

$$u = u(t, a) = E_a[f(x_t)] = \int_{R^1} \frac{e^{-(b-a)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} f db^1, \quad (30)$$

а его преобразование Лапласа $\hat{u} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} u dt$ ($\alpha > 0$) — это единственное (ограниченное) решение

$$\hat{u} = \hat{u}(\alpha, a) = E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] = \int_{R^1} \frac{e^{-V\sqrt{2\alpha}|b-a|}}{\sqrt{2\alpha}} f db^2 \quad (31)$$

уравнения

$$(\alpha - \mathfrak{G}) \hat{u} = f. \quad (32)$$

На операторном языке можно сказать так: если $e^{t\mathfrak{G}}f = u(t, \cdot)$ ($t > 0$) и $G_\alpha f = \hat{u}$ ($\alpha > 0$), то $e^{t\mathfrak{G}}$ отображает $C(R^1)$ в $C^\infty(R^1)$, $(\partial/\partial t - \mathfrak{G})e^{t\mathfrak{G}} = 0$, а $G_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{t\mathfrak{G}} dt$ отображает $C(R^1)$ взаимно однозначно на $C^2(R^1)$, причем $G_\alpha^{-1} = \alpha - \mathfrak{G}$.

Говорят, что оператор \mathfrak{G} порождает броуновское движение. G_α есть так называемый оператор Грина броуновского движения; см. применения в § 2.4.

Задача 1 (по Комацу [1]). Проверить, что при $a \geq 0$

$$2 [V\overline{a^2+4} + a]^{-1} \leq e^{a^2/2} \int_a^{+\infty} e^{-b^2/2} db \leq 2 [V\overline{a^2+2} + a]^{-1}.$$

[Обозначая через g_- нижнюю оценку, через g_+ верхнюю и через g видоизмененный интеграл ошибок в средней части, простым вычислением получаем $g'_- \geq ag_- - 1$, $g' = ag - 1$, $g'_+ \leq ag_+ - 1$; поэтому $(g - g_-)' \leq a(g - g_-)$, $(g_+ - g)' \leq a(g_+ - g)$; откуда, пользуясь тем, что g_- , g , $g_+ \leq a^{-1}$, получаем, что $g - g_-$, $g_+ - g$ не могут стать отрицательными.]

Задача 2. $P_0 \left\{ \lim_{t \downarrow 0} tx \left(\frac{1}{t} \right) = 0 \right\} = 1.$

Задача 3 (по П. Леви [3: 246]). Рассмотрим стандартное броуновское движение, начинающееся в 0; задача состоит в том,

¹⁾ См. И. Петровский [2: 344 — 348].

²⁾ $\frac{e^{-V\sqrt{2\alpha}|b-a|}}{\sqrt{2\alpha}} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{e^{-(b-a)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} dt$; см. А. Эрдейи [1 (1): 146 (27)].

чтобы доказать, что

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t=0, \\ tx\left(\frac{1}{t}\right), & t>0, \end{cases}$$

и

$$b(t) = cx\left(\frac{t}{c^2}\right), \quad t \geq 0 \quad (c > 0),$$

— также броуновские движения, начинающиеся в 0.

[Оба эти процесса — гауссовские со средним 0, и

$$E_0[x(s)x(t)] = E_0\left[sx\left(\frac{1}{s}\right)tx\left(\frac{1}{t}\right)\right] = E_0\left[cx\left(\frac{s}{c^2}\right)cx\left(\frac{t}{c^2}\right)\right] = s \wedge t.]$$

Задача 4. Броуновское движение представляет собой процесс с независимыми приращениями; т. е. независимы его приращения $x[a_i, b_i] = x(b_i) - x(a_i)$ ($i \leq n$) на непересекающихся интервалах $[a_i, b_i]$ ($i \leq n$) полупрямой $[0, +\infty)$.

Задача 5. Пусть $f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$; проверить, что

$$u(t, a) = e^{t\mathfrak{G}}f = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n (\mathfrak{G}^n f)(a)}{n!}$$

является решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{G}u, \quad u(+0, \cdot) = f,$$

и вывести отсюда для стандартного броуновского движения формулу

$$E_0(x_t^{2n}) = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) t^n, \quad n \geq 1.$$

Задача 6. Дать прямое доказательство того, что функция (31) является ограниченным решением уравнения (32), и использовать это для вывода формулы

$$\frac{e^{-\sqrt{2\alpha}|b-a|}}{\sqrt{2\alpha}} = \int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{e^{-(b-a)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} dt,$$

приведенной в сноске 2 на стр. 33.

Задача 7. Дать доказательство того, что почти все броуновские траектории нигде не дифференцируемы. Это открыли Р. Пэли, Н. Винер и А. Зигмунд [1]; доказательство, предлагаемое ниже, принадлежит А. Дворецкому, П. Эрдёшу и С. Какутани [3].

[Если броуновская траектория дифференцируема в какой-то точке $0 \leq s \leq 1$, то

$$|x(t) - x(s)| < l(t-s), \quad s < t < s + \frac{5}{n}, \quad n \geq m,$$

для некоторого $l \geq 1$ и некоторого $m \geq 1$. Но это событие есть часть события

$$\bigcup_{l \geq 1} \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \bigcup_{0 < i \leq n+2} \bigcap_{i < k \leq i+3} \left\{ \omega: \left| x\left(\frac{k}{n}\right) - x\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| < \frac{7l}{n} \right\},$$

а

$$P_0 \left[\bigcup_{0 < i \leq n+2} \bigcap_{i < k \leq i+3} \left\{ \omega: \left| x\left(\frac{k}{n}\right) - x\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| < \frac{7l}{n} \right\} \right] \leq$$

$$\leq (n+2) \cdot \left[P_0 \left\{ \left| x\left(\frac{1}{n}\right) \right| < \frac{7l}{n} \right\} \right]^3 =$$

$$= (n+2) \left(\int_{| \xi | < 7l/\sqrt{n}} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi \right)^3 < \frac{\text{const}}{\sqrt{n}} \downarrow 0 \quad (n \uparrow +\infty).$$

1.5. Конструкция П. Леви

П. Леви [3: 15—20] дал другое построение стандартного броуновского движения; использование функций Хаара в последующем изложении заимствовано у З. Тесельского [1].

Введем гильбертово пространство $L^2[0, 1]$ с ортогональным базисом, определяемым функциями Хаара:

$$f_0(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad (1a)$$

$$f_{k2^{-n}}(t) = \begin{cases} +2^{(n-1)/2}, & (k-1)2^{-n} \leq t < k2^{-n}; \\ -2^{(n-1)/2}, & k2^{-n} \leq t < (k+1)2^{-n}; \end{cases} \quad (1b)$$

k — нечетное, $k < 2^n$, $n \geq 1$.

Если дана стандартная броуновская траектория $x(t)$ ($t \leq 1$) с формальной производной x^* (белый шум), то формальные коэффициенты Фурье

$$g_0 = \int_0^1 f_0 x^* dt = x(1), \quad (2a)$$

$$g_{k2^{-n}} = \int_0^1 f_{k2^{-n}} x^* dt =$$

$$= 2^{(n-1)/2} [2x(k2^{-n}) - x((k-1)2^{-n}) - x((k+1)2^{-n})] \quad (2b)$$

$(k \text{ — нечетное, } k < 2^n, n \geq 1)$

должны быть гауссовскими:

$$P\{g < a\} = \int_{-\infty}^a \frac{e^{-b^2/2}}{\sqrt{2\pi}} db, \quad (3)$$

ортгональными:

$$E(g_{k2^{-n}} g_{j2^{-m}}) = \int_0^1 f_{k2^{-n}} f_{j2^{-m}} dt = 0 \quad (k2^{-n} \neq j2^{-m}), \quad (4)$$

а следовательно, *независимыми* (см. предварительные сведения); и проинтегрированное разложение Фурье

$$g_0 \int_0^t f_0 ds + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\text{нечет. } k < 2^n} g_{k2^{-n}} \int_0^t f_{k2^{-n}} ds \quad (5)$$

должно сходиться к $x(t)$ ($t \leq 1$). Идея состоит в том, чтобы использовать (5) для *определения* броуновского движения.

Рассмотрим для этого алгебру $B[0, 1]$ борелевских подмножеств отрезка $[0, 1]$, которым приписывается классическая мера Лебега P . Пусть $0 \leq u \leq 1$ имеет следующее двоичное разложение:

$$u = 2^{-1}u_1 + 2^{-2}u_2 + 2^{-3}u_3 + \dots = 0, u_1 u_2 u_3 \dots$$

Пусть h — функция, обратная к $\int_{-\infty}^a e^{-b^2/2} db / \sqrt{2\pi}$. Положим

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, u_1 u_2 u_4 u_7 \dots; \\ v_2 &= 0, u_3 u_5 u_8 \dots; \\ v_3 &= 0, u_6 u_9 \dots; \\ v_4 &= 0, u_{10} \dots; \\ &\dots \end{aligned}$$

и рассмотрим случайные величины

$$\begin{aligned} g_0 &= h(v_1); \\ g_{1/2} &= h(v_2); \\ g_{1/4} &= h(v_3), \quad g_{3/4} = h(v_4); \\ g_{1/8} &= h(v_5), \quad g_{3/8} = h(v_6), \quad g_{5/8} = h(v_7), \quad g_{7/8} = h(v_8); \\ &\dots \end{aligned}$$

Заметим, что различные величины g независимы и имеют одно и то же распределение (3).

Рассмотрим теперь сумму

$$e_m = g_0 \int_0^t f_0 ds + \sum_{n \leq m} \sum_{\text{нечет. } k < 2^n} g_{k2^{-n}} \int_0^t f_{k2^{-n}} ds. \quad (6)$$

Легко видеть, что

$$\max_{l \leq 1} \sum_{\text{нечет. } k < 2^n} \int_0^t f_{k2^{-n}} ds = 2^{-(n+1)/2}; \quad (7)$$

поэтому ¹⁾

$$\|e_n - e_{n-1}\| \leq 2^{-(n+1)/2} \max_{\text{нечет. } k < 2^n} |g_{k2^{-n}}|, \quad (8)$$

так что

$$P\{\|e_n - e_{n-1}\| > \sqrt{2 \cdot 2^{-n} \ln 2^n}\} \leq 2^n \int_{2\sqrt{n \ln 2}}^{+\infty} e^{-b^2/2} \frac{db}{\sqrt{2\pi}} < \frac{2^{-n-1}}{\sqrt{n \ln 2}}. \quad (9)$$

Используя первую лемму Бореля—Кантелли и оценку

$$\sum_{m > n} \sqrt{2 \cdot 2^{-m} \ln 2^m} < \frac{3}{\ln 2} \sqrt{2 \cdot 2^{-n} \ln 2^n},$$

немедленно получаем, что e_n сходится при $n \uparrow +\infty$ к непрерывной функции e_∞ и что

$$P\left\{\|e_\infty - e_n\| \leq \frac{3}{\ln 2} \sqrt{2 \cdot 2^{-n} \ln 2^n}, n \uparrow +\infty\right\} = 1. \quad (10)$$

Так как случайные функции e_n были гауссовскими, гауссовской будет и e_∞ ; так как $E(e_n)$ равнялось 0, то же будет и для $E(e_\infty)$; и чтобы доказать, что $[e_\infty: 0 \leq t \leq 1, \mathbf{B}, P]$ —броуновское движение, достаточно проверить, что

$$E[e_\infty(s) e_\infty(t)] = E_0[x(s) x(t)], \quad (11)$$

т. е.

$$\int_0^s f_0 \int_0^t f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\text{нечет. } k < 2^n} \int_0^s f_{k2^{-n}} \int_0^t f_{k2^{-n}} = s \wedge t. \quad (12)$$

Но это очевидно в силу формулы Парсеваля.

Задача 1 (по П. Леви [3:19]). Используя леммы Бореля—

¹⁾ $\|f\| = \max_{t \leq 1} |f(t)|$.

Кантелли, найти нижнюю грань значений c , для которых

$$\|e_n - e_{n-1}\| < c \sqrt{2^{-n} \ln 2^n} \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

$$[c = 1.]$$

Задача 2. Используя результат задачи 1, проверить, что

$$P \left\{ \overline{\lim}_{\substack{|t_2 - t_1| = \varepsilon \downarrow 0 \\ 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1}} \frac{e_\infty(t_2) - e_\infty(t_1)}{\sqrt{\varepsilon \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}} \geq 1 \right\} = 1$$

(более подробно об этом см. § 1.9).

$$\left[\frac{1}{2} [e_\infty(m2^{-n}) - e_\infty((m-1)2^{-n})] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [e_\infty(m2^{-n}) - e_\infty((m+1)2^{-n})] = e_n(m2^{-n}) - e_{n-1}(m2^{-n}) \right]$$

для $m = 1, 3, \dots, 2^n - 1$; поэтому

$$\max_{m \leq 2^n} [e_\infty(m2^{-n}) - e_\infty((m-1)2^{-n})] \geq \|e_n - e_{n-1}\|.$$

Далее используйте ответ задачи 1.]

Задача 3. Винеровская конструкция стандартного броуновского движения; см. Р. Пэли и Н. Винер [1: 215—229]. Пусть g_n , $n \geq 0$, независимы и имеют гауссовское распределение:

$$P\{g_n \leq a\} = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-b^2/2} db.$$

Тогда ряд

$$x(t) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} g_0 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kt}{k} g_k$$

сходится равномерно на отрезке $0 \leq t \leq \pi$ с вероятностью 1 и его сумма является стандартным броуновским движением.

[Положим

$$s_{mn}(t) = \sum_m^{n-1} \frac{\sin kt}{k} g_k, \quad t_{mn} = \max_{0 \leq t \leq \pi} |s_{mn}(t)|;$$

тогда

$$t_{mn}^2 \leq \max_{t \leq \pi} \left| \sum_m^{n-1} \frac{e^{ikt}}{k} g_k \right|^2 \leq \sum_m^{n-1} \frac{g_k^2}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} \left| \sum_{j=m}^{n-l-1} \frac{g_j g_{j+l}}{j(j+l)} \right|;$$

$$\begin{aligned}
(E(t_{mn}))^2 &\leq E(t_{mn}^2) \leq \sum_m^{n-1} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} \left(E \left(\left| \sum_{j=m}^{n-l-1} \frac{g_j g_{j+l}}{j(j+l)} \right|^2 \right) \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \sum_m^{n-1} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} \left(\sum_{j=m}^{n-l-1} \frac{1}{j^2(j+l)^2} \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{n-m}{m^2} + 2(n-m) \left(\frac{n-m}{m^4} \right)^{1/2};
\end{aligned}$$

$$E(t_{m, 2m}) \leq \sqrt{3} m^{-1/4};$$

$$E \left[\sum_{n \geq 1} t_{2^{n-1}, 2^n} \right] \leq \sum_{n \geq 1} E(t_{2^{n-1}, 2^n}) < \infty;$$

$$P \left\{ \sum_{n \geq 1} t_{2^{n-1}, 2^n} < +\infty \right\} = 1,$$

и поэтому наш ряд сходится равномерно с вероятностью 1, так что почти все траектории $x(t)$ ($t \leq \pi$) непрерывны. Теперь достаточно проверить, что

$$E[x(t)x(s)] = \frac{ts}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{\sin kt \sin ks}{k^2} = s \wedge t.]$$

1.6. Строго марковское свойство

Рассмотрим стандартное броуновское движение D ; пусть w_s^* — сдвинутая траектория $x_t(w_s^*) = x_{t+s}(w)$ ($t \geq 0$), и, как и раньше, пусть B_s будет σ -алгеброй, порожденной событиями $\{w: a \leq x(t) < b\}$ ($t \leq s$).

Процесс D является марковским в следующем смысле:

$$P\{w_s^* \in B | B_s\} = P_b(B), \quad b = x(s), \quad B \in B \quad (1)$$

[см. формулу (1.4.28)]. Иначе говоря, *частица, совершающая броуновское движение, начинает движение заново в каждый момент $t = s \geq 0$.*

Энтузиасты изучения броуновского движения хорошо знакомы с тем, что *частица, совершающая броуновское движение, начинает движение заново также в некоторые случайные моменты, такие, как время первого достижения $m_1 = \min\{t: x(t) = 1\}$* ¹⁾.

Дж. Хант [1] дал исчерпывающую формулировку этого свойства броуновского движения.

Рассмотрим марковский момент $0 \leq m = m(w) (\leq +\infty)$, т. е. пусть²⁾

$$\{m < t\} \in B_t, \quad t \geq 0; \quad (2)$$

¹⁾ $\min\{t: x(t) = 1\} = +\infty$, если траектория никогда не достигает 1.

²⁾ $\{m < t\}$ — сокращенное обозначение для $\{w: m < t\}$.

и определим B_{m+0} как класс таких множеств $B \in \mathbf{B}$, что

$$B \cap \{m < t\} \in \mathbf{B}_t, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Класс B_{m+0} является σ -алгеброй, и $\{m < t\} \in B_{m+0}$ для любого $t > 0$; кроме того,

$$B_{m+0} \equiv \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbf{B} \{x(t \wedge (m + \varepsilon)): t \geq 0\}, \quad (4)$$

как мы увидим ниже. B_{m+0} следует представлять себе как наблюдение броуновской траектории вплоть до момента $t = m + 0$.

Утверждение Ханта состоит в том, что при условии, что фиксировано положение частицы $b = x(m)$ в настоящее время, будущая траектория $x(t + m)$ ($t \geq 0$) является стандартным броуновским движением, начинающимся в b , и это броуновское движение независимо от B_{m+0} . На языке условных вероятностей

$$P \cdot \{w_m^+ \in B \mid B_{m+0}\} = P_b(B), \quad m < +\infty, \quad b = x(m), \quad B \in \mathbf{B}; \quad (5a)$$

т. е.

$$P \cdot \{A, w_m^+ \in B, m < +\infty\} = E \cdot [A \cap \{m < +\infty\}, P_{x(m)}(B)], \quad (5b)$$

$$A \in B_{m+0}, \quad B \in \mathbf{B}.$$

Другими словами, если m — марковский момент и $m(w) < +\infty$, то частица, совершающая броуновское движение, начинает его заново в момент $t = m(w)$.

Прежде чем доказывать (5), стоит изучить марковские моменты m и алгебры B_{m+0} немного подробнее.

Если дано $t \geq 0$, то $m \equiv t$ есть марковский момент, как явствует из (2), и $B_{m+0} = B_{t+0} \equiv \bigcap_{s > t} B_s$. В самом деле, если $B \in B_{m+0}$ и $s > t$, то $B = B \cap \{m < s\} \in B_s$; а если $B \in \bigcap_{s > t} B_s$, то

$$B \cap \{m < s\} = \begin{cases} B, & s > t; \\ \emptyset, & s \leq t, \end{cases}$$

и $B \in B_{m+0}$.

Пусть даны марковские моменты $m_1 \leq m_2$; тогда если $B \in B_{m_1+0}$, то $B \cap \{m_2 < t\} = B \cap \{m_1 < t\} \cap \{m_2 < t\} \in B_t$ для любого $t \geq 0$, т. е.

$$B_{m_1+0} \subseteq B_{m_2+0}. \quad (6)$$

Пусть даны марковские моменты m и $m_1 \geq m_2 \geq \dots \downarrow m$; тогда если $B \in \bigcap_{n \geq 1} B_{m_n+0}$, то $B \cap \{m < t\} = \bigcup_{n \geq 1} B \cap \{m_n < t\} \in B_t$ для любого $t \geq 0$; т. е. в силу (6)

$$\bigcap_{n \geq 1} B_{m_n+0} = B_{m+0}. \quad (7)$$

Что касается доказательства соотношения (4), то если m — марковский момент, $m \wedge t$ измеримо относительно B_t для любого $t \geq 0$, как это ясно из (2). Отсюда, используя тот факт, что $x(t \wedge s, w)$ есть $(B[0, +\infty) \times B_t)$ -измеримая функция пары (s, w) ¹⁾, получаем, что функция $x(m \wedge t \wedge s)$ измерима относительно B_t при любом $s \geq 0$. Но тогда при $t \geq 0$

$$\{w: x(m \wedge s) < b\} \cap \{m < t\} = \{w: x(m \wedge t \wedge s) < b\} \cap \{m < t\} \in B_t,$$

т. е. $\{w: x(m \wedge s) < b\} \in B_{m+0}$ для любого $s \geq 0$. Используя (7) и тот факт, что $m + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ есть марковский момент, находим, что $\bigcap_{\varepsilon > 0} B\{x(t \wedge (m + \varepsilon)): t \geq 0\}$ является частью множества $\bigcap_{\varepsilon > 0} B_{(m+\varepsilon)+0} = B_{m+0}$, как и утверждалось в (4).

Перейдем к доказательству формул (5). Достаточно показать, что для любой B -измеримой функции e ($0 \leq e \leq 1$)

$$E\{B, e(w_m^+), m < +\infty\} = E\{B, E_{x(m)}(e), m < +\infty\}, \quad B \in B_{m+0}. \quad (8)$$

Поскольку простые функции

$$\begin{aligned} e(w) &= f[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)], \\ 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n, \quad 0 \leq f \leq 1, \quad f \in C(R^n), \end{aligned} \quad (9)$$

порождают весь класс B -измеримых функций, достаточно доказать равенство (8) только для них.

Если функция e имеет вид (9), то

$$\lim_{s \downarrow t} e(w_s^+) = e(w_t^+), \quad t \geq 0, \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} E_a(e) &= \int_{R^n} g(t_1, a, b_1) g(t_2 - t_1, b_1, b_2) \dots g(t_n - t_{n-1}, b_{n-1}, b_n) \times \\ &\quad \times f(b_1, b_2, \dots, b_n) db_1 db_2 \dots db_n \in C(R^1). \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда, в этом частном случае, полагая $m_n = 2^{-n}([2^n m] + 1)$ ($n \geq 1$), имеем:

$$\begin{aligned} E\{B, e(w_m^+), m < +\infty\} &= \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} E\{B, e(w_{m_n}^+), m < +\infty\} = \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k \geq 1} E.[B \cap \{m_n = k2^{-n}\}, e(w_{k2^{-n}}^+)] = \end{aligned}$$

¹⁾ Для доказательства этого факта используется соотношение $x(t) = \lim_{n \uparrow +\infty} x(2^{-n}[2^n t])$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k \geq 1} E. [B \cap \{(k-1)2^{-n} \leq m < k2^{-n}\}, e(w_{k2^{-n}}^+)] = \\
&= \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k \geq 1} E. [B \cap \{(k-1)2^{-n} \leq m < k2^{-n}\}, E_{x(k2^{-n})}(e)]^1 = \\
&= \lim_{n \uparrow +\infty} E. \{B, E_{x(m_n)}(e), m < +\infty\} = \\
&= E. \{B, E_{x(m)}(e), m < +\infty\}, \quad (12)
\end{aligned}$$

что нам и было нужно.

Задача 1. Привести пример марковского момента, для которого

$$\{m \leq t\} \in \mathbf{B}_t, \quad t \geq 0.$$

Привести также пример марковского момента, для которого это неверно.

$$[m_1 = \min \{t: x(t) = 1\}; \quad m_{+0} = \inf \{t: x(t) > 0\}.]$$

Задача 2. Блюменталевский закон 0—1 (см. Р. Блюменталь [1]). Алгебра \mathbf{B}_{+0} тривиальна, т. е.

$$P_+(B) = 0 \text{ или } 1, \quad B \in \mathbf{B}_{+0}.$$

$$[P_+(B) = E. (B, P_+(B | \mathbf{B}_{+0})) = E. (B, P_{x(0)}(B)) = [P_+(B)]^2.]$$

1.7. Моменты первого достижения для стандартного броуновского движения

Наиболее важными марковскими моментами являются *моменты первого достижения*

$$m_a = \min \{t: x_t = a\}, \quad a \in R^1. \quad (1)$$

П. Леви [3: 221—223] показал, что $[m_a: a \geq 0, P_0]$ — *односторонний устойчивый процесс с показателем $1/2$ и скоростью $\sqrt{2}$* , т. е. что это однородный процесс с независимыми приращениями с распределением

$$\begin{aligned}
P_0 \{m_b - m_a \leq t\} &= P_0 \{m_{b-a} \leq t\} = \int_0^t \frac{b-a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-(b-a)^2/2s} ds, \quad (2) \\
b &\geq a, \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

(см. замечание 1).

Начнем с доказательства формулы (2). Если $a \geq 0$ и f — характеристическая функция луча $[a, +\infty)$, то, используя (1.6.5b)

¹⁾ $B \cap \{(k-1)2^{-n} \leq m < k2^{-n}\} \in \mathbf{B}_{k2^{-n}}$; далее используется формула (1).

и тот факт, что $e^{-\alpha m} = 0$ при $m = +\infty$, получаем (здесь $m = m_a$):

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_0 \{x_t \geq a\} dt &= E_0 \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right) = E_0 \left(\int_m^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right) = \\
 &= E_0 \left[e^{-\alpha m} E_0 \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f[x(t, w_m^+)] dt | B_{m+0} \right) \right]^1 = \\
 &= E_0(e^{-\alpha m_a}) E_a \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right) = \\
 &= E_0(e^{-\alpha m_a}) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_a \{x_t \geq a\} dt = \\
 &= (2\alpha)^{-1} E_0(e^{-\alpha m_a}) = (2\alpha)^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_0 \{m_a \in dt\} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_0 \{m_a \leq t\} dt. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Это доказывает знаменитый *принцип отражения* Д. Анрэ

$$P_0 \{m_a \leq t\} = 2P_0 \{x_t \geq a\} = 2 \int_a^{+\infty} \frac{e^{-b^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} db, \quad t, a \geq 0. \quad (4)$$

Соотношение (2) теперь немедленно следует из формулы

$$2 \int_a^{+\infty} \frac{e^{-b^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} db = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-a^2/2s} ds, \quad t, a \geq 0;$$

одновременно получаем, что $P_a \{m_b < +\infty\} \equiv 1$.

Из (4), используя сноску 2 на стр. 33, получаем

$$\begin{aligned}
 E_0(e^{-\alpha m_a}) &= 2\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \int_a^{+\infty} \frac{e^{-b^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} db = \\
 &= 2\alpha \int_a^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{2\alpha}b}}{\sqrt{2\alpha}} db = e^{-\sqrt{2\alpha}a}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

¹⁾ m измеримо относительно B_{m+0} .

Более непосредственно формулу (5) можно получить так: из (2) и первого интеграла в (5) ясно, что $g \equiv E_0(e^{-\alpha m_a})$ есть решение задачи

$$g'' = 2\alpha g, \quad g(0) = 1, \quad g(+\infty) = 0, \quad (6)$$

которое легко найти.

Чтобы завершить доказательство того, что m_a ($a \geq 0$) — односторонний устойчивый процесс, теперь достаточно проверить независимость приращений. Пусть даны $0 < a < b$; при $m = m_a < +\infty$

$$\begin{aligned} m_b &= \min \{t: x(t) = b\} = m + \min \{t: x(t+m) = b\}^1 = \\ &= m + \min \{t: x(t, \omega_m^+) = b\} = m + m_b(\omega_m^+). \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда, используя (1.6.5b) и то, что $e^{-\alpha m} = 0$ при $m = +\infty$, получаем

$$\begin{aligned} E_0[e^{-\alpha_1 m_a} e^{-\alpha_2 (m_b - m_a)}] &= E_0[e^{-\alpha_1 m_a} E_0(e^{-\alpha_2 m_b(\omega_m^+)} | \mathbf{B}_{m+0})] = \\ &= E_0(e^{-\alpha_1 m_a}) E_a(e^{-\alpha_2 m_b}) = E_0(e^{-\alpha_1 m_a}) E_0[e^{-\alpha_2 m_b(\omega_m^+)}] = \\ &= E_0(e^{-\alpha_1 m_a}) E_0[e^{-\alpha_2 (m_b - m_a)}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичная выкладка показывает, что при $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ и $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$

$$\begin{aligned} E_0[e^{-\alpha_1 m_{a_1}} e^{-\alpha_2 (m_{a_2} - m_{a_1})} \dots e^{-\alpha_n (m_{a_n} - m_{a_{n-1}})}] &= \\ &= E_0[e^{-\alpha_1 m_{a_1}}] E_0[e^{-\alpha_2 (m_{a_2} - m_{a_1})}] \dots E_0[e^{-\alpha_n (m_{a_n} - m_{a_{n-1}})}], \end{aligned} \quad (9)$$

что завершает доказательство.

Что касается фактических траекторий m_a ($a \geq 0$), то из равенств

$$E_0(e^{-\alpha m_a}) = e^{-\sqrt{2\alpha}a} = e^{-a \int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha l}) \frac{dl}{\sqrt{2\pi l^3}}}, \quad a \geq 0, \quad (10)$$

ясно, что

$$m_a = \int_0^{+\infty} l p([0, a) \times dl), \quad (11)$$

где

$p(da \times dl)$ — число скачков величины $l \in dl$, которые m_b ($b \geq 0$) испытывает при $b \in da$, (12)

¹⁾ Для тех ω , для которых $x(0) < a$. — Прим. перев.

есть пуассоновская мера со средним $da \times \frac{dl}{\sqrt{2\pi l^3}}$ (см. замечание 1).

В частности, отсюда вытекает, что m_b является суммой положительных скачков. Заметим, что в (11) стоит $[0, a)$ вместо $[0, a]$ в замечании 1; это потому, что функция m_a непрерывна *слева*.

Функция максимумов $t^-(t) = \max_{s \leq t} x(s)$ ($t \geq 0$) есть обратная функция для процесса m моментов первого достижения; она непрерывна и напоминает по своему виду стандартную канторову функцию (см. об этом еще в § 2.2 и в задаче 5).

Задача 1 (по П. Леви [3: 211]). Вывести совместное распределение

$$P_0 \{x_t \in da, \max_{s \leq t} x_s \in db\} = \left(\frac{2}{\pi t^3}\right)^{1/2} (2b-a) e^{-(2b-a)^2/2t} da db, \quad t > 0, \quad 0 \leq b, \quad b \geq a.$$

[Если $b \geq a$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt P_0 \{x_t \leq a, \max_{s \leq t} x_s \geq b\} &= E_0 \left[\int_{m_b}^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] = \\ &= E_0(e^{-\alpha m_b}) E_b \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f dt \right) = e^{-\sqrt{2\alpha} b} \int_{-\infty}^a \frac{e^{-\sqrt{2\alpha} \cdot b - c}}{\sqrt{2\alpha}} dc, \end{aligned}$$

где f — характеристическая функция луча $(-\infty, a]$; таким образом,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt P_0 \{x_t \in da, \max_{s \leq t} x_s \in db\} = 2e^{-\sqrt{2\alpha}(2b-a)} da db.$$

Далее используйте формулы (2) и (6).]

Задача 2. Используя результат задачи 1.4.3, дать новый вывод закона распределения (5) момента первого достижения.

[Пусть $c > 0$; тогда $\min \{t: cx(t/c^2) = b\} = c^2 m_{b/c}$ и m_b имеют одинаковое распределение, откуда, используя независимость приращений m_b ($b \geq 0$), выводим, что $E_0(e^{-\alpha m_b})$ — экспонента $e^{-bg(\alpha)}$, где $g(c^2\alpha)/c = g(\alpha)$ ($c > 0$); т. е. $g(\alpha) = g(1)\sqrt{\alpha}$ ($\alpha > 0$). Теперь вычислите константу $g(1)$.]

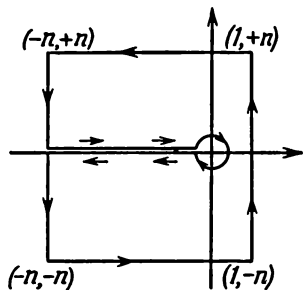
Задача 3. Проверить закон арксинуса П. Леви [3: 216], состоящий в том, что для наибольшего корня $z_1 < t$ уравнения $x(s) = 0$ имеет место равенство

$$P_0 \{z_1 \leq s\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{s/t} \frac{dl}{\sqrt{l(1-l)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}, \quad t \geq s \geq 0;$$

вычислить также распределение наименьшего корня $\mathfrak{z}_+ > t$ уравнения $x(s) = 0$ при условии, что фиксировано \mathfrak{z}_- :

$$\begin{aligned} [P_0 \{ \mathfrak{z}_- \leq s \} = P_0 \{ m_0(w_s^+) > t - s \} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0 \{ x(s) \in da \} P_a \{ m_0 > t - s \} = \\ = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2/2s}}{\sqrt{2\pi s}} da \int_{t-s}^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi l^3}} e^{-a^2/2l} dl = \frac{1}{\pi} \int_0^{s/t} \frac{dl}{\sqrt{l(1-l)}}. \end{aligned}$$

Аналогичная выкладка показывает, что $P_0 \{ \mathfrak{z}_+ \in db \mid \mathfrak{z}_- = a \} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(t-a)(b-a)}{t^3}} db$, $b > t$.



Р и с. 1.

Задача 4. Используя формулу $(2\pi i)^{-1} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{t\alpha} e^{-\sqrt{2}\alpha} d\alpha$ обратного преобразования Лапласа, проверить, что

$$e^{-\sqrt{2}t} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{e^{-1/2t}}{\sqrt{2\pi t^3}} dt.$$

[Рассмотрим ветвь $\sqrt{\alpha} = |\alpha| e^{i\varphi/2}$ ($\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$). Если Γ — замкнутая кривая, изображенная на рис. 1, то $(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} e^{t\alpha} e^{-\sqrt{2}\alpha} d\alpha = 0$, откуда,

полагая $n \uparrow +\infty$, получаем

$$\begin{aligned} (2\pi i)^{-1} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{t\alpha} e^{-\sqrt{2}\alpha} d\alpha = \\ = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{t\alpha + i\sqrt{2}|\alpha|} d\alpha + (2\pi i)^{-1} \int_0^{-\infty} e^{t\alpha - i\sqrt{2}|\alpha|} d\alpha = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} \sin \sqrt{2}\alpha d\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\pi t} \int_0^{+\infty} e^{-t\alpha^2} \cos \sqrt{2}\alpha d\alpha = \frac{e^{-1/2t}}{\sqrt{2\pi t^3}}. \end{aligned}$$

Задача 5. Множество \mathfrak{Z} корней уравнения $x(t) = 0$ является топологическим канторовым множеством (замкнутым, несчетным, топологической размерности 0, не имеющим изолированных точек¹⁾; его мера Лебега равна 0.

¹⁾ См. Александров и Хопф [1: 45].

{З замкнуто, потому что броуновская траектория непрерывна; имеет лебегову меру 0, так как

$$E_0[\text{mes}(\mathcal{Z})] = \int_0^{+\infty} dt P_0\{x(t) = 0\} = 0,$$

и имеет топологическую размерность 0 по той же причине. Поскольку $t + m_0(w_t^+) \in \uparrow$ как функция от t , из равенства

$$\lim_{t \downarrow 0} E_0[e^{-\alpha(t+m_0(w_t^+))}] = \lim_{t \downarrow 0} E_0[e^{-\sqrt{2\alpha}|x(t)|}] = 1$$

вытекает, что $P_0\{\lim_{t \downarrow 0} (t + m_0(w_t^+)) = 0\} = 1$; а так как $t + m_0(w_t^+) \in \mathcal{Z}$, если эта величина конечна, то множество \mathcal{Z} бесконечно. Положим $m = t_1 + m_0(w_{t_1}^+)$. Если $t_2 > t_1$, то

$$\begin{aligned} P_0\{x(s) \text{ имеет ровно один корень между } t_1 \text{ и } t_2\} &\leq \\ &\leq P_0\{m < t_2, \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\varepsilon + m_0(w_{\varepsilon+m}^+)) > 0\} \leq P_0\{\lim_{\varepsilon \downarrow 0} m_0(w_{\varepsilon}^+) > 0\} = 0, \end{aligned}$$

т. е. \mathcal{Z} не имеет изолированных точек. Отсюда вытекает, что \mathcal{Z} несчетно, и доказательство завершено.]

Задача 6. Доказать, что при $a < \xi < b$

$$E_{\xi}\{e^{-\alpha m_b}, m_b < m_a\} = \frac{\text{sh } \sqrt{2\alpha}(\xi - a)}{\text{sh } \sqrt{2\alpha}(b - a)},$$

$$E_{\xi}\{e^{-\alpha m_a}, m_a < m_b\} = \frac{\text{sh } \sqrt{2\alpha}(b - \xi)}{\text{sh } \sqrt{2\alpha}(b - a)};$$

$$P_{\xi}\{m_b < m_a\} = \frac{\xi - a}{b - a}, \quad P_{\xi}\{m_a < m_b\} = \frac{b - \xi}{b - a};$$

$$E_{\xi}[e^{-\alpha m_a \wedge m_b}] = \frac{\text{ch } \sqrt{2\alpha} d}{\text{ch } \sqrt{2\alpha}(b - a)/2},$$

и

$$E_{\xi}[e^{\alpha m_a \wedge m_b}] = \frac{\cos \sqrt{2\alpha} d}{\cos \sqrt{2\alpha}(b - a)/2}, \quad \alpha < \frac{\pi^2}{2(b - a)^2},$$

где d — расстояние между ξ и серединой отрезка $[a, b]$.

[Пусть $a < \xi < b$; если $m = m_a \wedge m_b$, то

$$e^{-\sqrt{2\alpha}(\xi - a)} = E_{\xi}[e^{-\alpha m_a}] =$$

$$= E_{\xi}\{e^{-\alpha m}, m_a < m_b\} + E_{\xi}\{e^{-\alpha m}, m_b < m_a\} e^{-\sqrt{2\alpha}(b - a)}$$

и

$$e^{-\sqrt{2\alpha}(b - \xi)} = E_{\xi}[e^{-\alpha m_b}] =$$

$$= E_{\xi}\{e^{-\alpha m}, m_a < m_b\} e^{-\sqrt{2\alpha}(b - a)} + E_{\xi}\{e^{-\alpha m}, m_b < m_a\};$$

далее разрешите эту систему относительно $E_{\xi}\{e^{-\alpha m}, m_a < m_b\}$ и $E_{\xi}\{e^{-\alpha m}, m_b < m_a\}$.

Задача 7. Доказать, что

$$P_a\{x_t \in db, m_0 > t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} [e^{-(b-a)^2/2t} - e^{-(b+a)^2/2t}] db, \quad ab > 0.$$

[Используйте задачу 1.]

Задача 8. Показать, что для стандартного броуновского движения

$$P_a\{x(t) \in db, t < m_0 \wedge m_1\} = \sum_{|n| \geq 0} (-1)^n g(t, a, b_n) db, \\ t > 0, \quad 0 < a, b < 1,$$

где $g(t, a, b)$ — обычное гауссово ядро, а $b_{2n} = b + 2n$, $b_{2n-1} = -b + 2n$.

[Пусть B — борелевское подмножество отрезка $[0, 1]$ и $B_n = \{b_n: b \in B\}$; тогда если $0 < a < 1$, $m = m_0 \wedge m_1$, то

$$P_a\{x(t) \in B, t < m\} = \sum_n (-1)^n P_a\{x(t) \in B_n, t < m\} = \\ = \sum_n (-1)^n P_a\{x(t) \in B_n\} - \sum_n (-1)^n P_a\{x(t) \in B_n, t \geq m\}.$$

Теперь, используя симметрию броуновского движения, покажите, что

$$\sum_n (-1)^n P_a\{x(t) \in B_n, t \geq m\} = \\ = \int_0^t P_a\{m_0 < m_1, m_0 \in ds\} \sum_{|n| \geq 0} (-1)^n P_0\{x(t-s) \in B_n\} + \\ + \int_0^t P_a\{m_1 < m_0, m_1 \in ds\} \sum_{|n| \geq 0} (-1)^n P_1\{x(t-s) \in B_n\} = 0.$$

Вероятность $P_a\{x(t) \in db, t < m\}$ может быть также представлена в виде $g^*(t, a, b) db$, где $g^*(t, a, b)$ — фундаментальное решение

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t / 2} \sin n \pi a \sin n \pi b$$

задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{G}u, \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{db^2}, \\ u(t, +0) = u(t, 1-0) = 0$$

(см. § 4.11), и его можно преобразовать к виду $\sum_{|n| \geq 0} (-1)^n g(t, a, b_n)$ с помощью одного из тождеств Якоби для тета-функции.]

Замечание 1. Однородные процессы с независимыми приращениями с возрастающими траекториями. Случайный процесс $p(t)$ ($t \geq 0$, $p(0) = 0$) называется *процессом с независимыми приращениями*, если приращения $p[t_1, t_2] = p(t_2) - p(t_1)$ на непересекающихся интервалах $[t_1, t_2]$ независимы; он называется *однородным*, если распределение $p[t_1 + s, t_2 + s]$ не зависит от $s (\geq 0)$, и *возрастающим*, если $p(t_1) \leq p(t_2)$ ($t_1 \leq t_2$).

П. Леви [1: 173—180] показал, что если, кроме того, $p(t+0) = p(t)$ ($t \geq 0$), то

$$E[e^{-\alpha p(t)}] = e^{-t\psi(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

где

$$\psi(\alpha) = m\alpha + \int_{+0}^{+\infty} [1 - e^{-\alpha l}] n(dl), \quad (2)$$

$$m \geq 0, \quad n(dl) \geq 0, \quad \int_{+0}^{+\infty} [1 - e^{-l}] n(dl) < +\infty;$$

$n(dl)$ есть так называемая мера Леви процесса.

Леви [1: 173—180]¹⁾ нашел также соответствующее этой формуле разложение траектории на *линейную часть плюс интеграл от пуассоновских процессов с независимыми приращениями*:

$$p(t) = mt + \int_{+0}^{+\infty} lp([0, t] \times dl), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Здесь $p(dt \times dl)$ — пуассоновская мера со средним $dt \times n(dl)$, т. е. p имеет распределение Пуассона²⁾

$$P\{p(B) = n\} = \frac{\beta^n}{n!} e^{-\beta}, \quad n \geq 0;$$

$$\beta = \int_B dt n(dl), \quad B \in \mathbf{B}([0, +\infty) \times (0, +\infty)), \quad (4)$$

и независимые значения в том смысле, что массы $p(B)$, приписываемые непересекающимся множествам $B \in \mathbf{B}([0, +\infty) \times (0, +\infty))$,

¹⁾ См. также К. Ито [1].

²⁾ $P\{p(B) = +\infty\} = 1$, если $\beta = +\infty$.

независимы; и функция p аддитивна в том смысле, что $p(\bigcup_{n \geq 1} B_n) = \sum_{n \geq 1} p(B_n)$ для непересекающихся множеств B_1, B_2, \dots из $\mathbf{B}([0, +\infty) \times (0, +\infty))$. Как ясно из формулы (3), значение $p([t_1, t_2] \times [l_1, l_2])$ равно числу скачков функции $p(t): t_1 \leq t < t_2$ величины $l_1 \leq l < l_2$.

Приведем доказательство формул (1) и (2).

Пусть $\alpha > 0$; из независимости приращений функции $p(t)$ вытекает, что $e(t) = E[e^{-\alpha p(t)}]$ является решением уравнения

$$e(t) = e(t-s)e(s), \quad t \geq s, \quad 0 < e \leq 1; \quad (5)$$

это доказывает, что

$$e(t) = e^{-t\psi(\alpha)}, \quad \alpha \geq 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \psi < +\infty. \quad (6)$$

Так как

$$\psi'(\alpha) e^{-t\psi(\alpha)} = -t^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-t\psi} = t^{-1} E[p(t) e^{-\alpha p(t)}], \quad (7)$$

то функция

$$\psi'(\alpha) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_0^{+\infty} l e^{-\alpha l} P\{p(t) \in dl\} \quad (8)$$

является преобразованием Лапласа от неотрицательной меры $m(dl)$ на $[0, +\infty)$. Так как $\psi(0) = 0$, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \int_0^\alpha \psi'(\beta) d\beta = \int_0^\alpha d\beta \int_0^{+\infty} e^{-\beta l} m(dl) = \\ &= \alpha m(0) + \int_{+0}^{+\infty} [1 - e^{-\alpha l}] l^{-1} m(dl); \quad (9) \end{aligned}$$

иначе говоря,

$$\psi(\alpha) = \alpha m + \int_{+0}^{+\infty} [1 - e^{-\alpha l}] n(dl), \quad (10)$$

где $m = m(0)$, $dn = l^{-1} dm$ ($l > 0$), причем

$$\int_{+0}^{+\infty} (1 - e^{-l}) dn \leq \psi(1) < +\infty,$$

что нам и было нужно.

1) $pe^{-\alpha p}$ — ограниченная функция от p при $\alpha > 0$.

Перейдем к формуле (3). Если $p(dt \times dl)$ — пуассоновская мера со средним $dt \times n(dl)$, то

$$p(t) = tm + \int_{+0}^{+\infty} lp([0, t] \times dl) \quad (11)$$

— однородный процесс с независимыми приращениями. Кроме того,

$$\begin{aligned} E[e^{-\alpha p(t)}] &= e^{-\alpha tm} E\left[e^{-\alpha \int_{+0}^{+\infty} lp([0, t] \times dl)}\right] = \\ &= e^{-\alpha tm} \lim_{n \uparrow +\infty} E\left[e^{-\alpha \int_{+0}^{+\infty} 2^{-n} [2^n l] p([0, t] \times dl)}\right] = \\ &= e^{-\alpha tm} \lim_{n \uparrow +\infty} e^{-t \int_{+0}^{+\infty} (1 - e^{-\alpha 2^{-n} [2^n l]}) n(dl)} = \\ &= e^{-t \left[m\alpha + \int_{+0}^{+\infty} (1 - e^{-\alpha l}) n(dl) \right]}, \quad (12) \end{aligned}$$

откуда немедленно следует, что первоначальный процесс с независимыми приращениями и выражение (11) имеют одинаковые распределения, что и утверждалось.

Назовем $p(t): t \geq 0$ *односторонним устойчивым* процессом, если каждому $\alpha > 0$ соответствует такое $\beta = \beta(\alpha) > 0$, что процесс $\alpha p(t/\beta): t \geq 0$ совпадает по распределению с $p(t): t \geq 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} e^{-t\beta(\alpha\gamma)\psi(1)} &= E[e^{-p(\beta(\alpha\gamma)t)}] = E[e^{-\alpha\gamma p(t)}] = \\ &= E[e^{-\alpha p(t\beta(\gamma))}] = E[e^{-p(t\beta(\alpha)\beta(\gamma))}] = e^{-t\beta(\alpha)\beta(\gamma)\psi(1)}, \quad (13) \end{aligned}$$

т. е.

$$\beta(\alpha\gamma) = \beta(\alpha)\beta(\gamma). \quad (14)$$

Если $\psi(1) > 0$ (в противном случае $p \equiv 0$), то $\psi(\alpha)$ равно $\beta = \alpha^\varepsilon$, умноженному на константу $c = \psi(1)$; здесь $\varepsilon > 0$, потому что $\psi \in \uparrow$,

и $\varepsilon \leq 1$, так как $\psi' = m + \int_{+0}^{+\infty} le^{-\alpha l} dn \in \downarrow$. Число ε есть *показатель*

устойчивого процесса; постоянная c есть его *скорость*. Если $\varepsilon = 1$,

то $p = ct$; если $\varepsilon < 1$, то $p = \int_{+0}^{+\infty} lp([0, t] + dl)$, а $n(dl) = \frac{c\varepsilon dl}{\Gamma(1-\varepsilon)e^{1+\varepsilon}} \cdot 1$.

¹⁾ См. более подробно об устойчивых процессах П. Леви [1: 198—204] и С. Бохнер [1].

1.8. Критерий Колмогорова и закон повторного логарифма

Если дано стандартное броуновское движение, начинающееся в 0, и положительная функция $h \in C(0, 1]$, то $\{w: x(t) < h(t), t \downarrow 0\}$ принадлежит \mathbf{B}_{+0} ; применяя блюменталевский закон 0—1, получаем, что $P_0\{x(t) < h(t), t \downarrow 0\} = 0$ или 1. Говорят, что функция h принадлежит *верхнему классу*, если эта вероятность равна 1; в противном случае говорят, что h принадлежит *нижнему классу*.

Знаменитый *локальный закон повторного логарифма* А. Хинчина [1: 91—94] утверждает, что $h(t) = (1 + \epsilon) \sqrt{2t \ln_2(1/t)}$ принадлежит *верхнему классу* при $\epsilon > 0$ и *нижнему* при $\epsilon < 0$; т. е.

$$P_0 \left\{ \lim_{t \downarrow 0} \frac{x(t)}{\sqrt{2t \ln_2(1/t)}} = 1 \right\} = 1, \quad (1)$$

как будет доказано ниже.

Критерий Колмогорова утверждает, что если $h \in \uparrow$, а $t^{-1/2}h \in \downarrow$ для малых $t > 0$, то h принадлежит *верхнему* или *нижнему классу*, смотря по тому, сходится или расходится $\int_{+0}^t t^{-3/2} h e^{-h^2/2t} dt$.

Закон (1) является частным случаем этого утверждения; другие примеры см. в задаче 2.

Доказательство Колмогорова не опубликовано, но имеется доказательство И. Петровского [1], основанное на применении подхода Перрона к задаче Дирихле (см. также П. Эрде́ш [1] и В. Феллер [2]).

Мы используем распределение момента первого достижения

$$P_0\{m_a \leq t\} = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-a^2/2s} ds, \quad a \geq 0 \quad (2)$$

[см. (1.8.2)], для обоснования более легкой части критерия Колмогорова: если $h \in \uparrow$ и $t^{-1/2}h \in \downarrow$ для малых t , то из сходимости интеграла $\int_{+0}^t t^{-3/2} h e^{-h^2/2t} dt$ вытекает $P_0\{x(t) < h(t), t \downarrow 0\} = 1$;

вторую половину мы докажем в § 4.12, используя изящный метод М. Мотоо [1].

¹⁾ $\ln_2 = \ln(\ln)$.

Пусть $0 < a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b \leq 1$, причем $h \in \uparrow$ при $t \leq b$; из рис. 1 ясно, что

$P_0 \{x(t) \geq h(t) \text{ для некоторого } a \leq t \leq b\} \leq$

$$\leq P_0 \{m_{h(a)} \leq a\} + \sum_{m \geq 2} P_0 \{t_{m-1} < m_{h(t_{m-1})} \leq t_m\} =$$

$$= \int_0^a \frac{h(a)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-h(a)^2/2t} dt + \sum_{m \geq 2} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{h(t_{m-1})}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-h(t_{m-1})^2/2t} dt. \quad (3)$$

Когда разбиение становится всюду плотным в $[a, b]$, это неравенство переходит в

$P_0 \{x(t) \geq h(t) \text{ для некоторого } a \leq t \leq b\} \leq$

$$\leq \int_0^{a/h(a)^2} \frac{e^{-1/2t} dt}{\sqrt{2\pi t^3}} + \int_a^b \frac{h(t)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-h(t)^2/2t} dt. \quad (4)$$

Так как $t^{-1/2}h \in \downarrow$ для малых t , то из сходимости $\int_0^+ t^{-3/2} h e^{-h^2/2t} dt$

вытекает, что $\lim_{t \downarrow 0} t^{-1/2}h = +\infty$, и, полагая $a \downarrow 0$ в (4), находим, что

$P_0 \{x(t) \geq h(t) \text{ для некоторого } 0 < t \leq b\} \leq$

$$\leq \int_0^b \frac{h}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-h^2/2t} dt. \quad (5)$$

Но эта верхняя оценка, убывая, стремится к 0 при $b \downarrow 0$, так что доказательство завершено.

Рассмотрим частный случай $h(t) = (1 + \varepsilon) \sqrt{2t \ln_2(1/t)}$ ($\varepsilon > 0$); здесь $h \in \uparrow$ для $t < e^{-1}$; $t^{-1/2}h \in \downarrow$ для $t \leq 1$; и $\int_0^+ t^{-3/2} h e^{-h^2/2t} dt < +\infty$, откуда

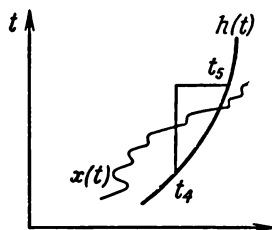
следует

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{x(t)}{\sqrt{2t \ln_2(1/t)}} \leq 1 \right\} = 1. \quad (6)$$

Для доказательства соотношения (1) остается провести следующее рассуждение.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Не будем учитывать исключительный класс броуновских траекторий, для которых $\overline{\lim}_{t \downarrow 0} x(t)/\sqrt{2t \ln_2(1/t)} > 1$; тогда если

$$A_n : x(\varepsilon^n) < (1 - 3\sqrt{\varepsilon}) \sqrt{2\varepsilon^n \ln_2 \varepsilon^{-n}}$$



Р и с. 1.

при $n \uparrow + \infty$, то

$$B_n : x(\varepsilon^n) - x(\varepsilon^{n+1}) < (1 - 3\sqrt{\varepsilon}) \sqrt{2\varepsilon^n \ln_2 \varepsilon^{-n}} + \\ + \frac{3}{2} \sqrt{2\varepsilon^{n+1} \ln_2 \varepsilon^{-n-1}} < (1 - \sqrt{\varepsilon}) \sqrt{2\varepsilon^n \ln_2 \varepsilon^{-n}}$$

при $n \uparrow + \infty$.

Но

$$1 - P_0(B_n) = \int_{\theta \sqrt{2 \ln_2 \varepsilon^{-n}}}^{\infty} \frac{e^{-b^2/2} db}{\sqrt{2\pi}} \sim \text{const} \frac{n^{-\theta/2}}{\sqrt{\ln n}}, \quad (7)$$

$$n \uparrow + \infty, \quad \theta = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \varepsilon}} < 1.$$

Используя независимость событий B_n ($n \geq 1$) и расходимость ряда $\sum_{n \geq 2} n^{-\theta/2} / \sqrt{\ln n}$, находим, что

$$P_0 \left[\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} A_m \right] \leq P_0 \left[\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} B_m \right] = \lim_{n \uparrow + \infty} P_0 \left[\bigcap_{m \geq n} B_m \right] = 0, \quad (8)$$

откуда следует, что

$$1 = P_0 \{x(\varepsilon^n) \geq (1 - 3\sqrt{\varepsilon}) \sqrt{2\varepsilon^n \ln_2 \varepsilon^{-n}} \text{ бесконечное число раз}$$

$$\text{при } n \uparrow + \infty\} \leq P_0 \left\{ \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{x(t)}{\sqrt{2t \ln_2(1/t)}} \geq 1 - 3\sqrt{\varepsilon} \right\}. \quad (9)$$

Отсюда, полагая $\varepsilon \downarrow 0$, немедленно получаем (1).

Задача 1. Доказать, что если h принадлежит верхнему классу, то

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1/2} h = +\infty.$$

$$\left[\lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{t^{-1/2} h} \frac{e^{-b^2/2} db}{\sqrt{2\pi}} = \lim_{t \downarrow 0} P_0 \{x(t) < h(t)\} = 1. \right]$$

Задача 2 (по П. Эрдёшу [1]). Использовать критерий Колмогорова, чтобы показать, что¹⁾

$$h(t) = \sqrt{2t \left[\ln_2 \frac{1}{t} + \frac{3}{2} \ln_3 \frac{1}{t} + \ln_4 \frac{1}{t} + \dots + \ln_{n-1} \frac{1}{t} + (1 + \varepsilon) \ln_n \frac{1}{t} \right]}$$

принадлежит верхнему или нижнему классу в зависимости от того,

¹⁾ $\ln_n = \ln(\ln_{n-1})$ ($n \geq 3$).

$\varepsilon > 0$ или $\varepsilon \leq 0$; показать также, что функция¹⁾

$$h(t) = \sqrt{2t \left[\ln_2 \frac{1}{t} + \frac{3}{2} \ln_3 \frac{1}{t} + \sum_{n \geq 4} \ln_n^+ \frac{1}{t} \right]}$$

принадлежит нижнему классу.

Задача 3. Используя критерий Колмогорова, доказать, что если функция $h \in C[1, +\infty)$ положительна, $t^{-1}h \in \downarrow$ и $t^{-1/2}h \in \uparrow$ для больших t , то $P_0\{x(t) < h(t), t \uparrow +\infty\} = 0$ или 1, смотря по тому,

$\int_{+\infty}^+ t^{-3/2} h e^{-h^2/2t} dt = +\infty$ или $< +\infty$. Хинчиновский глобальный закон повторного логарифма

$$P_0 \left\{ \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{x(t)}{\sqrt{2t \ln_2 t}} = 1 \right\} = 1$$

является частным случаем задачи 3; см. А. Хинчин [1].

[Используйте тот факт, что $[tx(1/t): t > 0, P_0]$ — стандартное броуновское движение, начинающееся в 0; см. задачу 1.4.3.]

1.9. Гёльдеровское условие П. Леви

Чжун Кай-лай, П. Эрдёш и Т. Сирао [1] показали, что если функция $h \in C(0, 1]$ положительна, $h \in \uparrow$ и $t^{-1/2}h \in \downarrow$ для малых t , то

$P_0 \left\{ \max_{\substack{t_2 - t_1 = \varepsilon \\ 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1}} |x(t_2) - x(t_1)| < h(\varepsilon), \varepsilon \downarrow 0 \right\} = 0$ или 1 в зависимости

от того, $\int_{+0}^+ t^{-7/2} h^3 e^{-h^2/2t} dt = +\infty$ или $< +\infty$. (1)

Например, если $h(t) = (1 + \delta) \sqrt{2t \ln(1/t)}$, то $h \in \uparrow$ при $t \leq e^{-1}$, $t^{-1/2}h \in \downarrow$ при $t \leq 1$, и

$$\begin{aligned} \int_{+0}^+ t^{-7/2} h^3 e^{-h^2/2t} dt &= \\ &= 2 \sqrt{2} (1 + \delta)^3 \int_{+0}^+ |\ln t|^{3/2} t^{(1+\delta)^2-2} dt \begin{cases} = +\infty, & \delta \leq 0; \\ < +\infty, & \delta > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

откуда вытекает гёльдеровское условие П. Леви

$$P_0 \left\{ \lim_{\substack{t_2 - t_1 = \varepsilon \downarrow 0 \\ 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1}} \frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{\sqrt{2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)}} = 1 \right\} = 1. \quad (3)$$

¹⁾ $\ln_1^+ t = \ln(t \vee 1)$, $\ln_n^+ t = \ln^+(\ln_{n-1}^+ t)$ ($n \geq 2$).

Доказательство формулы (3), данное Леви [1: 168—172], является своего рода образцом, и мы его здесь приведем.

Так как $1-s < e^{-s}$, то при $0 < \delta < 1$

$$\begin{aligned} P_0 \{ \max_{k \leq 2^n} [x(k2^{-n}) - x((k-1)2^{-n})] \leq (1-\delta) \sqrt{2 \cdot 2^{-n} \ln 2^n} \} = \\ = \left[1 - \int_{(1-\delta) \sqrt{2 \ln 2^n}}^{\infty} \frac{e^{-b^2/2} db}{\sqrt{2\pi}} \right]^{2^n} < \left[1 - \frac{2^{-n(1-\delta)^2}}{n} \right]^{2^n} < \\ < e^{-2^n 2^{-n} (1-\delta)^2 n-1} \downarrow 0, \quad n \uparrow +\infty; \quad (4) \end{aligned}$$

откуда при $\delta \downarrow 0$ получаем

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\substack{t_2-t_1=\varepsilon \downarrow 0 \\ 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1}} \frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{\sqrt{2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)}} \geq 1 \right\} = 1. \quad (5)$$

Для доказательства того, что

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\substack{t_2-t_1=\varepsilon \downarrow 0 \\ 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1}} \frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{\sqrt{2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)}} \leq 1 \right\} = 1, \quad (6)$$

рассмотрим функцию $h(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)}$ и число $0 < \delta < 1$. Используя оценку

$$\begin{aligned} P_0 \{ \max_{\substack{j=j_2-j_1 \leq 2^{n\delta} \\ 0 \leq j_1 < j_2 \leq 2^n}} h(j2^{-n})^{-1} |x(j_2 2^{-n}) - x(j_1 2^{-n})| \geq 1 + \delta \} \leq \\ \leq 2^{(1+\delta)n} \cdot 2 \int_{(1+\delta) \sqrt{2 \ln 2^n}}^{\infty} \frac{e^{-b^2/2} db}{\sqrt{2\pi}} < 2^{-\delta(1+\delta)n}, \quad n \uparrow +\infty, \quad (7) \end{aligned}$$

закключаем из первой леммы Бореля—Кантелли, что

$$|x(j_2 2^{-n}) - x(j_1 2^{-n})| < (1+\delta) h(j2^{-n}), \quad (8)$$

$$0 \leq j_1 < j_2 \leq 2^n, \quad j = j_2 - j_1 \leq 2^{n\delta}, \quad n \geq n(\omega).$$

В дальнейшем $n(\omega)$ для удобства выберем таким, чтобы при $n \geq n(\omega)$ было

$$2^{(n+1)\delta-1} > 2, \quad (9a)$$

$$2^{-n(1-\delta)} < e^{-1} \quad (9b)$$

и

$$\sum_{m \geq n} h(2^{-m}) = h(2^{-n}) \sum_{m \geq 1} \sqrt{2^{-m} \frac{\ln 2^{n+m}}{\ln 2^n}} < \delta h(2^{-(n+1)(1-\delta)}). \quad (9c)$$

Если $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, причем $\varepsilon = t_2 - t_1 < 2^{-n(w)(1-\delta)}$, выберем $n \geq n(w)$ так, чтобы $2^{-(n+1)(1-\delta)} \leq \varepsilon < 2^{-n(1-\delta)}$, и рассмотрим разложения

$$t_1 = j_1 2^{-n} - 2^{-n_1} - 2^{-n_2} - \dots, \quad n < n_1 < n_2 < \dots; \quad (10a)$$

$$t_2 = j_2 2^{-n} + 2^{-m_1} + 2^{-m_2} + \dots, \quad n < m_1 < m_2 < \dots \quad (10b)$$

Так как

$$j = j_2 - j_1 \geq 2^n \varepsilon - 2 \geq 2^n 2^{-(n+1)(1-\delta)} - 2 = 2^{(n+1)\delta-1} - 2 > 0$$

и

$$j \leq 2^n \varepsilon < 2^n 2^{-n(1-\delta)} = 2^{n\delta},$$

то из (8) получаем

$$\begin{aligned} |x(t_2) - x(t_1)| &\leq \\ &\leq |x(j_1 2^{-n}) - x(t_1)| + |x(t_2) - x(j_2 2^{-n})| + |x(j_2 2^{-n}) - x(j_1 2^{-n})| < \\ &< 2 \sum_{m \geq n} (1 + \delta) h(2^{-m}) + (1 + \delta) h(j_2 2^{-n}). \end{aligned} \quad (11)$$

Ввиду того что $h \in \uparrow$ при $t \leq \varepsilon \leq 2^{-n(1-\delta)} < e^{-1}$ [используем (9b)], из (9с) вытекает, что

$$\begin{aligned} |x(t_2) - x(t_1)| &< \\ &< 2(1 + \delta) \delta h(2^{-(n+1)(1-\delta)}) + (1 + \delta) h(j_2 2^{-n}) < \\ &< (1 + 4\delta) h(\varepsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

откуда получается (6), если положить $\delta \downarrow 0$.

Задача. Использовать критерий Чжуна—Эрдёша—Сирао, чтобы доказать, что если

$$h(t) = \sqrt{2t \left[\ln \frac{1}{t} + \frac{5}{2} \ln_2 \frac{1}{t} + \ln_3 \frac{1}{t} + \dots + \ln_{n-1} \frac{1}{t} + (1 + \delta) \ln_n \frac{1}{t} \right]},$$

то

$$P_0 \left\{ \max_{\substack{t_2 - t_1 = \varepsilon \\ 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1}} |x(t_2) - x(t_1)| < h(\varepsilon), \varepsilon \downarrow 0 \right\} = 0 \text{ или } 1 \text{ в зависимости}$$

от того, $\delta \leq 0$ или $\delta > 0$;

и вычислить эту вероятность также для

$$h(t) = \sqrt{2t \left[\ln \frac{1}{t} + \frac{5}{2} \ln_2 \frac{1}{t} + \sum_{n \geq 3} \ln_n^+ \frac{1}{t} \right]}.$$

[Ответ: 0]

1.10. Аппроксимация броуновского движения случайным блужданием

Пусть дана стандартная броуновская траектория $x(t)$, выходящая из 0, и целое число $l \geq 1$; введем моменты выхода

$$e_0 = 0, \quad e_n = \min \left\{ t: |x(t) - x(e_{n-1})| = \frac{1}{\sqrt{l}} \right\} \quad (n \geq 1) \quad (1)$$

и пусть

$$s_l(n) = \sqrt{l} x(e_n) \quad (n \geq 1). \quad (2)$$

Так как броуновская траектория начинает движение заново в каждый момент e , ясно, что $\{s_l(n) : n \geq 0, P_0\}$ — стандартное случайное блуждание.

Ф. Найт [1] доказал, что если $x_l(t) : t \leq 1$ — ломаная, соединяющая точки

$$t = \frac{k}{l}, \quad a = \frac{s_l(k)}{\sqrt{l}} \quad (k \leq l),$$

как это показано на рис. 1, то

$$P_0 \left\{ \lim_{l \uparrow +\infty} \max_{t \leq 1} |x_l(t) - x(t)| = 0 \right\} = 1. \quad (3)$$

Сейчас мы это докажем.

Пусть $(k-1)/l \leq t < k/l$ ($k \leq l$); применение гёльдеровского условия Леви дает для больших l

$$\begin{aligned} |x_l(t) - x(t)| &\leq \\ &\leq \left| x_l(t) - x_l\left(\frac{k}{l}\right) \right| + \left| x_l\left(\frac{k}{l}\right) - x\left(\frac{k}{l}\right) \right| + \left| x\left(\frac{k}{l}\right) - x(t) \right| \leq \\ &\leq |x(e_k) - x(e_{k-1})| + \left| x(e_k) - x\left(\frac{k}{l}\right) \right| + \left| x\left(\frac{k}{l}\right) - x(t) \right| < \\ &< l^{-1/2} + \text{const} \cdot \sqrt{\delta \ln \left(\frac{1}{\delta} \right)}, \quad \delta = \left| e_k - \frac{k}{l} \right|, \quad (4) \end{aligned}$$

если только, скажем, $e_l < 2$. Таким образом, достаточно доказать, что *запаздывание времени* $\max_{k \leq l} |e_k - k/l|$ мало, и применить лемму Бореля—Кантелли; например, было бы достаточно проверить, что вероятности

$$p_l \equiv P_0 \left\{ \max_{k \leq l} \left| e_k - \frac{k}{l} \right| > l^{-1/6} \right\}$$

образуют сходящийся ряд.

Но e_k есть сумма k независимых экземпляров e_1 , и (см. задачу 1.7.6)

$$E_0(e_1) = l^{-1}; \quad (5a)$$

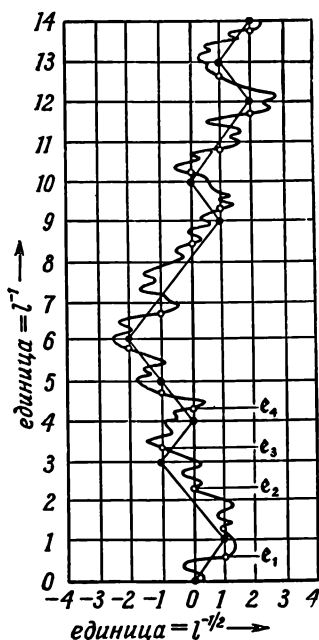
$$E_0(|e_1 - l^{-1}|^2) = \text{const} \cdot l^{-2}; \quad (5b)$$

$$E_0(|e_1 - l^{-1}|^4) = \text{const} \cdot l^{-4}. \quad (5c)$$

Согласно (5a), $e_k - k/l$ является мартингалом, так что $(e_k - k/l)^4$ — субмартингал, и дубовское неравенство для субмартингалов (см. замечание 2.5.1) дает нужную нам оценку

$$P_0\{\max_{k \leq l} |e_k - k/l| > l^{-1/6}\} \leq l^{4/6} E_0(|e_l - 1|^4) < l^{4/6} \cdot \text{const} \cdot l^{-2} = \text{const} \cdot l^{-6/6}. \quad (6)$$

Найт использовал свой метод для доказательства существования (но не гладкости) стандартных броуновских локальных времен (§ 2.8) и для изучения замены времени (§ 5.2).



Р и с. 1.

Из доказанного автоматически вытекает обобщение предельной теоремы Муавра—Лапласа, принадлежащее Донскеру [1]: если f — борелевская функция на пространстве непрерывных траек-

торий $x(t): t \leq 1$ и если она непрерывна в топологии равномерной сходимости всюду, за исключением множества броуновских траекторий вероятности 0, то

$$\lim_{n \uparrow +\infty} P_0 \left\{ a \leq f \left(\frac{s([nt])}{\sqrt{n}} : t \leq 1 \right) < b \right\} = \\ = P_0 \{ a \leq f(x(t) : t \leq 1) < b \}. \quad (7)$$

Здесь $[nt]$ — наибольшее целое число, не превосходящее nt , $s([nt])/\sqrt{n} : t \leq 1$ следует понимать как ломаную, проведенную через точки $(k/n, s(k)/\sqrt{n}) : k \leq n$, а P_0 относится к стандартному случайному блужданию в первом случае и к стандартному броуновскому движению во втором.

Задача 1. Использовать формулу (7) для того, чтобы дать новое доказательство результата задачи 1.3.1.

Задача 2. Используя формулу (7) и соотношение

$$P_0 \{ \text{mes} \{ t : x(t) > 0, t \leq 1 \} < \theta \} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

[см. (2.6.13)], доказать закон арксинуса для стандартного случайного блуждания

$$\lim_{n \uparrow +\infty} P_0 \left\{ \frac{1}{n} \# \{ k : s(k) > 0, k \leq n \} < \theta \right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\theta}$$

(см. Эрдёш и Кац [1], П. Леви [2] и формулу (2.6.17))¹⁾.

¹⁾ $\#(Q)$ означает число элементов в множестве Q .

БРОУНОВСКИЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА

2.1. Броуновское движение с отражением

Рассмотрим стандартное броуновское движение \mathbf{D} и введенный нами ранее связанный с ним дифференциальный оператор $\mathfrak{G} = D^2/2$, определенный на $D(\mathfrak{G}) = C^2(R^1)$ (см. § 1.4).

Рассмотрим также отраженную броуновскую траекторию

$$x^+(t) = |x(t)|, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{B}_t^+ = \mathbf{B}\{x^+(s): s \leq t\}$ — наименьшая под- σ -алгебра \mathbf{B} , содержащая все события $\{a \leq x^+(s) \leq b\}$ ($s \leq t$); пусть \mathbf{D}^+ — случайный процесс $[x^+(t): t \geq 0, \mathbf{B}, P_a: a \geq 0]$, и пусть \mathfrak{G}^+ — дифференциальный оператор \mathfrak{G} , определенный на области¹⁾

$$D(\mathfrak{G}^+) = C^2[0, +\infty) \cap \{u: u^+(0) = 0\}. \quad (2)$$

Введем фундаментальное решение

$$g^+(t, a, b) = g(t, -a, b) + g(t, +a, b), \quad t > 0, \quad a, b \geq 0, \quad (3)$$

уравнения $\partial u / \partial t = \mathfrak{G}^+ u$.

Если $t > s \geq 0$, то

$$\begin{aligned} P_a \{x^+(t) \in db \mid \mathbf{B}_s\} &= P_a \{x^+(t-s, \omega_s^+) \in db \mid \mathbf{B}_s\} = \\ &= P_{x(s)} \{x^+(t-s) \in db\} = g^+(t-s, x^+(s), b) db, \quad a, b \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя тот факт, что $\mathbf{B}_s^+ \subseteq \mathbf{B}_s$, находим, что \mathbf{D}^+ — марковский процесс.

\mathbf{D}^+ — броуновское движение с отражением; оно находится в том же отношении к оператору \mathfrak{G}^+ , в каком стандартное броуновское движение к \mathfrak{G} , т. е. фундаментальное решение g^+ уравнения $\partial u / \partial t = \mathfrak{G}^+ u$ является переходной плотностью процесса \mathbf{D}^+ , так же как фундаментальное решение g (гауссово ядро) уравнения $\partial u / \partial t = \mathfrak{G} u$ являлось переходной плотностью процесса \mathbf{D} .

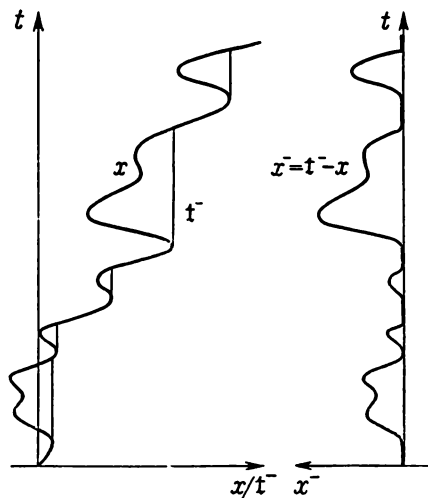
Пусть дана стандартная броуновская траектория, начинающаяся в $x(0) = a \geq 0$; введем теперь новые траектории (см. рис. 1)

$$x^-(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq m; \\ t - (t - x(t)), & t > m, \end{cases} \quad (5)$$

¹⁾ $u^+(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} [u(\varepsilon) - u(0)]$.

где $m = m_0 \equiv \min \{s: x(s) = 0\}$, а $t^-(t) = \max \{x(s): m \leq s \leq t\}$. Пусть $E_t^- = B\{x^-(s): s \leq t\}$, и обозначим через D^- процесс $[x^-(t): t \geq 0, B, P_a: a \geq 0]$.

Как мы сейчас докажем, D^- совпадает по распределению с броуновским движением с отражением¹⁾.



Р и с. 1.

Так как $x^-(t) = x^+(t)$ вплоть до марковского момента $t = m$, то достаточно проверить, что процессы $[x^-(t): t \geq 0, B, P_0]$ и $[x^+(t): t \geq 0, B, P_0]$ имеют одинаковые распределения.

Используя формулу²⁾

$$P_0\{x(t) \in da, t^-(t) \in db\} = \left(\frac{2}{\pi t^3}\right)^{1/2} (2b - a) e^{-(2b+a)^2/2t} da db, \quad t > 0, \quad a \leq b, \quad b \geq 0, \quad (6)$$

легко получаем, что для $t > s$, $\Delta = t - s$, $c \geq 0$

$$\begin{aligned} P_0\{x^-(t) \leq c | B_s\} &= P_0\{t^-(s) - x(t) \leq c, \max_{\theta \leq t-s} [x(\theta, \omega_s^+) - x(t)] \leq c | B_s\} = \\ &= P_0\{x^-(s) - [x(t) - x(s)] \leq c, \max_{\theta \leq t-s} [x(\theta, \omega_s^+) - x(s)] - \\ &\quad - [x(t) - x(s)] \leq c | B_s\} = \end{aligned}$$

¹⁾ П. Леви [3: 234].

²⁾ П. Леви [3: 211]; см. задачу 1.7.1.

$$\begin{aligned}
&= \int_{\substack{x^-(s)-a \leq c \\ b-a \leq c \\ -\infty < a \leq b \\ b \geq 0}} P_0 \{x(\Delta) \in da, t^-(\Delta) \in db\} = \\
&= \left(\int_0^{x^-(s)} db \int_{x^-(s)-c}^b da + \int_{x^-(s)}^{+\infty} db \int_{b-c}^b da \right) \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta^3}} (2b-a) e^{-(2b-a)/2\Delta} = \\
&= \left(2 \int_0^{x^-(s)} -2 \int_{-x^-(s)+c}^{x^-(s)+c} + 2 \int_{x^-(s)}^{+\infty} -2 \int_{x^-(s)+c}^{+\infty} \right) \frac{e^{-b^2/2\Delta}}{\sqrt{2\pi\Delta}} db = \\
&= \int_{|x^-(s)+b| \leq c} \frac{e^{-b^2/2\Delta}}{\sqrt{2\pi\Delta}} db = P_{x^-(s)} \{x^+(\Delta) \leq c\}; \quad (7)
\end{aligned}$$

а так как $B_s^- \subseteq B_s$, то отсюда вытекает искомым результат.

2.2. Локальное время Леви

Рассмотрим множество посещений $\mathcal{Z}^+ \equiv \{t: x^+(t) = 0\} = \mathcal{Z} \equiv \{t: x(t) = 0\}$. Топологически \mathcal{Z}^+ есть канторово множество, и оно имеет меру 0 (см. задачу 1.7.5).

П. Леви [3: 239—241] обнаружил, что можно ввести новую временную шкалу $t^+ = t^+(t)$ на \mathcal{Z}^+ , приписывающую ненулевую меру тому времени, которое броуновская частица проводит в 0; это t^+ и есть *локальное время*. П. Леви дал несколько различных определений t^+ [см. формулы (4), (5), (6), (7)]; из них последнее — самое прямое, но в то же время его труднее всего обосновать.

Рассмотрим траекторию $x^-(t)$: $t \geq 0$ и вспомним разложение момента первого достижения $m_a = \min \{t: x(t) = a\}$ ($a \geq 0$):

$$m_a = \int_0^{+\infty} l p([0, a) \times dl), \quad (1)$$

где $p(da \times dl)$ — пуассоновская мера со средним $da \times (2\pi l^3)^{-1/2} dl$ (см. § 1.7).

Так как $p([0, a) \times [l, +\infty))$ является процессом с независимыми приращениями по l , то из

$$E_0 [p([0, a) \times [\varepsilon, +\infty))] = a \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \varepsilon}} \quad (2)$$

и усиленного закона больших чисел вытекает, что

$$P \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{p([0, a) \times [\varepsilon, +\infty))}{\sqrt{2/\pi \varepsilon}} = a, a \geq 0 \right\} = 1. \quad (3)$$

Подставляя $t^-(t) = \max_{s \leq t} x(s)$ вместо a и учитывая, что разность между $p([0, t^-(t)) \times [\varepsilon, +\infty))$ и числом горизонтальных отрезков графика $t^-(s): s \leq t$, имеющих длину не меньше ε , не превосходит 1, получаем, что

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon}{2}} \times \text{число горизонтальных отрезков графика } t^-(s): s \leq t \text{ длины } \geq \varepsilon = t^-(t); t \geq 0 \right\} = 1^1). \quad (4)$$

Формула (4) показывает, что $t^- = t^-(t)$ является функцией от множества $\mathcal{Z}^- = \{t: x^-(t) = 0\}$; кроме того, ясно, что t^- возрастает на \mathcal{Z}^- , а вне этого множества идет горизонтально. Поскольку D^+ совпадает по распределению с D^- , существует соответствующая функция $t^+ = t^+(t)$ от $\mathcal{Z}^+ = \{t: x^+(t) = 0\}$, возрастающая на \mathcal{Z}^+ и горизонтальная вне этого множества.

t^+ есть локальное время; $\sqrt{2/\pi} t^+$ есть *mesure de voisinage* П. Леви [3: 228].

Так как t^+ и t^- совпадают по распределению, а горизонтальные отрезки графика t^+ — это (открытые) смежные интервалы \mathcal{Z}_n ($n \geq 1$) замкнутого множества \mathcal{Z}^+ , то из (4) ясно, что

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon}{2}} \times \text{число интервалов } \mathcal{Z}_n \subset [0, t] \text{ длины } \geq \varepsilon = t^+(t), t \geq 0 \right\} = 1^2). \quad (5)$$

Небольшая выкладка превращает (5) в

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}} \times \text{общую длину интервалов } \mathcal{Z}_n \subset [0, t] \text{ длины } < \varepsilon = t^+(t), t \geq 0 \right\} = 1^3); \quad (6)$$

таким образом, t^+ является функцией от тонкой структуры множества \mathcal{Z}^+ .

¹) П. Леви [3: 224—225].

²) П. Леви [3: 224—225].

³) П. Леви [3: 224—225]. $\sqrt{2\varepsilon/\pi} = E_0 \left[\int_0^\varepsilon I_p([0, 1) \times dl) \right]$ — математическое ожидание суммы скачков величины, не превосходящей ε , в разложении m_1 .

П. Леви [3: 239—241] также доказал, что

$$P_0 \{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \text{mes} \{s: x_s^+ \leq \varepsilon, s \leq t\} = t^+(t), t \geq 0 \} = 1. \quad (7)$$

Приведем его доказательство.

Если \mathcal{Z}^+ дано, то *экскурсии* $e_n \equiv \{x(t): t \in \mathcal{Z}_n\}$ независимы. Так как зависимость распределения величины e_n от интервала \mathcal{Z}_n выражается только в зависимости от его длины $|\mathcal{Z}_n|$ ¹⁾, то усиленный закон больших чисел указывает на то, что при $\varepsilon \downarrow 0$ соотношение

$$\text{mes} \{s: x_s^+ \leq \varepsilon, s \leq t\} = \sum_{n \geq 1} \text{mes} \{s: x_s^+ \leq \varepsilon, s \in \mathcal{Z}_n \cap [0, t)\} \quad (8a)$$

можно заменить на

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{Z}_n \subset [0, t)} E_0 [\text{mes} \{s: x_s^+ \leq \varepsilon, s \in \mathcal{Z}_n\} | \mathcal{Z}^+] &= \\ &= \sum_{\mathcal{Z}_n \subset [0, t)} |\mathcal{Z}_n| (1 - e^{-2\varepsilon^2/|\mathcal{Z}_n|}) = \\ &= \int_0^{+\infty} l (1 - e^{-2\varepsilon^2/l}) \mathfrak{p}([0, t^+(t)) \times dl) \quad (8b) \end{aligned}$$

Здесь $\mathfrak{p}(dt \times dl)$ — пуассоновская мера для обратной к t^+ функции (являющейся односторонним устойчивым процессом), причем $\mathfrak{p}([0, t^+(t)) \times [l, +\infty))$ с точностью до 1 есть число горизонтальных отрезков графика $t^+(s): s \leq t$, длина которых не меньше l . Теперь, используя (4), заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} l (1 - e^{-2\varepsilon^2/l}) \mathfrak{p}([0, t^+(t)) \times dl) &= \\ &= \int_0^{+\infty} \mathfrak{p}([0, t^+(t)) \times [l, +\infty)) d[l(1 - e^{-2\varepsilon^2/l})] \sim \\ &\sim \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi l}} t^+(t) d[l(1 - e^{-2\varepsilon^2/l})] = 2\varepsilon t^+(t) \quad (9) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \downarrow 0$.

Трудность этого доказательства состоит в переходе от (8a) к (8b); хотя смысл ясен, дать полное обоснование этого перехода нам не удалось (см., однако, результаты Э. Бойлана, Ф. Найта,

¹⁾ П. Леви [3: 233—236]; см. также § 2.9.

²⁾ П. Леви [3: 238].

Д. Б. Рэя и Г. Троттера в § 2.8, которые включают (7) как частный случай).

Задача 1. Доказать, что

$$t^+(t_2) > t^+(t_1), \quad (t_1, t_2) \cap \mathcal{Z}^+ \neq \emptyset, \quad 0 \leq t_1 < t_2,$$

для почти всех броуновских траекторий.

[Так как t^+ совпадает по распределению с t^- , то $P_0\{t^+(t) > 0, t > 0\} = 1$, и если бы утверждение было ложно, то $\varepsilon \equiv P_0\{t^+(t_2) = t^+(t_1), (t_1, t_2) \cap \mathcal{Z}^+ \neq \emptyset\}$ было бы больше 0 для каких-то $t_1 < t_2$. Но $\varepsilon = P_0\{t^+(t_2 - m, \omega_m^+) = 0, m = t_1 + m_0(\omega_{t_1}^+) < t_2\} = 0$.]

Задача 2. Доказать, что для почти всех броуновских траекторий, начинающихся в 0, $x(s): s \leq t$ ни при каком $t > 0$ не может касаться прямой $l = t^-(t)$ более двух раз.

[Из того, что $x(s) = t^-(t)$ в три различных момента $s \leq t$, вытекает, что функция t постоянна в каком-то открытом интервале, пересекающемся с \mathcal{Z}^- . Далее используйте результат задачи 1 и тот факт, что t^- — локальное время на \mathcal{Z}^- .]

Задача 3. Использовать результат задачи 1.7.1 для вывода совместного распределения

$$P_0\{x^+(t) \in da, t^+(t) \in db\} = 2 \frac{a+b}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(b+a)^2/2t} da db, \quad a, b \geq 0.$$

Задача 4. Используя тот факт, что t^+ и t^- совпадают по распределению, доказать, что размерность Хаусдорфа — Безиковича множества \mathcal{Z}^+ почти для всех траекторий не меньше $1/2$ (определение размерности Хаусдорфа — Безиковича см. в замечании 2.5.2).

[Поскольку t^- удовлетворяет гёльдеровскому условию

$$t^-(t_2) - t^-(t_1) < \sqrt{3\varepsilon |\ln \varepsilon|}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1, \quad \varepsilon = t_2 - t_1 \downarrow 0$$

(см. § 1.9), то если $[nt_1, nt_2]: n \geq 1$ — замкнутое покрытие множества $\mathcal{Z}^+ \cap [0, 1]$ и каждое $nt_2 - nt_1$ достаточно мало, то

$$t^+(1) < \sum_{n \geq 1} [t^+(nt_2) - t^+(nt_1)] < \sum_{n \geq 1} \sqrt{3(nt_2 - nt_1) |\ln(nt_2 - nt_1)|}.$$

Далее используйте определение размерности и тот факт, что $P_0\{t^+(1) > 0\} = 1$.]

А. С. Безикович и С. Дж. Тейлор [1] доказали, что $\dim(\mathcal{Z}^+) \leq 1/2$; в другом месте С. Дж. Тейлор [1] доказал, что $\dim(\mathcal{Z}^+) \geq 1/2$ (доказательство того, что $\dim(\mathcal{Z}^+) \leq 1/2$, см. в § 2.5; см. также задачу 2.8.2).

2.3. Броуновское движение с эластичным экраном

Пусть дано $\gamma > 0$; используем броуновское локальное время t^+ из § 2.2 для того, чтобы построить броуновское движение с эластичным экраном, связанное с дифференциальным оператором

$$\mathfrak{G}^* = \frac{1}{2} D^2,$$

действующим на множестве

$$D(\mathfrak{G}^*) = C^2[0, +\infty) \cap \{u: \gamma u(0) = u^+(0)\}^1).$$

Рассмотрим для этого расширенное выборочное пространство $W \times [0, +\infty)$, состоящее из точек (w, m_∞) , и соответствующую σ -алгебру $B \times B[0, +\infty)$ и продолжим P на $B \times B[0, +\infty)$ по правилу

$$P\{m_\infty > t \mid B\} = e^{-\gamma t^+(t)} \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Присоединив к $[0, +\infty)$ добавочную точку ∞ , положим по определению

$$P_\infty\{m_\infty = 0\} = 1 \quad (2)$$

и введем случайный процесс D^* с траекториями

$$x^*(t) = \begin{cases} x^+(t) & (t < m_\infty); \\ \infty & (t \geq m_\infty). \end{cases} \quad (3)$$

D^* — (простой) марковский процесс, как сейчас будет доказано; его переходная плотность

$$\begin{aligned} g^*(t, a, b) db &= P_a\{x^*(t) \in db\} = P_a\{x^+(t) \in db, t < m_\infty\} = \\ &= E_a\{x^+(t) \in db, e^{-\gamma t^+(t)}\} = E_a\{e^{-\gamma t^+(t)} \mid x^+(t) = b\} g^+(t, a, b) db, \\ &\quad t > 0, a, b \geq 0, \end{aligned}$$

является фундаментальным решением задачи распространения тепла

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}; \quad t > 0, b > 0; \quad (4a)$$

$$\gamma u(t, 0) = u^+(t, 0), \quad t > 0. \quad (4b)$$

Иначе говоря, D^* находится в том же отношении к \mathfrak{G}^* , как броуновское движение с отражением D^+ к \mathfrak{G}^+ .

D^* есть так называемое броуновское движение с эластичным экраном.

¹⁾ $u^+(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} [u(\varepsilon) - u(0)].$

Так как функция t^+ постоянна вне \mathcal{B}^+ и $P.\{m_\infty \in dt \mid \mathbf{B}, m_\infty > t\} = \gamma t^+(dt)$, то \mathbf{D}^* можно описать как броуновское движение с отражением, убиваемое в точке $b=0$ со скоростью $\gamma t^+(dt): dt$.

Докажем простое марковское свойство \mathbf{D}^* . Пусть e ($0 \leq e \leq 1$) — борелевская функция на пространстве траекторий: $t \rightarrow x(t) \in Q$ ($t \leq s$, $Q = [0, +\infty) \cup \infty$). Пусть e^+ — это e , вычисленное для траектории $x^+(t): t \leq s$, а e^* — это e , вычисленное для траектории $x^*(t): t \leq s$; тогда при $a, b \geq 0$ и $s \leq t$

$$\begin{aligned} E_a \{e^*, x^*(t) \in db\} &= \\ &= E_a \{e^+, x^+(t) \in db, t < m_\infty\} = E_a \{e^+, x^+(t) \in db, e^{-\gamma t^+(t)}\} = \\ &= E_a \{e^+, x^+(t-s, w_s^+) \in db, e^{-\gamma t^+(s)} e^{-\gamma t^+(t-s, w_s^+)}\} = \\ &= E_a \{e^+ e^{-\gamma t^+(s)} E_{x^+(s)} \{x^+(t-s) \in db, e^{-\gamma t^+(t-s)}\}\} = \\ &= E_a \{e^+ e^{-\gamma t^+(s)} P_{x^+(s)} \{x^*(t-s) \in db\}\} = \\ &= E_a \{e^+, s < m_\infty, P_{x^+(s)} \{x^*(t-s) \in db\}\} = \\ &= E_a \{e^* P_{x^*(s)} \{x^*(t-s) \in db\}\}^1 \end{aligned} \quad (5)$$

и доказательство завершено.

Теперь установим, что \mathbf{D}^* — броуновское движение с эластичным экраном. Для этого достаточно доказать, что

$$u = E. \left[\int_0^{m_\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] = E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\gamma t^+} f(x_t^+) dt \right], \quad (6)$$

$$\alpha > 0, f \in C(R^1),$$

является решением задачи

$$u \in D(\mathcal{G}^*) = C^2[0, +\infty) \cap \{u: \gamma u(0) = u^+(0)\}; \quad (7a)$$

$$(\alpha - \mathcal{G}^*) u = f, \quad (7b)$$

и обратить преобразование Лапласа.

Имеем ($m = m_0$):

$$\begin{aligned} u(a) &= E_a \left[\int_0^{m_0} e^{-\alpha t} f(x_t^+) dt \right] + \\ &+ E_a \left[e^{-\alpha m_0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\gamma t^+(t, w_m^+)} f[x^+(t, w_m^+)] dt \right] = \\ &= E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t^+) dt \right] - E_a \left[\int_{m_0}^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t^+) dt \right] + \end{aligned}$$

¹) $P_\infty \{x^*(t-s) \in db\} = 0$.

$$\begin{aligned}
& + E_a [e^{-\alpha m_0}] u(0) = E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t^+) dt \right] + \\
& + E_a [e^{-\alpha m_0}] \left(u(0) - E_0 \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t^+) dt \right] \right) = \\
& = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{2\alpha}|b-a|} + e^{-\sqrt{2\alpha}|b+a|}}{\sqrt{2\alpha}} f(b) db + \\
& + e^{-\sqrt{2\alpha}a} \left[u(0) - 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{2\alpha}b}}{\sqrt{2\alpha}} f(b) db \right], \quad (8)
\end{aligned}$$

откуда немедленно следует, что

$$\alpha u - \frac{1}{2} u'' = f. \quad (9)$$

Пользуясь формулой (8), можно найти выражение для $u^+(0)$. Так как $[x^-(t) = t^-(t) - x(t): t \geq 0, P_0]$ — броуновское движение с отражением, для которого локальным временем является t^- , то получаем:

$$\begin{aligned}
& -u^+(0) + 2 \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2\alpha}b} f(b) db = \sqrt{2\alpha} u(0) = \\
& = \sqrt{2\alpha} E_0 \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\gamma t^-(t)} f[t^-(t) - x(t)] dt \right] = \\
& = \sqrt{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \int_0^{+\infty} e^{-\gamma b} db \int_{-\infty}^b da \cdot 2 \cdot \frac{2b-a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(2b-a)^2/2t} f(b-a) = \\
& = \sqrt{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma b} db \int_{-\infty}^b da 2e^{-\sqrt{2\alpha}(2b-a)} f(b-a) = \\
& = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\gamma + \sqrt{2\alpha}} 2 \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2\alpha}b} f(b) db; \quad (10)
\end{aligned}$$

т. е.

$$u^+(0) = \frac{2\gamma}{\gamma + \sqrt{2\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2\alpha}b} f(b) db = \gamma u(0), \quad (11)$$

что нам и было нужно.

2.4. t^+ и пересечения сверху вниз

Пусть траектория броуновского движения с отражением x^+ до момента времени t пересекает $d_\varepsilon(t)$ раз полосу от $\varepsilon > 0$ до 0 в направлении сверху вниз. Проверим, что

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon d_\varepsilon(t) = t^+(t), t \geq 0 \right\} = 1. \quad (1)$$

Формула (1) была угадана Леви [6: 171]. При доказательстве мы будем предполагать, что

$$t^+(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \text{mes} \{s: x^+(s) < \varepsilon, s \leq t\} \quad (2)$$

(это упоминалось в § 2.2 и будет доказано в § 2.8).

Для доказательства рассмотрим последовательные возвращения $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ траектории x^+ в начало координат через точку $\varepsilon > 0$; т. е. пусть $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = m_\varepsilon + m_0(\omega_{m_\varepsilon}^+)$ и $\tau_n = \tau_{n-1} + \tau_1(\omega_{\tau_{n-1}}^+)$ ($n \geq 1$). Рассмотрим момент $m = m_1 + m_0(\omega_{m_1}^+)$ и заметим, что при $0 < \delta < \varepsilon < 1$

$$d_\delta(m) = \sum_{k \leq d_\varepsilon(m)} d_\delta(\tau_1(\omega_{\tau_{k-1}}^+), \omega_{\tau_{k-1}}^+), \quad (3)$$

причем слагаемые независимы, одинаково распределены и независимы от $d_\varepsilon(m)$. Учитывая эту независимость и то, что

$$P_0 \{d_\delta(\tau_1) = n\} = \left(1 - \frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{n-1} \frac{\delta}{\varepsilon} \quad (n \geq 1), \quad (4)$$

получаем

$$\begin{aligned} E_0[\delta d_\delta(m) | d_\varepsilon(m)] &= \delta d_\varepsilon(m) E_0[d_\delta(\tau_1)] = \\ &= \delta d_\varepsilon(m) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{n-1} \frac{\delta}{\varepsilon} = \varepsilon d_\varepsilon(m), \end{aligned} \quad (5)$$

т. е. $[\varepsilon d_\varepsilon(m): \varepsilon < 1, P_0]$ — положительный обратный мартингал¹⁾. Так как

$$E_0[\varepsilon d_\varepsilon(m)] = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} n (1 - \varepsilon)^{n-1} \varepsilon = 1, \quad (6)$$

то из теоремы Дуба о сходимости мартингалов (см. замечание 2.5.1) следует, что существует $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon d_\varepsilon(m)$.

¹⁾ Строго говоря, для того чтобы проверить, что $\varepsilon d_\varepsilon(m)$ — мартингал, недостаточно доказательства формулы (5), а нужно доказать, что

$$E_0[\delta d_\delta(m) | d_{\varepsilon_1}(m), d_{\varepsilon_2}(m), \dots, d_{\varepsilon_k}(m)] = \varepsilon_1 d_{\varepsilon_1}(m)$$

для любых $0 < \delta < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_k$. — Прим. ред.

Далее, с помощью формулы (2) этот предел идентифицируется с $t^+(\mathfrak{m})$.

Введя обозначение d_n вместо d_ε для $\varepsilon = 2^{-n}$, оценим разность $\Delta_n = 2^{n-1} \text{mes} \{s: x^+(s) < 2^{-n}, s < \mathfrak{m}\} - 2^{-n} d_n(\mathfrak{m}) =$

$$= 2^{n-1} \sum_{k \leq d_n(\mathfrak{m})} [\text{mes} \{s: x^+ < 2^{-n}, r_{k-1} \leq s < r_k\} - 2^{-2^{n+1}}]. \quad (7)$$

Здесь слагаемые независимы, одинаково распределены и независимы от $d_n(\mathfrak{m})$; они имеют общее среднее¹⁾

$$\int_0^{+\infty} ds P_0 \{x^+(s) < 2^{-n}, s < r_1\} =$$

$$= E_0(\mathfrak{m}_{2^{-n}}^+) + \int_0^{+\infty} ds P_{2^{-n}} \{x(s) < 2^{-n}, s < \mathfrak{m}_0\} = 2 \cdot 2^{-2^n} \quad (8)$$

и общую дисперсию

$$E_0[(\text{mes} \{s: x^+(s) < 2^{-n}, s < r_1\} - 2^{-2^{n+1}})^2] = \text{const} \cdot 2^{-4^n}, \quad (9)$$

как показывает простое изменение масштаба $x^+(t) \rightarrow 2^{-n} x^+(2^{2^n} t)$. Поэтому

$$E_0(\Delta_n^2) = 2^{2n-2} E_0[(\text{mes} \{s: x^+(s) < 2^{-n}, s < r\} - 2^{-2^{n+1}})^2] \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{+\infty} m P_0 \{d_n(\mathfrak{m}) = m\} = 2^{2n-2} \cdot \text{const} \cdot 2^{-4^n} \sum_{m=1}^{+\infty} m (1 - 2^{-n})^{m-1} 2^{-n} <$$

$$< \text{const} \cdot 2^{-n}. \quad (10)$$

Учитывая эту оценку и формулу (2), получаем с помощью леммы Бореля — Кантелли, что $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon d_\varepsilon(\mathfrak{m}) = t^+(\mathfrak{m})$.

Теперь выберем $t \geq 0$; если $t < \mathfrak{m}$ и $r = \min \{s: x^+(s) = 0, s \geq t\}$, то

$$t^+(\mathfrak{m}) = t^+(t) + t^+(\mathfrak{m}(w_t^+), w_t^+); \quad (11a)$$

$$d_\varepsilon(\mathfrak{m}) = d_\varepsilon(t) + d_\varepsilon(\mathfrak{m}(w_t^+), w_t^+), \quad (11b)$$

причем в (11b) возможна ошибка не более 1. Если же $\mathfrak{m}_1 \leq t < \mathfrak{m}$, то $t^+(\mathfrak{m}) = t^+(t)$, $d_\varepsilon(\mathfrak{m}) = d_\varepsilon(t) + 1$. Таким образом,

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon d_\varepsilon(t) = t^+(t) \mid t < \mathfrak{m} \right\} = 1 \quad (t \geq 0). \quad (12)$$

¹⁾ См. задачи 1.7.6 и 1.7.7.

²⁾ \mathfrak{m}_a^+ обозначает момент первого достижения точки a броуновским движением с отражением.

Чтобы завершить доказательство формулы (1), достаточно рассмотреть d_ε и t^+ между последовательными моментами попадания траектории x^+ в 0 через 1 и использовать то, что d_ε — возрастающая функция от времени, а t^+ — и возрастающая, и непрерывная¹⁾.

2.5. t^+ как мера Хаусдорфа — Безиковича размерности $1/2$ ²⁾

Возможно, самое поразительное свойство локального времени $t^+(t)$ состоит в том, что если $\bigcup_{k \geq 1} {}_k\mathcal{Z}_n$ — покрытие

$${}_k\mathcal{Z}_n = [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}] \cap \mathcal{Z}^+, \quad k \geq 1, \quad (1)$$

множества \mathcal{Z}^+ и $|{}_k\mathcal{Z}_n|$ — диаметр множества ${}_k\mathcal{Z}_n$, то

$$P_0 \left\{ \lim_{n \uparrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k2^{-n} \leq t} |{}_k\mathcal{Z}_n|^{1/2} = t^+(t), \quad t \geq 0 \right\} = 1. \quad (2)$$

Поэтому t^+ подобно мере $\wedge^{1/2}$ Хаусдорфа — Безиковича размерности $1/2$; в частности,

$$P_0 \left\{ \wedge^{1/2}(\mathcal{Z} \cap [0, t]) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^+(t), \quad t \geq 0 \right\} = 1, \quad (3)$$

откуда вытекает, что размерность Хаусдорфа — Безиковича множества \mathcal{Z} не больше $1/2$. Используя задачу 2.2.4, получаем из этого, что размерность множества \mathcal{Z} не меньше $1/2$, а значит, равна $1/2$.

Пусть $t_2 \geq t_1 \geq 0$, положим $\mathfrak{z}_1(\mathfrak{z}_2) = \min(\max) \mathcal{Z} \cap [t_1, t_2]$ ³⁾; тогда, как будет доказано ниже,

$$\begin{aligned} E_0[t^+(t_2) - t^+(t_1) | x_s^+ : s \leq t_1; \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2; x_s^+ : s \geq t_2] = \\ = \begin{cases} 0, & \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2; \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1)}, & \mathfrak{z}_1 < \mathfrak{z}_2. \end{cases} \quad (4a) \end{aligned}$$

Поскольку

$$C_n = \mathbf{B} \{x^+(l2^{-n}), \min_l \mathcal{Z}_n, \max_l \mathcal{Z}_n, l \geq 1\}$$

— подалгебра алгебры

$$C_{kn} = \mathbf{B} \{x_s^+ : s \leq (k-1)2^{-n}; \min_k \mathcal{Z}_n, \max_k \mathcal{Z}_n; x_s^+ : s \geq k2^{-n}\},$$

то из (4a) вытекает равенство

$$E_0[t^+(k2^{-n}) - t^+((k-1)2^{-n}) | C_n] = \sqrt{\frac{\pi}{2} |{}_k\mathcal{Z}_n|}, \quad k \geq 1. \quad (4b)$$

¹⁾ Доказательство в оригинале содержит ошибку и при переводе изменено. — *Прим. перев.*

²⁾ См. определение $1/2$ -мерной хаусдорфовой меры в замечании 2.

³⁾ Если $\mathcal{Z} \cap [t_1, t_2] = \emptyset$, то $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2 = 0$.

Заметим, что при $n \uparrow +\infty$ σ -алгебра C_n , возрастая, стремится к $B^+ = B\{x^+_t: t \geq 0\}$. Поэтому из теоремы Дж. Л. Дуба о сходимости мартингалов (см. замечание 1) получаем, что для каждого отдельного $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k2^{-n} \leq t} |{}_k\mathfrak{z}_n|^{1/2} &= \sum_{k2^{-n} \leq t} E_0[t^+(k2^{-n}) - t^+((k-1)2^{-n}) | C_n] = \\ &= E_0[t^+([2^n t] 2^{-n}) | C_n] \rightarrow E_0[t^+(t) | B^+] = t^+(t), \quad n \uparrow +\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда немедленно вытекает формула (2), так как $\sum_{k2^{-n} \leq t} |{}_k\mathfrak{z}_n|^{1/2}$ и $t^+(t)$ — возрастающие функции от t и t^+ непрерывна.

Перейдем к доказательству соотношения (4а). Так как $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ и $t^+(t_2) - t^+(t_1) = t^+(t_2 - t_1, \omega^+_{t_1})$ все измеримы относительно $B\{x^+(s): t_1 \leq s \leq t_2\}$, то условное математическое ожидание, участвующее в (4а), является борелевской функцией только от $t_1 < \mathfrak{z}_1 = s_1 < \mathfrak{z}_2 = s_2 < t_2$, $x^+(t_1) = a$ и $x^+(t_2) = b$:

$$e = E_0\{t^+(t_2) - t^+(t_1) | x^+(t_1) = a, \quad \mathfrak{z}_1 = s_1, \quad \mathfrak{z}_2 = s_2, \quad x^+(t_2) = b\}. \quad (6)$$

Действительно, $t^+(t_2) - t^+(t_1) = t^+(t_2 - \mathfrak{z}_1, \omega^+_{\mathfrak{z}_1})$, а так как броуновская траектория начинает свое движение заново в момент $\mathfrak{z}_1 = t_1 + m_0(\omega^+_{t_1})$, то

$$e = E_0\{t^+(t_2 - s_1) | \mathfrak{z}_3 = s_2 - s_1, \quad x^+(t_2 - s_1) = b\}, \quad (7)$$

где

$$\mathfrak{z}_3 = \max\{s: s < t_2 - s_1, \quad x^+(s) = 0\}.$$

Теперь рассмотрим для $a, b \geq 0$ и $t > 0$ условное броуновское движение $D_{ab} = [x^+(s): s \leq t, P_{ab}(B) = P_a\{B | x^+(t) = b\}]$ и обратим его, т. е. рассмотрим обратное движение $D^*_{ab} = [x^+(t-s): s \leq t, P_{ab}]$. Исследуя условные распределения, легко устанавливаем тождественность D^*_{ab} и D_{ba} . Так как $t^+(t)$ одно и то же для обратного и прямого движений, то (7) превращается в

$$e = E_b\{t^+(t_2 - s_1) | m_0 = t_2 - s_2, \quad x^+(t_2 - s_1) = 0\}. \quad (8)$$

С помощью той же идеи, которая привела от (6) к (7), можно привести (8) к более простому виду

$$e = E_0\{t^+(s) | x^+(s) = 0, \quad s = s_2 - s_1 = \mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1\}, \quad (9)$$

что уже можно вычислить при помощи совместного распределения величин t^+ и x^+ (см. задачу 2.3.3):

$$e = \frac{2 \int_0^{+\infty} \frac{b^2 e^{-b^2/2s}}{\sqrt{2\pi s^3}} db}{2/\sqrt{2\pi s}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} (\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1)}. \quad (10)$$

Доказательство завершено, за исключением небольших пробелов технического характера, заполнить которые предлагается читателю.

Замечание 1. Субмартингалы. Рассмотрим неотрицательный субмартингал $e_n: n \geq 1$ относительно σ -алгебр $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$, т. е. пусть $0 \leq e_m$ измеримо относительно B_m , причем $E(e_m) < +\infty$ и $E(e_m | B_n) \geq e_n (m \geq n)$. Докажем теорему о сходимости мартингалов Дж. Л. Дуба [1: 286]: если $\gamma = \sup_{n \geq 1} E(e_n) < +\infty$, то

$$P\{\text{существует } e_\infty = \lim_{n \uparrow +\infty} e_n\} = 1 \text{ и } E(e_\infty) \leq \gamma.$$

Рассмотрим для доказательства $l > 0$; $n_1 = \min\{n: e_n = 0\}$; $n_2 = \min\{n: n > n_1, e_n \geq l\}$; $n_3 = \min\{n: n > n_2, e_n = 0\}$ и т. д. Пусть $\#$ означает число раз, когда $e_m: m < n$ пересекает снизу вверх полосу от 0 до l (т. е. пусть $\#$ — число целых чисел n_2, n_4, n_6, \dots , меньших n), и пусть $e = e_1 + \sum_{i=2}^n t_i (e_i - e_{i-1})$, где $t_i = 1$, если i лежит в $[0, n_1] \cup (n_2, n_3] \cup (n_4, n_5] \cup \dots$, и $t_i = 0$ в противном случае. Событие $\{t_i = 1\}$ состоит в том, что процесс $e_n: n < i$ не завершил свое текущее пересечение сверху вниз; это событие измеримо относительно B_{i-1} , так что

$$E(e) = E(e_1) + \sum_{i=2}^n E(t_i E(e_i - e_{i-1} | B_{i-1})) \geq 0. \quad (1)$$

Так как

$$e = \begin{cases} e_n, & n < n_1; \\ e_{n_1} = 0 \leq e_n, & n_1 \leq n < n_2; \\ e_{n_1} + e_n - e_{n_2} \leq e_n - l, & n_2 \leq n < n_3; \\ e_{n_1} + e_{n_3} - e_{n_2} = -e_{n_2} \leq e_n - l, & n_3 \leq n < n_4; \\ e_{n_1} + e_{n_3} - e_{n_2} + e_n - e_{n_4} \leq e_n - 2l, & n_4 \leq n < n_5; \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (2)$$

$$e \leq e_n - \# l,$$

то

$$lE(\#) \leq E(e_n). \quad (3)$$

Пусть $l_2 > l_1 \geq 0$; используя неравенство (3) для неотрицательного субмартингала $(e_n - l_1) \vee 0: n \geq 1$ вместо $e_n: n \geq 1$ и для $l_2 - l_1$ вместо l , находим, что если $\#$ — число пересечений снизу вверх процессом $e_m: m \leq n$ полосы от l_1 до l_2 , то

$$E(\#) \leq (l_2 - l_1)^{-1} E[(e_n - l_1) \vee 0] \leq (l_2 - l_1)^{-1} E(e_n). \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда $\gamma = \sup_{n \geq 1} E(e_n) (= \lim_{n \uparrow +\infty} E(e_n)) < +\infty$, и положим в (4) $n \uparrow +\infty$; тогда получается, что процесс $e_n: n \geq 1$ пересекает снизу вверх полосу от l_1 до l_2 только конечное число раз, а из этого вытекает существование $e_\infty = \lim_{n \uparrow +\infty} e_n$. То, что $E(e_\infty) \leq \gamma$, ясно.

Частный случай этого — результат П. Леви [1: 128—130]: если функция e неотрицательна и суммируема, $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$ и B — наименьшая σ -алгебра, содержащая $\bigcup_{n \geq 1} B_n$, то

$$\lim_{n \uparrow +\infty} E(e | B_n) = E(e | B). \quad (5)$$

Здесь $e_n = E(e | B_n)$: $n \geq 1$ — неотрицательный мартингал, так что существование $e_\infty = \lim_{n \uparrow +\infty} e_n$ ясно; и так как

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} E\{e_n, e_n \geq l\} &= \sup_{n \geq 1} E\{E(e | B_n), e_n \geq l\} = \sup_{n \geq 1} E\{e, e_n \geq l\} \leq \\ &\leq E\{e, \sup_{n \geq 1} e_n \geq l\} \downarrow 0, \quad l \uparrow +\infty, \end{aligned}$$

то

$$E(e, B) = \lim_{m \uparrow +\infty} E(e_m, B) = E(e_\infty, B), \quad B \in B_n, \quad n \geq 1, \quad (6)$$

что завершает отождествление e_∞ и $E(e | B)$.

Дубовское неравенство для субмартингалов [1: 280]

$$P\{\max_{k \leq n} e_k \geq l\} \leq l^{-1} E(e_n) \quad (7)$$

содержится как частный случай в формуле (3); но мы приведем прямое доказательство.

Рассмотрим событие A_k , состоящее в том, что $e_i < l$ ($i < k$), а $e_k \geq l$; тогда $A_k \in B_k$, $A_i \cap A_k = \emptyset$ ($i < k$) и

$$\begin{aligned} E(e_n) &\geq E(e_n, \bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n E(e_n, A_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n E(E(e_n | B_k), A_k) \geq \sum_{k=1}^n E(e_k, A_k) \geq \\ &\geq l \sum_{k=1}^n P(A_k) = l P\{\max_{k \leq n} e_k \geq l\}. \end{aligned}$$

Замечание 2. Хаусдорфова мера и размерность (см. Ф. Хаусдорф [1]). Если дана непрерывная функция $h(t) \in \uparrow (t \geq 0)$, причем $h(0) = 0$, то внешняя хаусдорфова h -мера борелевского множества

B на прямой определяется как

$$\Lambda(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{n \geq 1} \sum_{n \geq 1} h(l_n),$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ множества B замкнутыми интервалами длины $l_n = |A_n| < \varepsilon$ ($n \geq 1$).

Λ является внешней мерой по Каратеодори, но, вообще говоря, R^1 не представляется в виде суммы счетного числа борелевских множеств конечной меры.

Если $0 \leq \alpha \leq 1$, то мера Λ , связанная с $h(t) = t^\alpha$, — это мера Λ^α Хаусдорфа — Безиковича размерности α ; числа

$$\dim^-(B) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Lambda^0(B) < +\infty; \\ \sup \{\alpha: \Lambda^\alpha(B) = +\infty\}, & \text{если } \Lambda^0(B) = +\infty, \end{cases}$$

и

$$\dim^+(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Lambda^1(B) = +\infty, \\ \inf \{\alpha: \Lambda^\alpha(B) < +\infty\}, & \text{если } \Lambda^1(B) < +\infty, \end{cases}$$

совпадают, и их общее значение $\dim(B)$ есть *размерность Хаусдорфа — Безиковича* множества B . Мера Λ^1 — классическая мера Лебега.

Мера $\Lambda^{\ln 2 / \ln 3}$ особенно интересна: размерность стандартного канторова множества

$$K \equiv [0, 1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \setminus \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \setminus \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \setminus \dots$$

равна $\ln 2 / \ln 3$, и $\Lambda^{\ln 2 / \ln 3}(K \cap [0, t])$ есть канторова функция.

2.6. Формула Каца для функционалов от броуновского движения

Прежде чем можно будет доказать глубокие свойства броуновских локальных времен, нам понадобится новый метод вычисления вероятностей; он содержится в одной формуле Каца [1].

Пусть дана кусочно непрерывная функция $k \geq 0$. Рассмотрим аддитивный функционал от броуновского движения $\mathfrak{f}(t) = \mathfrak{f}(t, \omega) = \int_0^t k[x(s)] ds$; слово «аддитивный» означает, что выполнено правило сложения

$$\mathfrak{f}(t) = \mathfrak{f}(s) + \mathfrak{f}(t-s, \omega_s^+), \quad t \geq s. \quad (1)$$

Пусть \mathfrak{G}^* — дифференциальный оператор

$$(\mathfrak{G}^* u)(a) = \frac{1}{2} u''(a \pm 0) - k(a \pm 0) u(a), \quad (2a)$$

определенный на классе таких функций $u \in C(R^1)$, что

$$\frac{1}{2} [u'(b) - u'(a)] - \int_a^b ku \, d\xi = \int_a^b u' \, d\xi \quad (a < b) \quad (2b)$$

для некоторого $u^* (\equiv \mathfrak{G}^* u)$, принадлежащего $C(R^1)$.

Формула Каца утверждает, что для $\alpha > 0$ и $f \in C(R^1)$ функция

$$u = E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\mathfrak{I}(t)} f(x) \, dt \right]^1 \quad (3)$$

является (единственным) ограниченным решением уравнения

$$(\alpha - \mathfrak{G}^*) u = f. \quad (4)$$

Формула Каца наводит на мысль о том, что передача тепла с остыванием — то же самое, что броуновское движение с уничтожением частиц. В самом деле, если $k(b) \, ds$ — вероятность того, что частица будет убита в течение времени ds , дойдя в сохранности до точки $b = x(s)$, то вероятность того, что частица не исчезнет вплоть до момента $t \geq 0$, при условии фиксированной траектории $x(s)$: $s \leq t$, равна ²⁾

$$\prod_{s \leq t} [1 - k(x(s)) \, ds] = e^{-\mathfrak{I}(t)}. \quad (5)$$

Поэтому вероятность того, что частица дойдет в сохранности из a в db за время t , есть

$$g^*(t, a, b) \, db = E_a \{ e^{-\mathfrak{I}} \mid x(t) \in db \} = \\ = E_a \{ e^{-\mathfrak{I}(t)} \mid x(t) = b \} g(t, a, b) \, db. \quad (6)$$

В то же время, согласно формуле Каца, g^* — фундаментальное решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{G}^* u, \quad (7a)$$

$$u(+0, \cdot) = f, \quad (7b)$$

которая описывает передачу тепла с остыванием.

Перейдем к доказательству. Пусть u определяется формулой (3), а G_α — стандартный броуновский оператор Грина, введенный в § 1.4:

$$(G_\alpha f)(a) = \int_{R^1} \frac{e^{-\sqrt{2\alpha}|b-a|}}{\sqrt{2\alpha}} f(b) \, db; \quad (8)$$

¹⁾ $f(x)$ в таком интеграле означает $f[x(t)]$.

²⁾ Под $\prod_{s \leq t}$ подразумевается непрерывное произведение.

тогда

$$\begin{aligned}
 u - G_\alpha f &= E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (e^{-\mathfrak{f}} - 1) f(x) dt \right] = \\
 &= E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\mathfrak{f}(t-s, w_s^+)} \mathfrak{f}(ds) f(x) dt \right] = \\
 &= E. \left[\int_0^{+\infty} \mathfrak{f}(ds) \int_s^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\mathfrak{f}(t-s, w_s^+)} f(x) dt \right] = \\
 &= E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \mathfrak{f}(ds) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\mathfrak{f}(t, w_s^+)} f[x(t, w_s^+)] dt \right] = \\
 &= E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} k u(x) ds \right] = G_\alpha k u. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Перемена порядка интегрирования по времени в третьей и четвертой строках оправдывается тем, что

$$\int_0^t e^{-\mathfrak{f}(t-s, w_s^+)} d\mathfrak{f} \leq 1. \quad (10)$$

Используя равенство $(\alpha - \mathfrak{G})G_\alpha = 1$, выводим отсюда сразу, что u удовлетворяет уравнению (4); ограниченность u также ясна; а так как решение уравнения $\mathfrak{G}^*v = \alpha v$ выпукло вниз или вверх в зависимости от того, положительно оно или отрицательно, а значит, или тождественно равно 0, или неограничено, то u — единственное ограниченное решение уравнения (4).

Функции Грина являются классическим аппаратом для решения задач типа задачи (4); соответствующие факты приводятся ниже в форме, удобной для наших целей.

При $\alpha > 0$ уравнение $\mathfrak{G}^*g = \alpha g$ имеет два линейно независимых решения $0 < g_1 \in \uparrow$ и $0 < g_2 \in \downarrow$; их вронскиан $B = g_1'g_2 - g_1g_2'$ постоянен (> 0); функция Грина

$$G(a, b) = G(b, a) = B^{-1}g_1(a)g_2(b) \quad (a \leq b) \quad (11)$$

удовлетворяет условию $2\alpha \int G db \leq 1$, и $u = 2 \int G f db$ является ограниченным решением уравнения (4).

Приведем краткое доказательство.

Выберем в (3) такую функцию f , что $f(a) = 0$ ($a \leq b$) и $f(a) > 0$ ($a > b$), пусть $g_{ab} = E_a [e^{-\alpha m_b} (e^{-f(m_b)})]$ ($a < b$). Функция u удовлетворяет соотношению

$$u(a) = E_a \left[\int_{m_b}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-f} f(x) dt \right] = g_{ab} u(b) \quad (a < b). \quad (12)$$

Для величин g_{ab} имеет место правило умножения: при $a < \xi < b$

$$\begin{aligned} g_{a\xi} g_{\xi b} &= E_a [e^{-\alpha m} e^{-f(m)}] E_{\xi} [e^{-\alpha m_b} e^{-f(m_b)}] = \\ &= E_a (e^{-\alpha [m+m_b (w_m^+)]} e^{-[f(m)+f(m_b (w_m^+), w_m^+)]}) = \\ &= E_a [e^{-\alpha m_b} e^{-f(m_b)}] = g_{ab} \end{aligned} \quad (13)$$

(здесь $m = m_{\xi}$). Пользуясь этим правилом и учитывая, что $u(b) > 0$ и $(\alpha - \mathcal{G})u = f = 0$ ($a < b$), выводим из (12), что

$$g_1(a) = \lim_{b \uparrow +\infty} \frac{g_{ab}}{g_{0b}} \quad (14)$$

— положительное возрастающее решение уравнения $\mathcal{G}^* g = \alpha g$. Тот же метод можно использовать, чтобы построить положительное убывающее решение. Бронскиан B удовлетворяет соотношению

$$B \Big|_a^b = \int_a^b [g_2 \mathcal{G}^* g_1 - g_1 \mathcal{G}^* g_2] d\xi = 0 \quad (a < b), \quad (15)$$

поэтому он является константой (> 0). Далее,

$$\begin{aligned} 2\alpha B \int G db &= 2\alpha \left[g_2(a) \int_{-\infty}^a g_1 db + g_1(a) \int_a^{+\infty} g_2 db \right] = \\ &= 2 \left[g_2(a) \int_{-\infty}^a \mathcal{G}^* g_1 db + g_1(a) \int_a^{+\infty} \mathcal{G}^* g_2 db \right] \leq \\ &\leq g_2(a) \int_{-\infty}^a g_1'' db + g_1(a) \int_a^{+\infty} g_2'' db \leq B. \end{aligned} \quad (16)$$

Наконец, дифференцирование показывает, что $u = 2 \int G f db$ является ограниченным решением уравнения (4), что завершает доказательство.

Кац [1] использовал свою формулу для доказательства закона арксинуса П. Леви [2: 323]¹⁾ для стандартного броуновского движения

$$P_0\{\text{mes}\{s: x(s) \geq 0, s \leq t\} \leq \theta\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta/t} \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} = \\ = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\theta}{t}}, \quad \theta \leq t. \quad (17)$$

Рассмотрим аддитивный функционал $\mathfrak{k} = \text{mes}\{s: x(s) \geq 0, s \leq t\}$, связанный с характеристической функцией e_0 луча $[0, +\infty)$, и пусть $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G} - \beta e_0$. Из формулы Каца следует, что

$$u = E. \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\beta \mathfrak{k}} dt \right) \quad (18)$$

— ограниченное решение уравнения

$$(\alpha - \mathfrak{G}^*) u = 1; \quad (19)$$

поэтому

$$u(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \int_0^{+\infty} e^{-\beta s} P_0\{\mathfrak{k}(t) \in ds\} = \\ = 2B^{-1} \left[g_2(0) \int_{-\infty}^0 g_1 db + g_1(0) \int_0^{+\infty} g_2 db \right]. \quad (20)$$

Находим решения

$$g_1(b) = e^{\sqrt{2\alpha}b} \quad (b \leq 0), \quad (21a)$$

$$g_2(b) = e^{-\sqrt{2(\alpha+\beta)}b} \quad (b \geq 0); \quad (21b)$$

$$B = \sqrt{2\alpha} + \sqrt{2(\alpha+\beta)}; \quad (21c)$$

$$u(0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}. \quad (21d)$$

Формула (17) теперь немедленно следует из формул

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{\pi t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad (22a)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{e^{-\beta s}}{\sqrt{(t-s)s}} ds dt. \quad (22b)$$

¹⁾ См. другой закон арксинуса, также принадлежащий П. Леви, в задаче 1.7.3.

Имеется красивое применение формулы Каца к ВКБ-приближению¹⁾.

Если k стремится к $+\infty$ на концах прямой, то спектр оператора \mathfrak{G}^* на $L^2(R^1, db)$ состоит из простой последовательности собственных значений $0 > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots \downarrow -\infty$; и при простом дополнительном условии ВКБ-приближение утверждает, что

$$\sum_{\gamma_n > \gamma} 1 \sim (2\pi)^{-1} \times \text{площадь} \left\{ (a, b): \frac{a^2}{2} + k(b) < |\gamma| \right\} \quad (23)$$

при $\gamma \downarrow -\infty$. Идея Каца состоит в том, чтобы представить след $\sum_{n \geq 1} e^{\gamma_n t}$ в виде

$$\int_{R^1} E_0 \left\{ e^{-\int_0^t k[x(s)+l] ds} \mid x(t)=0 \right\} dl \times (2\pi t)^{-1/2} \quad (24)$$

и затем проверить, что это есть $(2\pi t)^{-1/2} \int_{R^1} e^{-th(l)} dl$ при $t \rightarrow 0$ (полное доказательство и другие приложения см. Кац [1]).

Задача 1. Проверить соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt E_0 \{ e^{-\beta \text{mes} \{s: x(s) \geq 0, s \leq t\}} \mid x(t)=0 \} \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} = \\ = \frac{2}{\sqrt{2\alpha} + \sqrt{2(\alpha + \beta)}}, \quad \alpha, \beta > 0, \end{aligned}$$

и использовать его для того, чтобы доказать закон П. Леви [2: 323]

$$\begin{aligned} P_0 \{ a \leq t^{-1} \text{mes} \{s: x(s) \geq 0, s \leq t\} < b \mid x(t)=0 \} = b - a, \\ t > 0, \quad 0 \leq a < b \leq 1. \end{aligned}$$

$[2 \sqrt{2\alpha} + \sqrt{2(\alpha + \beta)}]^{-1}$ — функция Грина уравнения (19), вычисленная при $a = b = 0$; далее обратите преобразования Лапласа.]

Задача 2. Доказать, что

$$E_0 [e^{-\beta \text{mes} \{s: x(s) \geq 0, s \leq m_1\}}] = \frac{1}{\text{ch} \sqrt{2\beta}} \quad (\beta > 0).$$

[Используйте аддитивные функционалы e_0 и e_1 , соответствующие характеристическим функциям e_0 и e_1 лучей $[0, +\infty)$ и $[1, +\infty)$;

¹⁾ ВКБ-приближение — приближенный математический метод, связывающий классическую механику с квантовой. При выводе формул этого метода пользуются асимптотическими представлениями решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной. — *Прим. перев.*

положите

$$u = E_* \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t + \beta e_0 - \gamma e_1} e_0(x(t)) dt \right] \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$$

и заметьте, что

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \lim_{\gamma \uparrow +\infty} u(0) = E_0 \left[\int_0^{m_1} e^{-\beta e_0} e_0(x(t)) dt \right] = \beta^{-1} [1 - E_0(e^{-\beta e_0(m_1)})].$$

Из формулы Каца следует, что $u(0)$ можно представить в виде

$$2g_1(0)B^{-1} \int_0^{+\infty} g_2 db \quad (\mathcal{G}^*g = \alpha g, \mathcal{G}^* = \mathcal{G} - \beta e_0 - \gamma e_1).$$

Далее получите следующие формулы:

$$g_1(b) = e^{\sqrt{2\alpha}b} \quad (b \leq 0);$$

$$g_2(b) = \begin{cases} e^{-\sqrt{2(\sigma+\gamma)}b} & (b \geq 1, \sigma \equiv \alpha + \beta), \\ \text{ch } \sqrt{2\sigma}(1-b) + \sqrt{\frac{\sigma+\gamma}{\sigma}} \text{sh } \sqrt{2\sigma}(1-b) & (0 \leq b < 1); \end{cases}$$

$$B = [\sqrt{2\alpha} + \sqrt{2(\sigma+\gamma)}] \text{ch } \sqrt{2\sigma} + \left[\sqrt{2\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{\sigma}\right) + \sqrt{2\sigma} \right] \text{sh } \sqrt{2\sigma};$$

$$B \frac{u(0)}{2} = \frac{\text{sh } \sqrt{2\sigma}}{\sqrt{2\sigma}} + \sqrt{\frac{\sigma+\gamma}{\sigma}} \frac{\text{ch } \sqrt{2\sigma} - 1}{\sqrt{2\sigma}} + \frac{e^{-\sqrt{2(\sigma+\gamma)}}}{\sqrt{2(\sigma+\gamma)}}.]$$

2.7. Бесселевские процессы

Чтобы лучше понять броуновские локальные времена (см. § 2.8) и броуновские экскурсии (см. § 2.9 и 2.10), мы предварительно изучим так называемый бесселевский процесс.

Рассмотрим стандартное d -мерное броуновское движение $D = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)): t \geq 0, P_*\}$, где координаты траектории представляют собой независимые стандартные одномерные броуновские движения, а $P_*(B)$ — вероятность события B как функция начальной точки $x(0)$ d -мерной броуновской траектории.

Пусть $t > s$; если $B_s = B\{x(\theta): \theta \leq s\}$, то в силу независимости и марковского характера одномерных броуновских движений, являющихся отдельными координатами многомерного, имеем ($\alpha = x(s)$)

$$P_*\{x(t) \in db \mid B_s\} = P_\alpha\{x(t-s) \in db\} = \frac{e^{-|b-\alpha|^2/2(d-s)}}{(2\pi(t-s))^{d/2}} db, \quad (1)$$

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_d), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_d),$$

$$|b-a| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + \dots + (b_d-a_d)^2},$$

$$db = db_1 db_2 \dots db_d.$$

Так как d -мерное гауссово ядро $g(t, a, b) = (2\pi t)^{-(d/2)} e^{-|b-a|^2/2t}$ является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{G}u, \quad \mathcal{G} = \frac{1}{2} \Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial b_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial b_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial b_d^2} \right),$$

то D — простой марковский процесс, находящийся в таком же отношении к $\mathcal{G} = \Delta/2$, как в одномерном случае (см. § 1.4; еще о d -мерном броуновском движении см. гл. 7).

Перейдем к бесселевскому процессу $D^+ = \{r(t) = |x(t)| : t \geq 0, P.\}$ (в случае $d=1$ — это броуновское движение с отражением). Из формулы (1) ясно, что при $t > s$ имеем ($a = r(s)$)

$$P.\{r(t) < b | B_s\} = P_a\{r(t-s) < b\} = \int_{|b| < b} \frac{e^{-|b-a|^2/2(t-s)}}{(2\pi(t-s))^{d/2}} db; \quad (2)$$

это функция только от $r(s) = |x(s)|$. Замечая, что алгебра $R_s \equiv B\{r(\theta) : \theta \leq s\}$ содержится B_s , получаем

$$P.\{r(t) \in db | R_s\} = P_a\{r(t-s) \in db\} =$$

$$= g^+(t-s, a, b) db, \quad a = r(s) = |a|. \quad (3)$$

Здесь

$$g^+(t, a, b) = \int_{S^{d-1}} (2\pi t)^{-d/2} e^{-|b^0 - a(1, 0, \dots, 0)|^2/2t} do b^{d-1} 1) =$$

$$= (2\pi t)^{-d/2} e^{-(a^2+b^2)/2t} \int_{S^{d-1}} e^{-(ab/t) \cos \theta} do b^{d-1} 2) =$$

$$= t^{-1} e^{-(a^2+b^2)/2t} (ab)^{1-d/2} I_{d/2-1} \left(\frac{ab}{t} \right) b^{d-1} 3), \quad t > 0, a, b > 0, \quad (4)$$

— фундаментальное решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{d-1}{b} \frac{\partial u}{\partial b} \right), \quad b > 0; \quad (5a)$$

$$\lim_{b \downarrow 0} b^{d-1} \frac{\partial u}{\partial b} = 0 \quad (5b)$$

(см. задачу 1). Говоря коротко, бесселевское движение — это марковский процесс, находящийся в том же отношении к бесселев-

1) $o \in S^{d-1}$, единичной сфере; do — элемент поверхности на S^{d-1} .

2) θ — угол между o и $(1, 0, \dots, 0)$.

3) $I_{d/2-1}$ — обычная видоизмененная бесселева функция.

скому оператору

$$\mathfrak{U}^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{db^2} + \frac{d-1}{b} \frac{d}{db} \right) = \text{радиальная часть оператора } \mathfrak{U} = \left(\frac{1}{2} \right) \Delta, \quad (6a)$$

определенному на области

$$D(\mathfrak{U}^+) = C[0, +\infty) \cap \{u: \mathfrak{U}^+u \in C[0, +\infty), \lim_{b \downarrow 0} b^{d-1}u'(b) = 0\}, \quad (6b)$$

как в одномерном случае (см. § 2.1)¹⁾.

Формула (6a) наводит на мысль, что d -мерный бесселевский процесс r — это стандартное броуновское движение b , подвергнутое сносу со скоростью $(d-1)/2r$, т. е. что он должен быть реше-

нием уравнения $r(t) = b(t) + \frac{d-1}{2} \int_0^t ds/r(s)$. Это верно для $d \geq 2$

(доказательство и добавочную информацию см. Г. П. Маккин [3]);

это также верно для $d=1$, если вместо $\frac{d-1}{2} \int_0^t ds/r(s)$ взять

$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \text{mes} \{s: r(s) < \varepsilon, s \leq t\}$ (см. Г. П. Маккин [6]).

Локальный закон повторного логарифма А. Я. Хинчина

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\delta \downarrow 0} \frac{|\xi(\delta)|}{\sqrt{2\delta \ln 1/\delta}} = 1 \right\} = 1 \quad (7a)$$

(см. § 1.8) и гёльдеровское условие П. Леви

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\substack{|t-s|=\delta \downarrow 0 \\ s < t \leq 1}} \frac{|\xi(t) - \xi(s)|}{\sqrt{2\delta \ln 1/\delta}} = 1 \right\} = 1 \quad (7b)$$

(см. § 1.9) также выполнены для d -мерного броуновского движения. Это можно легко доказать, используя тот факт, что проекция d -мерного движения на прямую в R^d есть стандартное одномерное броуновское движение, и очевидную оценку $|\mathfrak{x}| = \sup_{n \geq 1} |\langle \mathfrak{x}, e_n \rangle|$,

где $\mathfrak{x} \in R^d$, а $e_n (n \geq 1)$ — счетное всюду плотное множество на поверхности единичного шара. Поскольку распределение наибольших изменений в $\mathfrak{x}(t)$ ($t \leq 1$) изотропно по направлению, те же законы выполняются также и для бесселевского процесса:

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\delta \downarrow 0} \frac{|r(t+\delta) - r(t)|}{\sqrt{2\delta \ln 1/\delta}} = 1 \right\} = 1 \quad (t \geq 0); \quad (8a)$$

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\substack{|t-s|=\delta \downarrow 0 \\ s < t \leq 1}} \frac{|r(t) - r(s)|}{\sqrt{2\delta \ln 1/\delta}} = 1 \right\} = 1. \quad (8b)$$

¹⁾ $\lim_{b \downarrow 0} b^{d-1}u'(b) = 0$ выполнено автоматически при $d \geq 2$; см. § 4.6.

Цель наших следующих рассуждений — показать, что траектория d -мерного ($d \geq 2$) бесселевского процесса не достигает точки $r = 0$ при положительном t :

$$P_0\{r(t) > 0, t > 0\} = 1; \quad (9)$$

достаточно рассмотреть двумерный случай.

Для доказательства рассмотрим два круга $|a| = a$ и $|b| = b > a$ с центрами в 0, возьмем точку x в кольце между ними ($a < |x| < b$), опишем около нее маленький кружок $|y - x| = c$, содержащийся в кольце, и пусть ϵ — момент $\min\{t: |x(t) - x| = c\}$ выхода из этого кружка для броуновской траектории, начинающейся в точке $x(0) = x$. Так как вероятность $P_x\{x(\epsilon) \in dy\}$ не меняется при вращениях вокруг точки x , это должно быть равномерное распределение do на окружности $|y - x| = c$, а так как броуновская частица начинает движение заново в момент ϵ , то функция радиуса

$$p(|x|) = P_x\{m_a < m_b\}, \quad (10)$$

$$m_r = \min\{t: |x(t)| = r\} = \min\{t: r(t) = r\}$$

удовлетворяет соотношению

$$p(|x|) = P_x\{m_a(w_\epsilon^+) < m_b(w_\epsilon^+)\} = \int p(|y|) do, \quad (11)$$

то есть эта функция является гармонической ($\Delta p = 0$) в кольце. Но приведенное выше рассуждение о проекциях показывает, что $p(a+0) = 1$ и $p(b-0) = 0$; поэтому

$$p(r) = \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}, \quad a < r < b. \quad (12)$$

Формула (9) следует теперь из соотношений

$$\begin{aligned} P_x\{m_{+0} < +\infty\} &= \lim_{b \uparrow +\infty} \lim_{a \downarrow 0} P_x\{m_a < m_b\} = \\ &= \lim_{b \uparrow +\infty} \lim_{a \downarrow 0} \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} = 0 \quad (|x| = r > 0) \end{aligned} \quad (13)$$

(см. другие методы в задаче 3, а также в задаче 4.6.3).

Задача 1. Провести подробно вычисление $g^+(t, a, b)$ в (4) и дать прямое доказательство того, что $g^+(t, a, b)$ — фундаментальное решение задачи (5) (еще об этом круге вопросов см. Карлин и Макгрегор [5: 9—11] и задачу 4.11.2).

Задача 2. Дать полные доказательства законов (7) и (8), используя указания, данные в тексте.

Задача 3. Дать прямое доказательство формулы (9) для $d \geq 3$, аналогичное доказательству Дворецкого—Эрдёша—Какутани недифференцируемости одномерной броуновской траектории (см. задачу 1.4.7).

$$\begin{aligned} & \left[P_0 \{ \text{уравнение } r(t) = 0 \text{ имеет корень при некотором } 1 \leq t < 2 \} \leq \right. \\ & \leq P_0 \left(\bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \bigcup_{n \leq k < 2n} \bigcap_{i \leq d} \left\{ \left| x_i \left(\frac{k}{n} \right) \right| < \sqrt{\frac{3}{n} \ln n} \right\} \right) \leq \\ & \leq \lim_{n \uparrow +\infty} n \left(\frac{3}{n\pi} \ln n \right)^{d/2} = 0. \end{aligned}$$

2.8. Стандартное броуновское локальное время

Пусть даны стандартное броуновское движение x и точка $a \in R^1$; пусть x_a^+ — броуновское движение с отражением $x_a^+(t) = |x(t) - a|$, пусть t_a^+ — соответствующее локальное время, и пусть $t(t, a) \equiv t(t, a, \omega)$ — стандартное броуновское локальное время в точке a :

$$t(t, a) = \begin{cases} 0, & t < m_a; \\ \frac{1}{2} t_a^+(t - m_a, \omega_{m_a}^+), & t \geq m_a. \end{cases} \quad (1)$$

Функция $t(t, a)$ для каждого отдельного a — неотрицательная, непрерывная, возрастающая и постоянная вне множества посещений $\mathcal{S}_a = \{t: x = a\}$.

Как будет показано ниже, функция t может быть изменена так, что она станет непрерывной по паре $(t, a) \in [0, +\infty) \times R^1$, и для этой измененной функции

$$t(t, a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{\text{mes} \{s: a \leq x(s) < b, s \leq t\}}{2(b-a)}, \quad t \geq 0, \quad a \in R^1; \quad (2a)$$

$$2 \int_a^b t(t, \xi) d\xi = \text{mes} \{s: a \leq x(s) < b, s \leq t\} \quad t \geq 0, \quad a < b; \quad (2b)$$

и

$$t(t, a) = t(s, a) + t(t-s, a, \omega_s^+), \quad s \leq t, \quad a \in R^1, \quad (2c)$$

для всех броуновских траекторий, за исключением множества меры 0. Сначала докажем предварительный результат в направлении формулы (2a):

$$\begin{aligned} P_0 \left\{ \left| \frac{\text{mes} \{s: a \leq x < b, s \leq t\}}{2(b-a)} - t(t, a) \right| > \delta \right\} & < \text{const} \cdot \frac{\varepsilon \sqrt{t}}{\delta^2}, \quad (3) \\ t & \geq 0, \quad \varepsilon = b - a, \quad a < b. \end{aligned}$$

Рассмотрим только случай $a=0$ (общий случай оставляется читателю в качестве упражнения); достаточно проверить оценку

$$D(t) = E_0 [|(2\varepsilon)^{-1} \text{mes}\{s: 0 \leq x < \varepsilon, s \leq t\} - t(t, 0)|^2] \leq \text{const} \cdot \varepsilon \sqrt{t} \quad (4)$$

и затем использовать неравенство Чебышева. Имеем:

$$E_0 [t(t, 0)^2] = \frac{1}{4} E_0 [t^-(t)^2] = \frac{t}{4} \equiv A; \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} (2\varepsilon)^{-2} E_0 [\text{mes}\{s: 0 \leq x < \varepsilon, s \leq t\}^2] &= \\ &= (2\varepsilon)^{-2} 2 \int_0^t ds \int_0^s d\sigma \int_0^\varepsilon da \int_0^\varepsilon db \frac{e^{-a^2/2\sigma}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{e^{-(b-a)^2/2(s-\sigma)}}{\sqrt{2\pi(s-\sigma)}} \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^t ds \int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma(s-\sigma)}} = \frac{t}{4} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma(1-\sigma)}} = \frac{t}{4} \equiv B; \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} 2(2\varepsilon)^{-1} E_0 [t(t, 0) \text{mes}\{s: 0 \leq x < \varepsilon, s \leq t\}] &= \\ &= \varepsilon^{-1} \int_0^t ds E_0 \{t_0^+(t), 0 \leq x(s) < \varepsilon\} = \varepsilon^{-1} \int_0^t ds E_0 \{t_0^+(s), 0 \leq x < \varepsilon\} + \\ &+ \varepsilon^{-1} \int_0^t ds E_0 (0 \leq x(s) < \varepsilon, E_{x(s)}(t_0^+(t-s))) = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_0^t ds \int_0^\varepsilon da \int_0^{+\infty} b db \frac{a+b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-(a+b)^2/2s + 1} \\ &+ \varepsilon^{-1} \int_0^t ds \int_0^\varepsilon \frac{e^{-a^2/2s}}{\sqrt{2\pi s}} da \int_0^{t-s} \frac{a}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} e^{-a^2/2\sigma} d\sigma \times \\ &\times 2 \int_0^{+\infty} b db \frac{e^{-b^2/2(t-s-\sigma)}}{\sqrt{2\pi(t-s-\sigma)}} \equiv C. \end{aligned} \quad (5c)$$

Дисперсия D ограничена сверху величиной $\Delta \equiv A + B - C$, причем Δ — возрастающая функция от t , что можно видеть из ее преобразования Лапласа

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \Delta dt = \frac{1}{4\varepsilon\alpha^2} \int_0^\varepsilon (1 - e^{-\sqrt{2\alpha}a})(2 + e^{-\sqrt{2\alpha}a}) da. \quad (6)$$

1) См. задачу 2.2.3.

Поэтому

$$D \leq \Delta \leq \frac{e}{t} \int_t^{+\infty} e^{-s/t} \Delta \, ds \leq 3e \sqrt{2t} \frac{e}{8}, \quad (7)$$

и доказательство закончено. Теперь мы можем отождествить $t(t, a)$ с

$$\lim_{\substack{b=a+2^{-n} \\ b \downarrow a}} 2^{n-1} \text{mes} \{s: a \leq x(s) < b, s \leq t\}.$$

Отсюда получаем (2b) сначала для каждого отдельного $t > 0$ и $a < b$, а затем для всех $t > 0$ и $a < b$ сразу, потому что интеграл $\int_a^b t(t, \xi) \, d\xi$ монотонен и мера $\text{mes} \{s: a \leq x < b, s \leq t\}$ монотонна и непрерывна по тройке $(t, a, b) \in [0, +\infty) \times R^2$. В частности, предполагая, что $t(t, \xi)$ — непрерывная функция от ξ , получаем отсюда (2a) и (2c), а также

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \text{mes} \{s: x^+ < \varepsilon, s \leq t\} = t^+(t), \quad t \geq 0 \right\} = 1, \quad (8)$$

что нам нужно для леммы о пересечениях сверху вниз из § 2.4 и для подтверждения формулы (2.2.7).

Г. Троттер [1] дал первое доказательство того, что функция $t(t, \xi)$ непрерывна на $[0, +\infty) \times R^1$. Используя формулу Каца, он получил

$$P_0 \left\{ \lim_{\substack{b-a=\delta \downarrow 0 \\ a < b}} \frac{|t(t, b) - t(t, a)|}{\sqrt{\delta \ln 1/\delta}} = 0, \quad t \geq 0 \right\} = 1 \quad (9a)$$

и

$$P_0 \left\{ \lim_{\substack{t-s=\delta \downarrow 0 \\ s < t \leq 1 \\ a \in R^1}} \frac{t(t, a) - t(s, a)}{\sqrt{\delta (\ln 1/\delta)^2}} = 0 \right\} = 1; \quad (9b)$$

впоследствии Э. Бойлан [1] получил тот же результат, упростив выкладки. Затем Г. П. Маккин [4] получил формулы

$$P_0 \left\{ \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{|t(t, \delta) - t(t, 0)|}{\sqrt{\delta \ln_2 1/\delta}} \leq 2 \sqrt{t(t, 0)} \right\} = 1 \quad (10a)$$

и

$$P_0 \left\{ \lim_{\substack{b-a=\delta \downarrow 0 \\ a < b}} \frac{|t(t, b) - t(t, a)|}{\sqrt{\delta \ln 1/\delta}} \leq 2 \sqrt{\max_{a \in R^1} t(t, a)} \right\} = 1 \quad (10b)$$

для каждого отдельного $t \geq 0$, используя выражение t через стохастический интеграл, найденное Х. Танака; а немного позже

Д. Б. Рэй [4] доказал, что неравенства (10) — *лучшие возможные* (т. е. что в обоих внутренних неравенствах выполнен знак $=$). Рэй обнаружил, что если x — стандартная броуновская траектория, начинающаяся в 0, остановленная в момент m_1 первого достижения точки 1, и если $\#(t, [a, b])$ — число раз, когда она пересекает в направлении сверху вниз полосу от b до $a < b$ до момента $t \leq m_1$, то для $2^n \geq j > k > 0$ величина $\#(m_1, [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}])$ является суммой $\#(m_1, [(j-1)2^{-n}, j2^{-n}]) + 1$ независимых экземпляров величины $\#(m_{j2^{-n}}, [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}])$, причем эти величины также независимы от $\#(m_1, [(j-1)2^{-n}, j2^{-n}])$, и таким образом $[\#(m_1, [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]): 0 < k \leq 2^n, P_0]$ — цепь Маркова. Но в соответствии с леммой § 2.4 о пересечениях сверху вниз $2^{-n} \#(m_1, [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}])$ должно стремиться к $t(m_1, a)$ ($k = [2^n a]$, $n \uparrow +\infty$). Поэтому процесс $[t(m_1, a): 0 \leq a \leq 1, P_0]$ также должен быть марковским. И в самом деле, Рэй доказал, что этот процесс можно выразить через двух- и четырехмерные бесселевские процессы § 2.7 следующим образом:

$$t(m_1, a) = 0, \quad a \leq b \equiv \min_{t \leq m_1} x(t); \quad (11a)$$

$$P_0 \{b \leq c\} = \frac{1}{1-c}, \quad c \leq 0; \quad (11b)$$

$$t(m_1, a) = \frac{r_4(a-b)^2}{2}, \quad b \leq a \leq 0, \quad (11c)$$

где r_4 — четырехмерный бесселевский процесс, начинающийся в 0 и не зависящий от b ;

$$t(m_1, a) = \frac{r_2(1-a)^2}{2}, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad (11d)$$

где r_2 — двумерный бесселевский процесс, начинающийся в 0, взятый при условии, что в момент 1 он находится в точке $r_4(-b)$, но не зависящий от r_4 и от b другим образом. Из приведенного выше описания и формул (2.7.8) сразу следуют строгие законы

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\delta \downarrow 0} \frac{|t(m_1, \delta) - t(m_1, 0)|}{\sqrt{\delta \ln 2 / \delta}} = 2 \sqrt{t(m_1, 0)} \right\} = 1 \quad (12a)$$

и

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\substack{b-a=\delta \downarrow 0 \\ a < b}} \frac{|t(m_1, b) - t(m_1, a)|}{\sqrt{\delta \ln 1 / \delta}} = 2 \sqrt{\max_{a \leq 1} t(m_1, a)} \right\} = 1. \quad (12b)$$

Ф. Б. Найт [2] получил аналогичный результат, используя вместо m_1 обращенное локальное время $\tau^{-1}(t) = \min \{s: t(s, 0) = t\}$. Доказательства мы здесь не даем, но в приведенных ниже задачах 5 и 6 читателю предлагается доказать (11d).

Формулы (10) (со знаком $=$ вместо \leq) и несколько усовершенствованная формула (9b) доказываются ниже при помощи другого результата Д. Б. Рэя [4]. Этот результат состоит в том, что если e — экспоненциальный случайный момент с условным законом распределения $P\{e > t | B\} = e^{-t/2}$, то для любых $a, b \in R^1$ *условные локальные времена* $[t(e, \xi): \xi \in R^1, P_{ab}(B) = P_a\{B | x(e) = b\}]$ можно описать следующим образом:

$$t(e, \xi) = 0, \quad \xi \leq c \equiv \min_{t \leq e} x(t); \quad (13a)$$

$$P_{ab}\{c < \xi\} = e^{-2(a \wedge b - \xi)}, \quad \xi \leq a \wedge b; \quad (13b)$$

$$t(e, \xi) = \frac{e^{-2\xi} r_4 (e^{2\xi} - e^{2c})^2}{4}, \quad c \leq \xi \leq a \wedge b, \quad (13c)$$

где r_4 — четырехмерный бesselевский процесс, начинающийся в 0, не зависящий от c ;

$$t(e, \xi) = \frac{e^{-2\xi} r_2 (e^{2\xi} - e^{2a \wedge b})^2}{4} \quad \text{для } \xi \text{ между } a \text{ и } b, \quad (13d)$$

где r_2 — двумерный бesselевский процесс, начинающийся в $r_4(e^{2a \wedge b} - e^{2c})$, но не зависящий от r_4 и c другим образом;

$$t(e, \xi) = \frac{e^{2\xi} r_4 (e^{-2\xi} - e^{-2d})^2}{4}, \quad a \vee b \leq \xi \leq d, \quad (13e)$$

где r_4 — другой четырехмерный бesselевский процесс, начинающийся в 0, взятый при том условии, чтобы он совпадал с $t(t, \xi)$ при $\xi = a \vee b \pm 0$, но не зависящий от $d \equiv \max_{t \leq e} x(t)$, r_2 , c и старого r_4 другим образом; наконец,

$$P_{ab}\{d > \xi\} = e^{-2(\xi - a \vee b)}, \quad \xi \geq a \vee b; \quad (13f)$$

$$t(e, \xi) = 0, \quad \xi \geq d. \quad (13g)$$

Доказательство марковского свойства процесса $[t(e, \xi): \xi \in R^1, P_{ab}]$ основывается на том, что остановка процесса в экспоненциальный момент времени влечет за собой применение к распределениям преобразования Лапласа, переводящего свертки в простые произведения и гауссово ядро в функцию Грина, которая также является произведением.

Первый шаг состоит в проверке того, что, если f — аддитивный функционал, соответствующий неотрицательной кусочно непрерывной функции f , то

$$E_{ab}\{e^{-f(e)} | t(e, \xi) = 0\} = \frac{2e^{|b-a|}}{1 - e^{|b-a| - |b-\xi| - |\xi-a|}} \times \\ \times \left[G(a, b) - \frac{G(a, \xi) G(\xi, b)}{G(\xi, \xi)} \right] \quad (14a)$$

для ξ , не находящегося между a и b ; и

$$E_{ab} \{e^{-f(e)} | t(e, \xi) = t\} = e^{[b-\xi]+|\xi-a|} \frac{G(a, \xi) G(\xi, b)}{G(\xi, \xi)^2} e^{-t[G(\xi, \xi)^{-1}-2]} \quad (14b)$$

для всех ξ ($t > 0$). Здесь $G(a, b) = G(b, a) = g_1(a) g_2(b)$ ($a \leq b$) — функция Грина оператора $1/2 - \mathfrak{G}^*$ ($\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G} - f$).

По формуле Каца, если $e_{-\infty b}$ — характеристическая функция множества $a < b$, то

$$\begin{aligned} u(a) &= E_a \{e^{-f(e)}, x(e) < b\} = \\ &= \frac{1}{2} E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-t/2} e^{-f(t)} e_{-\infty b}(x) dt \right] = \int_{c < b} G(a, c) dc; \end{aligned} \quad (15)$$

а так как

$$P_a \{x(e) \in db\} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t/2} dt \frac{e^{-(b-a)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} db = \frac{e^{-|b-a|} db}{2}, \quad (16)$$

то отсюда следует, что

$$E_{ab} [e^{-f(e)}] = E_a \{e^{-f(e)} | x(e) = b\} = 2e^{[b-a]} G(a, b). \quad (17)$$

Пусть даны $\xi \in R^1$ и $\gamma > 0$; прибавим к f характеристическую функцию полуинтервала $[\xi, \eta)$ ($\eta > \xi$), умноженную на $\gamma/2(\eta - \xi)$, и положим $\eta \downarrow \xi$; тогда измененная левая часть формулы (17) стремится к $E_{ab} [e^{-f(e) - \gamma t(e, \xi)}]$ в силу формулы (3), а измененная функция Грина стремится к¹⁾ $G(a, b) - \gamma G(a, \xi) G(\xi, b) (1 + \gamma G(\xi, \xi))^{-1}$, что доказывает формулу

$$E_{ab} [e^{-f(e) - \gamma t(e, \xi)}] = 2e^{[b-a]} \left[G(a, b) - \gamma \frac{G(a, \xi) G(\xi, b)}{1 + \gamma G(\xi, \xi)} \right], \quad \gamma > 0. \quad (18)$$

При $\gamma \uparrow +\infty$ выражение (18) стремится к

$$E_{ab} \{e^{-f(e)}, t(e, \xi) = 0\} = 2e^{[b-a]} \left[G(a, b) - \frac{G(a, \xi) G(\xi, b)}{G(\xi, \xi)} \right]. \quad (19a)$$

Вычитая (19a) из (18) и обращая преобразование Лапласа по γ , получаем

$$E_{ab} \{e^{-f(e)}, t(e, \xi) > t\} = 2e^{[b-a]} \frac{G(a, \xi) G(\xi, b)}{G(\xi, \xi)} e^{-t/G(\xi, \xi)}. \quad (19b)$$

¹⁾ Измененная функция Грина G_* удовлетворяет уравнению $G_*(a, b) = G(a, b) - (\gamma/(\eta - \xi)) \int_{\xi}^{\eta} G(a, c) G_*(c, b) dc$; устремляя η к ξ и решая уравнение, получаем выписанный результат.

В частном случае, когда $f = 0$, формулы (19) превращаются в

$$P_{ab} \{t(e, \xi) = 0\} = 1 - e^{|b-a| - |b-\xi| - |\xi-a|}; \quad (20a)$$

$$P_{ab} \{t(e, \xi) > t\} = e^{|b-a| - |b-\xi| - |\xi-a|} e^{-2t}, \quad (20b)$$

откуда следует (14).

Поскольку $f(e) = 2 \int t(e, \xi) f(\xi) d\xi$, для доказательства марковского свойства условных локальных времен достаточно проверить, что аддитивные функционалы f_{\pm} , соответствующие функциям

$$f_- = \begin{cases} f(\eta \leq \xi), \\ 0(\eta > \xi) \end{cases} \quad \text{и} \quad f_+ = \begin{cases} 0(\eta < \xi), \\ f(\eta \geq \xi), \end{cases}$$

независимы при условии, что фиксировано $t(e, \xi)$; а так как броуновское движение инвариантно относительно переносов и отражения около начальной точки, можно взять $\xi = 0$ и $a < b$. Используя формулы (12) и тот факт, что $P_{ab} \{t(e, \xi) = 0\} = 0$ для ξ между a и b [см. (20a)], можно упростить задачу и проверять только следующее: если G_{\pm} — функции Грина, соответствующие функциям f_{\pm} , то

$$\begin{aligned} G(a, b) - \frac{G(a, 0)G(0, b)}{G(0, 0)} &= \\ &= \frac{e^{2(b-a)}}{1 - e^{-2a}} \left[\frac{G_-(a, b) - G_-(a, 0)G_-(0, b)}{G_-(0, 0)} \right] \left[\frac{G_+(a, b) - G_+(a, 0)G_+(0, b)}{G_+(0, 0)} \right] \end{aligned} \quad (21a)$$

при $0 \leq a < b$;

$$\frac{G(a, 0)G(0, b)}{[G(0, 0)]^2} = e^{|a|+|b|} \frac{G_-(a, 0)G_-(0, b)}{[G_-(0, 0)]^2} \frac{G_+(a, 0)G_+(0, b)}{[G_+(0, 0)]^2} \quad (21b)$$

и

$$[G(0, 0)]^{-1} = [G_-(0, 0)]^{-1} + [G_+(0, 0)]^{-1} - 2. \quad (21c)$$

Но G_- есть произведение функций

$$g_1(\eta) \quad (\eta < 0); \quad (22a-)$$

$$g_1(0) \operatorname{ch} \eta + g'_1(0) \operatorname{sh} \eta \quad (\eta \geq 0)$$

и

$$g_1(0)g_2(\eta) - g_1(\eta)g_2(0) - g'_1(0)g_2(\eta) - g_1(\eta)g'_2(0) \quad (\eta < 0); \quad (22b-)$$

$$e^{-\eta} \quad (\eta \geq 0),$$

деленное на их вронскиан

$$g_1(0) + g'_1(0), \quad (23-)$$

а G_+ — произведение функций

$$e^\eta \quad (\eta < 0); \quad (22a +)$$

$$g_1(\eta) g_2(0) - g_1(0) g_2(\eta) + g_1'(0) g_2(\eta) - g_1(\eta) g_2'(0) \quad (\eta \geq 0)$$

и

$$g_2(0) \operatorname{ch} \eta + g_2'(0) \operatorname{sh} \eta \quad (\eta < 0); \quad (22b +)$$

$$g_2(\eta) \quad (\eta \geq 0),$$

деленное на их вронскиан

$$g_2(0) - g_2'(0). \quad (23 +)$$

После соответствующих подстановок и преобразований из формул (22) и (23) получаем (21с). Формула (21b) очевидна, потому что обе части являются решениями уравнения $\mathfrak{G}^* u = u/2$ как функции от a или от b по каждую сторону от 0. Формула (21a) оставляется читателю.

Используя (14), вычисляем далее $E_{ab}\{e^{-\gamma t(e, \eta)} | t(e, \xi) = t\}$ для $\xi < \eta \leq a \wedge b$ и $t = 0$ и для $\xi < \eta \leq a \vee b$ и $t > 0$. Для этого подставляем в (14) вместо G

$$\frac{1}{2} e^{-|b-a|} - \frac{\gamma}{4} \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^{-1} e^{-|b-\eta| - |\eta-a|}$$

и получаем

$$E_{ab}\{e^{-\gamma t(e, \eta)} | t(e, \xi) = 0\} = \frac{\theta + (1-\theta)}{\Delta}, \quad \xi < \eta \leq a \wedge b;$$

$$\theta = \frac{1 - e^{-2(a \wedge b - \eta)}}{1 - e^{-2(a \wedge b - \xi)}}, \quad \Delta(\xi) = 1 + \frac{\gamma}{2} [1 - e^{-2(\eta - \xi)}], \quad (24a)$$

а при $t > 0$

$$\begin{aligned} E_{ab}\{e^{-\gamma t(e, \eta)} | t(e, \xi) = t\} = \\ = \begin{cases} \Delta^{-1} e^{-t\gamma e^{2(\eta - \xi)}/\Delta}, & \xi < \eta \text{ между } a \text{ и } b. \\ \Delta^{-2} e^{-t\gamma e^{2(\eta - \xi)}/\Delta}, & \xi < \eta \leq a \wedge b. \end{cases} \quad (24b) \end{aligned}$$

Поскольку $P_{ab}\{t(e, \xi) = 0\} = 0$ для ξ между a и b , то для доказательства формулы (13d) достаточно использовать марковское свойство условных локальных времен и двумерного бесселевского

¹⁾ $e^{-|b-a|/2}$ — функция Грина оператора $1/2 - \mathfrak{G}$; см. строчку над формулой (18) и сноску на стр. 91.

процесса r_2 и проверить, что для ξ и $\eta > \xi$ между a и b формула (24b) согласуется с формулой ¹⁾

$$\begin{aligned} E_r [e^{-\gamma e^{-2\eta r_2(e^{2\eta} - e^{2\xi})^{1/4}}}] &= \int_{R^2} \frac{e^{-|b-\xi|^2/2(e^{2\eta} - e^{2\xi})}}{2\pi(e^{2\eta} - e^{2\xi})} e^{-\gamma e^{-2\eta|b|^2/2}} db = \\ &= \frac{2e^{2\eta/\gamma}}{e^{2\eta - 2\xi} + 2e^{2\eta/\gamma}} e^{-r^2/2(e^{2\eta} - e^{2\xi} + 2e^{2\eta/\gamma})} \quad (25) \end{aligned}$$

($|x| = r = r_2(e^{2\xi} - e^{2a \wedge b})$). Что касается $t(e, \xi)$ для $\xi \leq a \wedge b$, то из независимости c и r_4 и из того, что $P_0\{r_4 > 0, t > 0\} = 1$ (см. § 2.7), следует, что процесс $r_4[(e^{2\xi} - e^{2c}) \vee 0]$ — марковский; и доказательство формул (13a), (13b) и (13c) завершается сравнением формул (24a) и (24b) для $\xi < \eta < a \wedge b$ с формулами ²⁾

$$\begin{aligned} P_0\{c > \eta | c > \xi\} + E_0\{c < \eta, e^{-\gamma e^{-2\eta r_4(e^{2\eta} - e^{2c})^{1/4}} | c > \xi\} = \\ = \theta + \frac{2}{1 - e^{-2(a \wedge b - \xi)}} \int_{\xi}^{\eta} \frac{e^{-2(a \wedge b - l)}}{\Delta^2(l)} dl = \\ = \theta + \frac{e^{-2(a \wedge b - \eta)}}{1 - e^{-2(a \wedge b - \xi)}} \frac{2}{\gamma} (1 - \Delta^{-1}(\xi)) \quad (26a) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} E_r [e^{-\gamma e^{-2\eta r_4(e^{2\eta} - e^{2\xi})^{1/4}}}] &= \int_{R^4} \frac{e^{-|b-\xi|^2/2(e^{2\eta} - e^{2\xi})}}{(2\pi(e^{2\eta} - e^{2\xi}))^2} e^{-\gamma e^{-2\eta|b|^2/4}} db = \\ &= \frac{(2e^{2\eta/\gamma})^2}{(e^{2\eta} - e^{2\xi} + 2e^{2\eta/\gamma})^2} e^{-r^2/2(e^{2\eta} - e^{2\xi} + 2e^{2\eta/\gamma})} \quad (26b) \end{aligned}$$

($|x| = r = r_4(e^{2\xi} - e^{2c})$). Используя марковское свойство условных локальных времен и очевидную инвариантность их распределения относительно отражения около $\xi = (a + b)/2$, получаем формулы (13e), (13f) и (13g). Из формулы (2.7.8) выводим

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\delta \downarrow 0} \frac{|t(e, \delta) - t(e, 0)|}{\sqrt{\delta \ln 1/\delta}} = 2 \sqrt{t(e, 0)} \right\} = 1 \quad (27a)$$

и

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\substack{b-a=\delta \downarrow 0 \\ a < b}} \frac{|t(e, b) - t(e, a)|}{\sqrt{\delta \ln 1/\delta}} = 2 \sqrt{\max_{a \in R^1} t(e, a)} \right\} = 1, \quad (27b)$$

¹⁾ Здесь E_r означает математическое ожидание, относящееся к двумерному бесселевскому процессу.

²⁾ Здесь E_r означает математическое ожидание, относящееся к четырехмерному бесселевскому процессу, а c не зависит от r_4 и имеет распределение (13b).

откуда вытекает (по теореме Фубини), что для некоторого положительного момента времени выполнены соотношения (10) (со знаком $=$). Но производя изменение масштаба $x(t) \rightarrow cx(t/c^2)$ ($c > 0$), превращаем $t(t, a)$ в $ct(t/c^2, a/c)$, а утверждения (10) превращаются в соответствующие утверждения для момента t/c^2 ; поэтому (10) выполняются (со знаком $=$) для всех положительных моментов времени. Попутно мы получаем

$$P_0 \{t(t, \xi) > 0, \min_{s \leq t} x(s) < \xi < \max_{s \leq t} x(s), t > 0\} = 1, \quad (28)$$

что немедленно следует из равенства $P_0 \{r_d > 0, t > 0\} = 1$ ($d = 2, 4$).

Так как

$$t(t, a) = \lim_{\substack{b \rightarrow a + 2^{-n} \\ b \downarrow a}} 2^{n-1} \text{mes} \{s : a \leq x < b, s \leq t\}, \quad (29)$$

то

$$t(s, \xi) \leq t(t, \xi), \quad s \leq t, \quad \xi \in R^1. \quad (30a)$$

Из формул (10) и теоремы Фубини получаем также, что

$$t(t, \xi) - \text{непрерывная функция от } \xi \text{ для любого } t = k2^{-n} \geq 0. \quad (30b)$$

Так как $t(s, \xi)$ как функция от s постоянна вблизи $s = t$ при $\xi \neq x(t)$, то

$$\overline{\lim}_{\substack{b \rightarrow a + 2^{-n} \\ b \downarrow a \\ a < \xi < b}} |t(t, b) - t(t, a)| \leq t(t + 0, \xi) - t(t - 0, \xi), \quad (30c)$$

$$t \geq 0, \quad \xi \in R^1.$$

Поэтому для доказательства непрерывности $t(t, \xi)$ на $[0, +\infty) \times R^1$ достаточно проверить, что

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{n \uparrow +\infty} \max_{\xi \in R^1} \frac{t(2^{-n}, \xi, w_{k2^{-n}}^+)}{2^{-n/2n}} \leq \ln 4 \right\} = 1, \quad (31)$$

и применить теорему Асколи в сочетании с (30a). Можно использовать равенство (31) для улучшения оценки (9b) до следующей:

$$P_0 \left\{ \overline{\lim}_{\substack{t-s=\delta \downarrow 0 \\ s < t \leq 1 \\ \xi \in R^1}} \frac{|t(t, \xi) - t(s, \xi)|}{\sqrt{\delta} \ln 1/\delta} \leq 4 \right\} = 1 \quad (32)$$

(прилежный читатель сможет это проверить). Формулы (2a) и (2c) выводятся из полученных результатов так, как было сказано ранее.

В силу гёльдеровского условия для стандартной броуновской траектории (§ 1.9) для доказательства формулы (31) достаточно проверить, что при $\theta > \ln 4$

$$Q_n = P_0 \{ \max_{\xi \leq 0} t(2^{-n}, \xi, \omega_{k_2}^+ - n) > \theta 2^{-n/2} n, x(2^{-n}, \omega_{k_2}^+ - n) > \\ > -\sqrt{32^{-n} n \ln 2} \text{ для некоторого } k < 2^n \} \quad (33)$$

является общим членом сходящегося ряда; а это можно сделать, используя изменения масштаба в стандартном броуновском движении $x(t) \rightarrow cx(t/c^2)$ и рэевское описание условных локальных времен. Имеем:

$$\begin{aligned} Q_n &\leq 2^n P_0 \{ \max_{\xi \leq 0} t(2^{-n}, \xi) > \theta 2^{-n/2} n, x(2^{-n}) > -2 \cdot 2^{-n/2} \sqrt{n} \} = \\ &= 2^n P_0 \{ \max_{\xi \leq 0} t(1, \xi) > \theta n, x(1) > -2 \sqrt{n} \} \leq \\ &\leq 2^n E_0 \{ \max_{\xi \leq 0} t(1, \xi) > \theta n, e^{x(1) \wedge 0} \} e^{2 \sqrt{n}} \leq \\ &\leq 2^{n+2} e^{2 \sqrt{n}} E_0 \left\{ \max_{\xi \leq 0} t(1, \xi) > \theta n, (2 \sqrt{e})^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-|b-x(t)|} db \right\} = \\ &= 2^{n+2} e^{2 \sqrt{n}} P_0 \{ \max_{\xi \leq 0} t(1, \xi) > \theta n, e > 1, x(e) > 0 \} \leq \\ &\leq 2^{n+2} e^{2 \sqrt{n}} P_0 \{ \max_{\xi \leq 0} t(e, \xi) > \theta n, x(e) > 0 \} \leq \\ &\leq 2^{n+2} e^{2 \sqrt{n}} P_0 \{ \max_{t \leq 1} [r_4(t)]^2 > 4 \theta n \} \leq \\ &\leq 2^{n+4} e^{2 \sqrt{n}} P_0 \{ \max_{t \leq 1} [x(t)]^2 > \theta n \} \leq \\ &\leq 2^{n+5} e^{2 \sqrt{n}} P_0 \{ \max_{t \leq 1} x(t) > \sqrt{\theta n} \} < \\ &< \text{const} \cdot 2^n e^{2 \sqrt{n}} \frac{e^{-\theta n/2}}{\sqrt{\theta n}} < \text{const} \cdot e^{-\delta n} \quad (0 < \delta < (\theta - \ln 4)/2). \quad (34) \end{aligned}$$

Задача 1. Проверить, что существует

$$\int_0^1 dt/x(t) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x(t)| > \varepsilon}^{t \leq 1} dt/x(t).$$

[$\int_{\substack{t \leq 1 \\ |x(t)| > \varepsilon}} dt/x(t) = 2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} [t(1, b) - t(1, -b)] db/b$, что сходится при $\varepsilon \downarrow 0$, поскольку $|t(1, b) - t(1, -b)| < \sqrt[3]{b}$ ($b \downarrow 0$).]

Задача 2. Рассмотрим $\mathcal{Z}_a = \{t : x = a\}$. Использовать формулу (32), чтобы доказать, что $P_0 \{\dim(\mathcal{Z}_a) \geq 1/2, a \in R^1\} = 1$ (см. замечание 2.5.2 по поводу определения размерности; см. также (2.5.3) и задачу (2.2.4).

[Пусть $\beta < 1/2$; из (32) следует, что $t(t, a) - t(s, a) < \varepsilon^\beta$ ($s < t \leq 1$, $\varepsilon = t - s \downarrow 0$, $a \in R^1$); это показывает, что

$$\wedge^\beta \mathcal{Z}_a \geq \wedge^\beta \mathcal{Z}_a \cap [0, 1) \geq t(t, a), a \in R^1;$$

и доказательство завершается применением формулы (28).]

Задача 3. Доказать, что случайный процесс $\{t(m_b, 0) : b \geq 0, P_0\}$ имеет независимые приращения, и вывести формулу Леви

$$E_0 [e^{-\alpha t(m_b, 0)}] = (\alpha b + 1)^{-1} = \exp \left[- \int_0^{+\infty} [1 - e^{-\alpha l}] e^{-l/b} \frac{dl}{l} \right].$$

[Так как $t(m_b, 0) - t(m_a, 0) = t(m_b(\omega_m^+), 0, \omega_m^+)$ ($b \leq a$, $m = m_a$), а $t(m_c, 0) : c \leq a$ измеримо относительно \mathcal{B}_{m+0} , то независимость приращений вытекает из того, что броуновская частица начинает движение заново в момент m в точке $x(m) = a$. Для вывода формулы Леви рассмотрим функцию

$$e(l) = e(\alpha, l) \equiv E_0 [e^{-\alpha t(m_l, 0)}].$$

Используя то, что $t(t, 0) = t(s, 0) + t(t-s, \omega_s^+)$ ($t \geq s$), выводим

$$\begin{aligned} e(l+\varepsilon) &= e(l) [E_l \{e^{-\alpha t(m_{l+\varepsilon}, 0)}, m_0 < m_{l+\varepsilon}\} + P_l \{m_{l+\varepsilon} \leq m_0\}] = \\ &= e(l) \left[\frac{\varepsilon}{l+\varepsilon} e(l+\varepsilon) + \frac{l}{l+\varepsilon} \right], \end{aligned}$$

т. е.

$$e^+(l) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{e(l+\varepsilon) - e(l)}{\varepsilon} = -l^{-1} e(l) [1 - e(l)].$$

Решая это уравнение, получаем

$$e(l) = [c(\alpha)l + 1]^{-1}, \quad c(\alpha) = \frac{e(1)}{1 - e(1)} > 0.$$

Так как изменение масштаба $x(t) \rightarrow \beta^{-1}x(\beta^2 t)$ переводит m_l в $\beta^{-2}m_{\beta l}$, а $t(t, l)$ в $\beta^{-1}t(\beta^2 t, \beta l)$, то ясно, что $c(\alpha) = \beta c(\alpha/\beta) = \beta c(1)(\beta = \alpha)$, и, чтобы завершить доказательство, достаточно вычислить $c = c(1)$. Дифференцируя $e = [\alpha c l + 1]^{-1}$ и устремляя α к 0, получаем

$$E_0 [t(m_l, 0)] = cl.$$

С помощью формулы ($m = m_l$)

$$E_0 [t(m_l, l)] = E_0 [t(m_l(\omega_m^+), l, \omega_m^+)] = E_l [t(m_l, l)] = E_0 [t(m_{l-l}, 0)]$$

находим

$$\begin{aligned}
 c &= 2 \int_0^1 cl \, dl = 2 \int_0^1 E_0 [t(m_l, 0)] \, dl = \\
 &= 2 \int_0^1 E_0 [t(m_1, l)] \, dl = E_0 \left[2 \int_0^{+\infty} t(m_1, l) \, dl \right] = \\
 &= E_0 [\text{mes} \{t : x(t) \geq 0, t \leq m_1\}] = \\
 &= \int_0^{+\infty} P_0 \{m_1 > t, x(t) \geq 0\} \, dt = \int_0^{+\infty} P_0 \{t^-(t) < 1, x(t) \geq 0\} \, dt = \\
 &= \int_0^{+\infty} dt \int_0^1 db \int_0^b da \, 2 \frac{2b-a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(2b-a)^2/2t} = 1;
 \end{aligned}$$

причем на последнем этапе используется задача 1.7.1.]

Задача 4. При фиксированном $b > 0$ $\{t(t^{-1}(t), b) : t > 0, P_0\}$ есть однородный процесс с независимыми приращениями с мерой Леви $b^{-2}e^{-l/b}dl$ ($b > 0$); здесь $t^{-1}(t)$ — обратная к $t(t, 0)$ функция, т. е. $t^{-1}(t) = \min \{s : t(s, 0) = t\}$.

[Чтобы доказать, что $t(t^{-1}, b)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, воспользуйтесь тем, что $t^{-1}(t)$ — марковский момент, и примените правило сложения $t^{-1}(t) = m + t^{-1}(t-s, w_m^+)(t > s, m = t^{-1}(s))$. Что касается меры Леви, то

$$\begin{aligned}
 \gamma &= E_0 \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\beta t(t^{-1}(t), b)} \, dt \right] = \\
 &= E_0 \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t(t, 0)} e^{-\beta t(t, b)} t \, (dt, 0) \right] = E_0 \left[\int_0^{m_b} e^{-\alpha t(t, 0)} t \, (dt, 0) \right] + \\
 &+ E_0 [e^{-\alpha t(m_b, 0)}] E_b \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t(t, 0)} e^{-\beta t(t, b)} t \, (dt, 0) \right] = \\
 &= \alpha^{-1} E_0 [1 - e^{-\alpha t(m_b, 0)}] + E_0 [e^{-\alpha t(m_b, 0)}] E_b [e^{-\beta t(m_0, b)}] \gamma.
 \end{aligned}$$

С помощью результата задачи 3 найдите, что $\gamma = [\alpha + \beta(\beta b + 1)^{-1}]^{-1}$. Затем обращая преобразование Лапласа, получите

$$E_0 [e^{-\beta t(t^{-1}(t), b)}] = e^{-t\beta(\beta b + 1)^{-1}} = e^{-t \int_0^{+\infty} [1 - e^{-\beta l}] b^{-2} e^{-l/b} dl},$$

что и утверждалось. Поскольку $\int_0^{+\infty} b^{-2} e^{-l/b} dl < +\infty$, этот процесс имеет конечное число скачков до момента $t=1$, что также ясно из того, что броуновская траектория $x(t): t \leq 1$ не может пройти бесконечное число раз из 0 в b .]

Приводимые ниже задачи 5 и 6 содержат доказательство рэевского описания (11d) процесса $\{t(m_1, \xi): 0 \leq \xi \leq 1, P_0\}$.

Задача 5. Проверить, что

$$E_0 [e^{-\gamma_1 t(m_1, \xi_1) - \gamma_2 t(m_1, \xi_2) - \dots - \gamma_n t(m_1, \xi_n)}]$$

для $0 < \gamma_1, \dots, \gamma_n$, $0 \leq \xi_1 < \dots < \xi_n < 1$ и $n \geq 1$ является величиной, обратной к

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i \leq n} \gamma_i (1 - \xi_i) + \sum_{i < j \leq n} \gamma_i \gamma_j (\xi_j - \xi_i) (1 - \xi_j) + \\ + \sum_{i < j < k \leq n} \gamma_i \gamma_j \gamma_k (\xi_j - \xi_i) (\xi_k - \xi_j) (1 - \xi_k) + \dots + \\ + \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n (\xi_2 - \xi_1) (\xi_3 - \xi_2) \dots (\xi_n - \xi_{n-1}) (1 - \xi_n). \end{aligned}$$

[Функция $u(\xi) = E_\xi [e^{-\gamma_1 t(m_1, \xi_1) - \dots}]$ ограничена 0 и 1, кусочно линейна с угловыми точками в ξ_1, \dots, ξ_n и возрастает до 1 при $\xi=1$. В угловых точках она удовлетворяет условиям согласования $u^+ - u^- = \gamma u$. Действительно, пусть ξ — угловая точка, γ — соответствующий параметр преобразования Лапласа, а e — момент выхода из окрестности $|\eta - x(0)| < \delta$; тогда для малого δ

$$\begin{aligned} u(\xi) &= E_\xi [e^{-\gamma t(e, \xi)} e^{-\gamma_1 t(m_1(w_e^+), \xi_1, w_e^+) - \dots}] = \\ &= E_\xi \{e^{-\gamma t(e, \xi)}, x(e) = \xi - \delta\} u(\xi - \delta) + \\ &\quad + E_\xi \{e^{-\gamma t(e, \xi)}, x(e) = \xi + \delta\} u(\xi + \delta). \end{aligned}$$

Так как $t(e, \xi)$ зависит только от броуновского движения с отражением $x_\xi^\pm = |x - \xi|$, то отсюда следует, что

$$u(\xi) = \frac{1}{2} [u(\xi - \delta) + u(\xi + \delta)] E_0 [e^{-\gamma t(e, 0)}].$$

Но $P_0 \{\lim_{\delta \downarrow 0} e = 0\} = 1$; поэтому, полагая $\delta \downarrow 0$, получаем

$$\frac{(u^+ - u^-)}{u} = 2 \lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{-1} E_0 [1 - e^{-\gamma t(e, 0)}] = c(\gamma).$$

Равенство $c(\gamma) = \gamma$ можно установить, если учесть, что функция с одной угловой точкой $v(\xi) = E_\xi [e^{-\gamma t(m_1, 0)}]$ удовлетворяет соотношению $v^+(0) - v^-(0) = c(\gamma) v(0)$, $v(0) = (1 + \gamma)^{-1}$ и $v(1) = 1$ (см.

задачу 3). Теперь, разрешая уравнение относительно u , по индукции получите нужную формулу.]

Задача 6. Проверить справедливость соотношения

$$E_r [e^{-\gamma r_2(\xi)^2/2}] = \frac{e^{-\gamma r^2/2(1+\gamma\xi)}}{1+\gamma\xi} \quad (\gamma > 0)$$

и использовать его для доказательства утверждения, содержащегося в формуле (11d): процесс $[t(m_1, 1-\xi): 0 \leq \xi \leq 1, P_0]$ совпадает по распределению с $r_2(\xi)^2/2: \xi \leq 1$, где r_2 — двумерный бesselовский процесс, начинающийся в 0.

Задача 7. Доказать, что $P_0\{t(+\infty, \cdot) = +\infty\} = 1$.

2.9. Броуновские экскурсии

Пусть дано стандартное броуновское движение, начинающееся в 0; пусть \mathcal{Z}_n — (открытый) интервал множества $[0, +\infty) \setminus \mathcal{Z}$, содержащий первое число из списка

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{11}{4} & 3 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

не содержащееся в \mathcal{Z} или $\bigcup_{m < n} \mathcal{Z}_m$. Введем нормированную абсолютную экскурсию¹⁾

$$e_n(t) = \frac{|x(t|\mathcal{Z}_n) + \inf \mathcal{Z}_n|}{\sqrt{|\mathcal{Z}_n|}}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

и знак $e_n = -1$ или $+1$ в зависимости от того,

$$x(t) < 0 \text{ или } x(t) > 0 \text{ для } t \in \mathcal{Z}_n. \quad (2)$$

Заметим, что \mathcal{Z}_n , e_n и $e_n(n \geq 1)$ являются борелевскими функциями от броуновской траектории.

Множество \mathcal{Z} — носитель локального времени t^+ ; поэтому оно есть замыкание для $t^{-1}[0, +\infty)$, где $t^{-1}(t) = \min\{s: t^+(s) \geq t\}$ — односторонний устойчивый процесс с показателем $1/2$ и скоростью $\sqrt{2}$.

¹⁾ $|\mathcal{Z}_n|$ — длина интервала \mathcal{Z}_n .

Процессы e_1, e_2, \dots независимы и одинаково распределены, причем e_1 — марковский процесс с переходными вероятностями

$$P_0\{e_1(t) \in db\} = h(0, 0, t, b) db = \frac{2e^{-b^2/2t(1-t)}}{\sqrt{2\pi t^3(1-t)^3}} b^2 db, \quad 0 < t < 1; \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} P_0\{e_1(t) \in db \mid e_1(s) = a\} &= h(s, a, t, b) db = \\ &= \frac{e^{-(b-a)^2/2(t-s)} - e^{-(b+a)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^{3/2} \frac{be^{-b^2/2(1-t)}}{ae^{-a^2/2(1-s)}} db, \\ &0 < s < t < 1. \end{aligned} \quad (3b)$$

Величины e_1, e_2, \dots независимы и имеют одинаковое распределение, причем $P_0\{e_1 = -1\} = P_0\{e_1 = +1\} = \frac{1}{2}$ (т. е. они совпадают по распределению с последовательностью выигрышей одного из игроков при игре в орлянку).

Наконец, $\mathfrak{Z}_1, e_n (n \geq 1)$ и $e_n (n \geq 1)$ независимы.

П. Леви [3: 238] наметил доказательство этих фактов; здесь приводится новое доказательство.

Рассмотрим интервал \mathfrak{Z}_1 , накрывающий точку $t=1$, экскурсию e_1 и знак e_1 , и вычислим математическое ожидание случайной величины

$$j_1\{x(s): s \leq \inf \mathfrak{Z}_1\} j_2(\mathfrak{Z}_1) j_3(e_1) j_4(e_1) j_5(\omega_{\sup \mathfrak{Z}_1}^+), \quad (4)$$

где

$$a) j_1\{x(s): s \leq t\} = j_1[x(s_1 \wedge t), x(s_2 \wedge t), \dots, x(s_n \wedge t)],$$

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n,$$

$$j_1(a_1, a_2, \dots, a_n) \in C(R^n);$$

b) $j_2(\mathfrak{Z}_1) = j_2(\inf \mathfrak{Z}_1, \sup \mathfrak{Z}_1)$, $j_2(s, t) \in C[0, +\infty)^2$, и $j_2(\mathfrak{Z}_1) = 0$, если $|\mathfrak{Z}_1|$ находится вблизи от 0 или $+\infty$;

c) $j_3(e_1) = j_3[e_1(t_1), e_1(t_2), \dots, e_1(t_n)]$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$, $j_3(b_1, b_2, \dots, b_n) \in C[0, +\infty)^n$, $j_3 = 0$ вне некоторого компактного подмножества из $[0, +\infty)^n$; наконец,

d) $0 \leq j_5 \leq 1$ — борелевская функция от броуновской траектории.

Величина $j_5(\omega_{\sup \mathfrak{Z}_1}^+)$ не зависит от остальных множителей в формуле (4), так как $m = \sup \mathfrak{Z}_1 = 1 + m_0(\omega_1^+)$ — марковский момент, а $\{x(t): t \leq \inf \mathfrak{Z}_1\}$, \mathfrak{Z}_1 , e_1 и e_1 измеримы относительно \mathbf{B}_{m+0} . Что касается величины $j_1 j_2 j_3 j_4$, то ее интеграл равен $(\Delta = (k-i)2^{-n})$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{i \leq 2^n \\ k \geq 2^n}} E_0 \left\{ (i-1) 2^{-n} \leq \inf \mathfrak{Z}_1 < i 2^{-n}, \quad k 2^{-n} < \sup \mathfrak{Z}_1 \leq (k+1) 2^{-n}, \right. \\
& \quad j_1 \{x(s): s \leq (i-1) 2^{-n}\} j_2(i 2^{-n}, k 2^{-n}) \times \\
& \quad \left. \times j_3 \left[\frac{x(t_1 \Delta + i 2^{-n})}{\sqrt{\Delta}}, \frac{x(t_2 \Delta + i 2^{-n})}{\sqrt{\Delta}}, \dots \right] j_4(\operatorname{sgn} x(i 2^{-n})) \right\} = \\
& = \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{\substack{i \leq 2^n \\ k \geq 2^n}} \int_0^{+\infty} E_0 \{ j_1 \{x(s): s \leq (i-1) 2^{-n}\}, (i-1) 2^{-n} \leq \inf \mathfrak{Z}_1 < i 2^{-n}, \\
& \quad |x(i 2^{-n})| \in da \} j_2(i 2^{-n}, k 2^{-n}) \times \\
& \quad \times \int_{[0, +\infty)^n} g^-(t_1 \Delta, a, b_1) g^-((t_2 - t_1) \Delta, b_1, b_2) \dots \\
& \quad \dots g^-((t_n - t_{n-1}) \Delta, b_{n-1}, b_n) \times \\
& \quad \times j_3 \left(\frac{b_1}{\sqrt{\Delta}}, \frac{b_2}{\sqrt{\Delta}}, \dots, \frac{b_n}{\sqrt{\Delta}} \right) db_1 db_2 \dots db_n \frac{1}{2} [j_4(-1) + j_4(+1)] \times \\
& \quad \times \int_0^{+\infty} g^-((1 - t_n) \Delta, b_n, b) db P_b \{m_0 < 2^{-n}\}^1. \quad (5)
\end{aligned}$$

Заменяя b_1, b_2, \dots на $\sqrt{\Delta} b_1, \sqrt{\Delta} b_2, \dots$ и вводя ядро h , определяемое формулой (3), перепишем формулу (5) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{i \leq 2^n \\ k \geq 2^n}} \int_0^{+\infty} E_0 \{ j_1 \{x(s): s \leq (i-1) 2^{-n}\}, \\
& \quad (i-1) 2^{-n} \leq \inf \mathfrak{Z}_1 < i 2^{-n}, |x(i 2^{-n})| \in da \} \times \\
& \quad \times \int_0^{+\infty} g^-(\Delta, a, b) db P_b \{m_0 < 2^{-n}\} j_2(i 2^{-n}, k 2^{-n}) \times \\
& \quad \times \int_{[0, +\infty)^n} h(0, 0, t_1, b_1) h(t_1, b_1, t_2, b_2) \dots h(t_{n-1}, b_{n-1}, t_n, b_n) \times \\
& \quad \times j_3(b_1, b_2, \dots, b_n) db_1 db_2 \dots db_n \times \\
& \quad \times \frac{1}{2} [j_4(-1) + j_4(+1)] \cdot \varepsilon(\Delta, a, b_1, b_n, b), \quad (6)
\end{aligned}$$

¹⁾ $g^-(t, a, b) = (2\pi t)^{-1/2} [e^{-(b-a)^2/2t} - e^{-(b+a)^2/2t}]$.

где

$$\begin{aligned} e(\Delta, a, b_1, b_n, b) &= \\ &= \sqrt{\Delta} \frac{g^-(t_1, a, \sqrt{\Delta} b_1) g^-(1-t_n, \sqrt{\Delta} b_n, b)}{h(0, 0, t_1, b_1) g^-(\Delta, a, b)} \left(\frac{1-t_n}{1-t_1} \right)^{3/2} \frac{b_1 e^{-b_1^2/2(1-t_1)}}{b_n e^{-b_n^2/2(1-t_n)}} = \\ &= s \left(\frac{ab}{\Delta} \right)^{-1} s \left(\frac{ab_1}{t_1 \sqrt{\Delta}} \right) s \left(\frac{b_n b}{(1-t_n) \sqrt{\Delta}} \right) e^{-a^2(1-t_1)/2\Delta t_1} e^{-b^2 t_n/2\Delta(1-t_n)} \cdot \end{aligned} \quad (7)$$

Ввиду ограничений, наложенных нами на j_2 и j_3 , можно считать функцию e ограниченной в области интегрирования; кроме того, она стремится к 1, когда $a, b \downarrow 0$. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} E_0 [j_1 \{x(s): s < \inf \mathfrak{Z}_1\} j_2(\mathfrak{Z}_1) j_3(e_1) j_4(e_1) j_5(w_{\sup}^+ \mathfrak{Z}_1)] &= \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{\substack{i \leq 2^n \\ k \geq 2^n}} \int_0^{+\infty} E_0 \{j_1 \{x(s): s \leq (i-1)2^{-n}\}, \\ &\quad (i-1)2^{-n} \leq \inf \mathfrak{Z}_1 < i2^{-n}, |x(i2^{-n})| \in da\} \times \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} g^-(\Delta, a, b) db P_b \{m_0 < 2^{-n}\} j_2(i2^{-n}, k2^{-n}) \times \\ &\quad \times \int_{[0, +\infty)^n} h(0, 0, t_1, b_1) \dots j_3 db_1 db_2 \dots db_n \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} [j_4(-1) + j_4(+1)] E_0(j_5) = \\ &= E_0 [j_1 \{x(s): s \leq \inf \mathfrak{Z}_1\} j_2(\mathfrak{Z}_1)] \times \\ &\quad \times \int_{[0, +\infty)^n} h(0, 0, t_1, b_1) \dots j_3 db_1 db_2 \dots db_n \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} [j_4(-1) + j_4(+1)] E_0(j_5). \quad (8) \end{aligned}$$

Это доказывает, что e_1 и e_1 подчиняются указанному закону распределения и независимы от \mathfrak{Z}_1 и от $x(t): t \notin \mathfrak{Z}_1$, т. е. независимы от \mathfrak{Z} и от $e_n, e_n (n \geq 2)$. Читателю предлагается самому провести оставшуюся часть доказательства.

Задача 1 (по Дж. Ламперти [1]). Используя задачу 1.7.3, доказать, что процесс $\{z(t) = t - \max \{s: x(s) = 0, s \leq t\}; P_0\}$ —

¹⁾ $s(b) = b^{-1} \operatorname{sh} b$.

марковский с распределениями

$$P_0\{\zeta(t) > b\} = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{b}{t}} \quad (b < t)$$

и переходными вероятностями ($a < s < t$, $b < t$)

$$P_0\{\zeta(t) > b \mid \zeta(s) = a\} = \int_0^{(\Delta-b) \vee 0} \frac{\sqrt{a} d\theta}{2(\theta+a)^{3/2}} \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{b}{\Delta-\theta}} + \sqrt{\frac{a}{\Delta+a}} \text{ или } 0$$

в зависимости от того, $\Delta = t - s > b - a$ или нет. Заметим, что ζ совпадает с $t - t^{-1}(t^+)$ ($t^{-1}(t) = \min\{s: t^+(s) = t\}$); и, таким образом, ζ имеет те же распределения, что и $t - m_a(a = t^{-1}(t) = \max_{s \leq t} x(s))$.

[Обозначим через ζ_- наибольший корень уравнения $x(t) = 0$ ($t < s$), а через ζ_+ наименьший корень уравнения $x(t) = 0$ ($t > s$). Ясно, что

$$P_0\{\zeta_+ < t \mid \zeta \cap [0, s]\} = P_0\{\zeta_+ < t \mid \zeta_-\} = P_0\{\zeta_+ < t \mid \zeta(s)\},$$

и марковское свойство процесса ζ вытекает из соотношений

$$\zeta(t) = \begin{cases} t - s + \zeta(s), & \zeta_+ > t; \\ \zeta(t - \zeta_+, w_{\zeta_+}^+), & \zeta_+ < t. \end{cases}$$

Теперь используйте задачу 1.7.3.]

Задача 2. Обозначим через G_ε σ -алгебру событий $B \in \mathbf{B}$, характеристические функции которых являются борелевскими функциями от пересечения графика стандартного броуновского движения с полосой $[0, +\infty) \times [0, \varepsilon]$. Доказать, что $\text{росток } G_{+\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon$ совпадает с $\mathbf{B}(\zeta) \times \mathbf{B}\{e_n: n \geq 1\} = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{B}\{e_n: n \geq 1\}$ с точностью до множеств винеровской меры 0.

[Поскольку $G_{+\varepsilon}$ не зависит от $\mathbf{B}\{e_n: n \geq 1\}$, а универсальная алгебра \mathbf{B} совпадает с $\mathbf{B}(\zeta) \times \mathbf{B}\{e_n: n \geq 1\} \times \mathbf{B}\{e_n: n \geq 1\}$, тождественность $G_{+\varepsilon}$ и $\mathbf{B}(\zeta) \times \mathbf{B}\{e_n: n \geq 1\}$ следует из очевидного включения $G_{+\varepsilon} \equiv \mathbf{B}(\zeta) \times \mathbf{B}\{e_n: n \geq 1\}$.]

2.10. Применение бесселевского процесса к броуновским экскурсиям

В § 2.9 мы уже видели, что нормированная броуновская экскурсия $e_1(t): 0 \leq t \leq 1$ представляет собой марковский процесс с одномерными распределениями

$$P_0\{e_1(t) \in db\} = h(0, 0, t, b) db = 2 \frac{e^{-b^2/2t(1-t)}}{\sqrt{\pi t^3(1-t)^3}} b^2 db, \quad 0 < t < 1, \quad (1a)$$

и переходными вероятностями

$$\begin{aligned}
 P_0 \{e_1(t) \in db \mid e_1(s) = a\} &\equiv h(s, a, t, b) db = \\
 &= \left[\frac{e^{-(b-a)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} - \frac{e^{-(b+a)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \right] \left(\frac{1-s}{1-t} \right)^{3/2} \frac{be^{-b^2/2(1-t)}}{ae^{-a^2/2(1-s)}} db = \\
 &= \frac{e^{-(a^2+b^2)/2(t-s)}}{(t-s)\sqrt{ab}} I_{1/2} \left(\frac{ab}{t-s} \right) \left(\frac{1-s}{1-t} \right)^{3/2} \frac{e^{-b^2/2(1-t)}}{e^{-a^2/2(1-s)}} b^2 db^1, \\
 &0 < s < t < 1. \quad (1b)
 \end{aligned}$$

Используя бesselовский процесс, введенный в § 2.7, можно дать новую интерпретацию для e_1 : если $r_-(t)$ и $r_+(t)$ ($0 \leq t \leq 1/2$) — два независимых экземпляра радиальной части трехмерного броуновского движения (бesselовского процесса) с условным распределением

$$Q(B) = P_0 \{B \mid r(1/2) = b\} \quad (2a)$$

и если конечная точка b имеет распределение

$$\frac{16}{\sqrt{2\pi}} e^{-2b^2} b^2 db, \quad b > 0, \quad (2b)$$

то составной процесс

$$e(t) = \begin{cases} r_-(t) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}), \\ r_+(1-t) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases} \quad (3)$$

совпадает по распределению с e_1 .

Для доказательства рассмотрим бesselовское ядро (2.7.4) в случае $d=3$:

$$g^+(t, a, b) = \frac{e^{-(a^2+b^2)/2t}}{t\sqrt{ab}} I_{1/2} \left(\frac{ab}{t} \right) b^2, \quad t > 0, \quad a, b > 0. \quad (4)$$

Если $1 > t > s > 1/2$ и $0 < a, b$, то, используя марковское свойство функции $r_+(1-t)$ ($t \geq 1/2$), находим, что

$$\begin{aligned}
 P_0 \left\{ r_+(1-t) \in db \mid r_+(1-\theta): \frac{1}{2} \leq \theta \leq s \right\} &= \\
 &= \frac{g^+(1-t, 0, b)}{g^+(1-s, 0, a)} g^+(t-s, b, a) db = \\
 &= \frac{e^{-(a^2+b^2)/2(t-s)}}{(t-s)\sqrt{ab}} I_{1/2} \left(\frac{ab}{t-s} \right) \left(\frac{1-s}{1-t} \right)^{3/2} \frac{e^{-b^2/2(1-t)}}{e^{-a^2/2(1-s)}} b^2 db \equiv \\
 &\equiv h(s, a, t, b) db. \quad (5)
 \end{aligned}$$

(Здесь $a = r_+(1-s)$.)

¹⁾ $I_{1/2}(\xi) = (2/\pi\xi)^{1/2} \operatorname{sh} \xi$.

Поскольку $e^{(1/2)}$ и $e_1^{(1/2)}$ имеют одинаковое распределение [см. (1a) и (2b)], из формулы (5) вытекает, что $e(t)$ ($t \geq 1/2$) совпадает по распределению с $e_1(t)$ ($t \geq 1/2$). Чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что распределения процессов e и e_1 обладают симметрией относительно $t = 1/2$.

Покажем применение этого результата к тонкой структуре одномерной стандартной броуновской траектории.

А. Дворецкий и П. Эрдеш [1] доказали, что если $0 \leq f$ и $t^{-1/2}f(t) \in \uparrow$ для малых t , то

$P_0\{r(t) > f(t), t \downarrow 0\} = 0$ или 1 в зависимости от того,

$$\int_{+0}^1 t^{-3/2}f(t) dt = +\infty \text{ или } < +\infty, \quad (6)$$

где P_0 — винеровская мера, соответствующая трехмерному броуновскому движению, начинающемуся в 0^1 . Теперь, используя определение (2.9.1) нормированных броуновских экскурсий и тот факт, что

$$|\mathfrak{Z}_n|^{-1/2} \int_0^1 t^{-3/2}f(|\mathfrak{Z}_n|t) dt = \int_0^{|\mathfrak{Z}_n|} t^{-3/2}f dt,$$

находим, что

$$P_0\{x(t, w_{\text{inf}}^+ \mathfrak{Z}_n) > f(t), t \downarrow 0, n \geq 1\} = 0 \text{ или } 1$$

$$\text{в зависимости от того, } \int_{+0}^1 t^{-3/2}f(t) dt = +\infty \text{ или } < +\infty, \quad (7)$$

где P_0 — винеровская мера, соответствующая теперь одномерному броуновскому движению, начинающемуся в 0, а \mathfrak{Z}_n ($n \geq 1$) — смежные интервалы множества $\mathfrak{Z} = \{t: x(t) = 0\}$. Например,

$$P_0\left\{|x(t, w_{\text{inf}}^+ \mathfrak{Z}_n)| > \frac{\sqrt{t}}{\ln \frac{1}{t} \ln_2 \frac{1}{t} \dots \left(\ln_n \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}}, t \downarrow 0, n \geq 1\right\} =$$

$$= 0 \text{ или } 1 \text{ в зависимости от того, } \varepsilon \leq 0 \text{ или } \varepsilon > 0. \quad (8)$$

В соответствии с формулой (2.7.8a), имеем

$$P_0\left\{\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{r(t)}{\sqrt{2t \ln_2 \frac{1}{t}}} = 1\right\} = 1, \quad (9)$$

¹⁾ Доказательство формулы (6) см. в § 4.12.

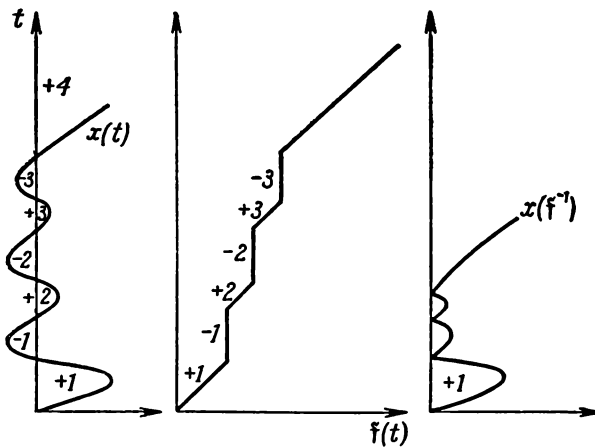
откуда получаем

$$P_0 \left\{ \lim_{t \downarrow 0} \frac{|\mathfrak{B}_n|^{-1/2} |x(t | \mathfrak{B}_n, w_{\text{inf}}^+ \mathfrak{B}_n)|}{\sqrt{2t \ln_2 \frac{1}{t}}} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{|x(t, w_{\text{inf}}^+ \mathfrak{B}_n)|}{\sqrt{2t \ln_2 \frac{1}{t}}} = 1, n \geq 1 \right\} = 1. \quad (10)$$

Формула (10) дает оценку снизу для скорости отхода броуновского движения от 0 при экскурсиях, тогда как (8) оценивает эту скорость сверху.

2.11. Замена времени

Пусть дано стандартное одномерное броуновское движение, начинающееся в 0. Разложение, введенное в § 2.9, можно использовать для доказательства следующего факта. Если \tilde{t}^{-1} — функция,



Р и с. 1.

обратная к $\tilde{t}(t) = \text{mes} \{s: x(s) \geq 0, s \leq t\}$, то процесс $[x(\tilde{t}^{-1}), P_0]$ совпадает по распределению с броуновским движением с отражением $[x^+ = |x|, P_0]$, введенным в § 2.1.

Если дана броуновская траектория, начинающаяся в 0, выбросим все отрицательные экскурсии и сдвинем положительные экскурсии вниз по оси времени так, чтобы пробелы сомкнулись, как показано на рис. 1; определенная таким образом траектория есть $x(\tilde{t}^{-1})$, и из чертежа ясно, что для доказательства идентичности

полученного процесса и броуновского движения с отражением достаточно показать, что случайное множество $\mathcal{Z}^* = \{t: x(\bar{f}^{-1}(t)) = 0\} = \bar{f}(\mathcal{Z}^+)$ совпадает по распределению с $\mathcal{Z}^+ = \{t: x^+(t) = 0\}$.

Множество $\bar{f}(\mathcal{Z}^+)$ является замыканием множества $\bar{f}t^{-1}[0, +\infty)$, где t^{-1} — непрерывная слева функция, обратная к локальному времени t^+ для броуновского движения с отражением, определяемая как $\min\{s: t^+(s) \geq t\}$; поэтому достаточно показать, что $\bar{f}(t^{-1})$ является односторонним устойчивым процессом с показателем $1/2$.

Но процесс $\bar{f}(t^{-1})$ получается из t^{-1} выбрасыванием тех скачков, которые возникают из-за отрицательных экскурсий:

$$\bar{f}(t^{-1}(t)) = \sum_{\mathcal{Z}_n \subseteq [0, t^{-1}(t))} \frac{1}{2} (1 + e_n) |\mathcal{Z}_n|. \quad (1)$$

Выразим $t^{-1}(t)$ в виде пуассоновского интеграла $\int_0^{+\infty} lp([0, t) \times dl)$

(см. § 1.7). Используя тот факт, что e_n ($n \geq 1$) независимы друг от друга и от \mathcal{Z}^+ и принимают значения ± 1 с вероятностью $1/2$, получаем, что единственное, что происходит с пуассоновским процессом $p([0, t) \times dl)$, если не брать отрицательные экскурсии, — это то, что его скорость уменьшается вдвое (см. задачу 1). Следовательно, $\bar{f}(t^{-1})$ совпадает по распределению с $t^{-1}(t/2) = \int_0^{+\infty} lp([0, t/2) \times dl)$ ($t \geq 0$), и доказательство завершено.

Другой способ доказательства состоит в том, чтобы заметить, что $\bar{f}(t^{-1})$ — однородный процесс с независимыми приращениями (см. задачу 2), и, используя формулу (1), вычислить

$$\begin{aligned} E_0[e^{-\alpha \bar{f}(t^{-1}(t))}] &= E_0 \left[\prod_{\mathcal{Z}_n \subseteq [0, t^{-1}(t))} e^{-\alpha(1+e_n)|\mathcal{Z}_n|/2} \right] = \\ &= E_0 \left[\prod_{\mathcal{Z}_n \subseteq [0, t^{-1}(t))} \frac{1}{2} (1 + e^{-\alpha|\mathcal{Z}_n|}) \right] = E_0 \left[e^{\int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{1+e^{-\alpha l}}{2} \right) p([0, t) \times dl)} \right] = \\ &= e^{\int_0^{+\infty} \left(\frac{1+e^{-\alpha l}}{2} - 1 \right) \frac{dl}{\sqrt{2\pi l^3}}} = e^{-t\sqrt{2\alpha/2}}. \quad (2) \end{aligned}$$

Замены времени будут рассматриваться в § 5.1, 5.2 и 5.3; мы увидим, что рассмотренная нами замена не является каким-то особым случаем.

Задача 1. Пусть даны независимые случайные величины e_n ($n \geq 1$), $P\{e_n = -1\} = P\{e_n = +1\} = 1/2$, и независимый от них пуассоновский процесс со скачками величины 1, скоростью $\kappa > 0$ и моментами скачков $t_1 < t_2 < \dots$, подчиненными распределению $P\{t_n - t_{n-1} > t\} = e^{-\kappa t}$ ($n \geq 1$, $t_0 = 0$). Доказать, что

$$e(t) = \sum_{t_n \leq t} \frac{1}{2} (1 + e_n)$$

есть пуассоновский процесс со скоростью $\kappa/2$.

[Если даны непересекающиеся интервалы $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ длины d_1, d_2, \dots , то

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{t_n \in \Delta_1} \frac{1}{2}(1 + e_n) = j_1, \sum_{t_n \in \Delta_2} \frac{1}{2}(1 + e_n) = j_2, \dots\right\} &= \\ &= \sum_{\substack{n_1 \geq j_1 \\ n_2 \geq j_2}} P\left\{\sum_{t_n \in \Delta_1} 1 = n_1, \sum_{n \leq n_1} \frac{1}{2}(1 + e_n) = j_1, \right. \\ &\quad \left. \sum_{t_n \in \Delta_2} 1 = n_2, \sum_{n_1 < n \leq n_1 + n_2} \frac{1}{2}(1 + e_n) = j_2, \dots\right\} = \\ &= \sum_{\substack{n_1 \geq j_1 \\ n_2 \geq j_2}} \frac{(\kappa d_1)^{n_1}}{n_1!} e^{-\kappa d_1} \binom{n_1}{j_1} 2^{-n_1} \frac{(\kappa d_2)^{n_2}}{n_2!} e^{-\kappa d_2} \binom{n_2}{j_2} 2^{-n_2} \dots = \\ &= \frac{(\bar{\kappa} d_1)^{j_1}}{j_1!} e^{-\bar{\kappa} d_1} \frac{(\bar{\kappa} d_2)^{j_2}}{j_2!} e^{-\bar{\kappa} d_2} \dots, \end{aligned}$$

где $\bar{\kappa} = \kappa/2$.]

Задача 2. Доказать, что $f(t^{-1})$ — однородный процесс с независимыми приращениями.

[Согласно правилу сложения $t^{-1}(t) = t^{-1}(s) + t^{-1}(t-s, w_m^+)$ ($t > s$, $m = t^{-1}(s)$), имеем $f(t^{-1}(t)) - f(t^{-1}(s)) = f(t^{-1}(t-s, w_m^+), w_m^+)$ ($t > s$); кроме того, m — марковский момент, потому что $m < t$ означает, что $t^+ \geq s$ в какой-то момент до t . Если $t \leq s$, то

$$\{f(t^{-1}(t)) < b\} \cap \{m < a\} \in B_a,$$

т. е. $\{f(t^{-1}(t)) < b\} \in B_{m+0}(t \leq s)$. Отсюда вытекают однородность и независимость приращений $f(t^{-1})$, если только заметить, что броуновская частица начинает движение заново в 0 в момент $t = m$.]

ОБЩАЯ ОДНОМЕРНАЯ ДИФФУЗИЯ

3.1. Определение

Грубо говоря, одномерная диффузия — это модель (случайного) движения частицы по интервалу Q на прямой с *временем жизни* $m_\infty \leq +\infty$ (называемым также моментом убивания), непрерывной траекторией $x(t)$: $t < m_\infty$ и *отсутствием памяти*. Под *отсутствием памяти* подразумевается, что движение начинается заново в некоторые (марковские) моменты, к числу которых принадлежат все *постоянные* моменты $m \equiv s \geq 0$; т. е. если m — марковский момент, то при условии, что фиксировано положение частицы в настоящем $x(m)$, статистические свойства будущего движения $x(t+m)$ ($t \geq 0$) не зависят от прошлого $x(t)$ ($t \leq m$).

Прежде чем дать точно определение, введем следующие объекты:

Q — интервал на прямой;

∞ — изолированная точка, присоединенная к Q ;

ω — траектория $\omega: [0, +\infty) \rightarrow Q \cup \infty$ с координатами $x(t) = x(t, \omega) = x_t(\omega) \in Q \cup \infty$ и временем жизни $m_\infty = m_\infty(\omega) \leq +\infty$, причем

$$x(t) = \begin{cases} x(t \pm 0) \in Q, & t < m_\infty; \\ \infty, & t \geq m_\infty; \end{cases}$$

в частности, $x(+\infty) \equiv \infty$;

W — пространство всех таких траекторий;

B_s — наименьшая σ -алгебра подмножеств из W , содержащая $\{\omega: a \leq x(t) < b\}$ при любом выборе $t \leq s$ и $a < b$;

$B \equiv B_{+\infty}$;

P_a — функция, определенная на Q , значениями которой являются такие вероятностные меры на B , что $P_a(B)$ для любого $B \in B$ — борелевская функция от $a \in Q$ и для любого $a \in Q$ мера $P_a\{x(0) \in db\}$ состоит из единичной массы в точке $b = a$;

P_∞ состоит из единичной массы, сосредоточенной на единственной траектории $x(t) \equiv \infty$ ($t \geq 0$);

m — марковский момент, т. е. такая неотрицательная борелевская функция $m = m(\omega) \leq +\infty$ от траектории, что $\{\omega: m(\omega) < t\} \in B_t$ ($t \geq 0$);

w_m^+ — сдвинутая траектория $x(t, w_m^+) \equiv x(t+m, w)$ ($t \geq 0$);

B_{m+0} — σ -алгебра событий $B \in \mathcal{B}$, для которых $B \cap \{m < t\} \in \mathcal{B}_t$ ($t \geq 0$).

Говорят, что объекты Q, \mathcal{B}, P определяют движение D с интервалом состояний Q , пространством траекторий W и универсальной σ -алгеброй \mathcal{B} . Обозначение $P_a(B)$ читается так: *вероятность события B для траекторий, начинающихся в a* . Заметим, что

$$P_a \{ \lim_{t \downarrow 0} x(t) = x(0) = a \} = P_a \{ m_\infty > 0 \} \equiv 1 \quad (a \in Q).$$

Движение D называется *консервативным*, если $P_a \{ m_\infty < +\infty \} = 0$ ($a \in Q$).

Движение D называется *просто марковским*, если оно начинается заново в любой постоянный момент $t \geq 0$, т. е. если

$$P \{ w_t^+ \in B | \mathcal{B}_t \} = P_a(B), \quad a = x(t), \quad B \in \mathcal{B}, \quad (1a)$$

или, что то же, если

$$P \{ x(t) \in db | \mathcal{B}_s \} = P_a \{ x(t-s) \in db \}, \quad a = x(t), \quad t \geq s \geq 0. \quad (1b)$$

Движение D называется *строго марковским*, или *диффузией*, если оно начинается заново в любой марковский момент m , т. е. если

$$P \{ w_m^+ \in B | \mathcal{B}_{m+0} \} = P_a(B), \quad a = x(m), \quad B \in \mathcal{B}; \quad (2a)$$

или, что то же, если

$$P \{ x(t+m) \in db | \mathcal{B}_{m+0} \} = P_a \{ x(t) \in db \}, \quad a = x(m), \quad t \geq 0 \quad (2b)$$

(заметим, что $x(m) \equiv \infty$ при $m = +\infty$).

Пусть дан экспоненциальный случайный момент e с законом распределения $P \{ e > t \} = e^{-t}$. Если w^* — траектория

$$x^*(t) = \begin{cases} 0, & t < e; \\ t-e, & t \geq e, \end{cases} \quad (3)$$

и если P выбрано так, чтобы

$$P_0(B) = P \{ w^* \in B \}; \quad (4a)$$

$$P_a \{ x(t) \equiv a+t, \quad t \geq 0 \} \equiv 1, \quad a > 0, \quad (4b)$$

то определенное таким образом движение на $Q = [0, +\infty)$ является *просто марковским*, но не *строго марковским*. Действительно, $m \equiv \inf \{ t: x(t) > 0 \}$ — марковский момент;

$$P_0 \{ m > 0, \quad m(w_m^+) = 0, \quad x(m) = 0 \} = 1;$$

а если бы движение начиналось заново в момент m , то вероятность $P_0\{m > 0, m(\omega_m^+) = 0\}$ была бы равна $P_0\{m > 0\} P_0\{m = 0\} = 0$, что невозможно.

Пусть даны два движения D и D^* . Пусть f — борелевская функция, отображающая часть интервала Q на Q^* , а \bar{f} — борелевская функция, отображающая $\{\omega: x(0, \omega) \in f^{-1}(Q^*)\}$ в пространство траекторий движения D^* , причем

$$f[x(0, \omega)] = x(0, \bar{f}\omega), \quad x(0, \omega) \in f^{-1}(Q^*); \quad (5a)$$

$$P_a(\bar{f}^{-1}B^*) = P_b(B^*), \quad a \in f^{-1}(b), \quad B^* \in \mathbf{B}^*; \quad (5b)$$

тогда $\{\bar{f}\omega, P_{f^{-1}(b)}: b \in Q^*\}$ называется *нестандартным* описанием движения D^* в противоположность *стандартному* описанию, использовавшемуся ранее. Например, если D — стандартное одномерное броуновское движение, то

$$x^+(t) = |x(t)|, \quad t \geq 0; \quad (6a)$$

$$x^-(t) = \begin{cases} x(t), & t < m_0, \\ t^-(t) - x(t), & t \geq m_0, \end{cases} \quad (6b)$$

$$t^-(t) = \max_{m_0 \leq s \leq t} x(s);$$

$$x^*(t) = x(\bar{f}^{-1}t), \quad (6c)$$

$$\bar{f}(t) = \text{mes}\{s: x(s) \geq 0, s \leq t\}$$

— это три различных нестандартных описания броуновского движения с отражением (см. § 2.1 и 2.12); другие примеры нестандартного описания можно найти в § 2.3 (броуновское движение с эластичным экраном), § 2.10 (бесселевское движение) и в приводимой ниже задаче 2.

Выбор описания движения зависит от рассматриваемой задачи; например, нестандартные описания (6a) и (6b) были полезны при рассмотрении броуновского локального времени $t(t, 0)$ (см. § 2.2); но доказательство того, что движение начинается заново в марковский момент, лучше всего производить в стандартном описании (см. § 3.9, 5.2 и вторую часть задачи 3).

Задача 1. Доказать, что в формуле (2a) содержится блюменталевский закон 0 — 1:

$$P_*(B) = 0 \text{ или } 1, \quad B \in \mathbf{B}_{+0} (= \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbf{B}_\varepsilon).$$

[$m \equiv 0$ — марковский момент; поэтому для $B \in \mathbf{B}_{+0}$

$$P_*(B) = P_*(B, \omega_0^+ \in B) = E_*(B, P_*(\omega_0^+ \in B | \mathbf{B}_{+0})) = P_*(B)^2.]$$

Задача 2. Выяснить соответствие между марковскими моментами \mathfrak{m} и σ -алгебрами $\mathbf{B}_{\mathfrak{m}+0}$ для

- стандартного одномерного броуновского движения;
- его нестандартного описания как броуновского движения с измененным масштабом

$$[x^*(t) = cx\left(\frac{t}{c^2}\right): t \geq 0, P_{\xi/c}: \xi \in R^1].$$

$[B_i \equiv \mathbf{B}\{x^*(s): s \leq t\} = \mathbf{B}_{t/c^2}$, поэтому если \mathfrak{m}^* — марковский момент для движения с измененным масштабом, т. е. если $\{\mathfrak{m}^* < t\} \in B_i (t \geq 0)$, то $\{c^{-2}\mathfrak{m}^* < t\} = \{\mathfrak{m}^* < c^2 t\} \in B_t (t \geq 0)$; т. е. $\mathfrak{m} = c^{-2}\mathfrak{m}^*$ — марковский момент для первоначального движения, и

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathfrak{m}^*+0} &= \{B: B \cap \{\mathfrak{m}^* < t\} \in B_i, t \geq 0\} = \\ &= \mathbf{B}_{\mathfrak{m}+0} = \{B: B \cap \{\mathfrak{m} < t\} \in B_t, t \geq 0\}. \end{aligned}$$

Задача 3. Доказать, что броуновское движение с отражением из § 2.1, броуновское движение с эластичным экраном из § 2.3 и бесселевские движения из § 2.9 являются диффузиями (для случая броуновского движения с эластичным экраном использовать стандартное описание).

3.2. Марковские моменты

Рассмотрим некоторые интересные свойства марковских моментов.

Пусть дано $t \geq 0$; определим *остановленную траекторию* $x(s, \omega_i) = x(t \wedge s, \omega) (s \geq 0)$ и σ -алгебру $\mathbf{B}_i = \mathbf{B} \cap \{B: \omega \in B \Rightarrow \omega_i \in B\}^1$. Докажем, что

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_t. \quad (1)$$

Так как \mathbf{B}_i при любом выборе $b \in R^1$ и $s \leq t$ содержит $\{\omega: x(s) < b\}$, то $\mathbf{B}_i \subseteq \mathbf{B}_t$. Что касается обратного включения, то пусть \mathbf{B}^* есть σ -алгебра $\mathbf{B} \cap \{B: \{\omega: \omega_i \in B\} \in \mathbf{B}_t, t \geq 0\}$; тогда $\{\omega: x(s) < b\} \in \mathbf{B}^*$ при любом выборе $b \in R^1$ и $s \geq 0$. Это означает, что $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}$, откуда следует, что если $B \in \mathbf{B}_i$, то $B = \{\omega: \omega_i \in B\} \in \mathbf{B}_t$, что нам и было нужно.

А. Р. Гальмарино указал нам доказательство следующего полезного факта. *Неотрицательная борелевская функция $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\omega) \leq +\infty$ является марковским моментом тогда и только тогда, когда из*

$$x_s(u) = x_s(v), \quad s < t, \quad (2a)$$

$$\mathfrak{m}(u) < t \quad (2b)$$

вытекает

$$\mathfrak{m}(u) = \mathfrak{m}(v). \quad (3)$$

¹⁾ Символ \Rightarrow означает «тогда и только тогда, когда». — Прим. перев.

Для доказательства рассмотрим марковский момент m , траектории u и v , удовлетворяющие условиям (2), и какой-нибудь момент $s < t$. Так как $B = \{w: m < s\} \in B_s = B_s^+$, то из (2a) сразу следует, что $m(u) < s \leq m(u_s^+) < s \leq m(v_s^+) < s \leq m(v) < t$; в силу (2b) равенство (3) справедливо. Обратно, пусть $0 \leq m \leq +\infty$ — борелевская функция и из (2) следует (3); тогда $m(w) < t \leq m(w_i) < t$, т. е. $\{w: m < t\} \in B_t^+ = B_t$, что показывает, что m действительно является марковским моментом.

С помощью результата Гальмарино легко показать, что класс марковских моментов замкнут относительно операций

$$m_1 \wedge m_2; \quad (4a)$$

$$m_1 \vee m_2; \quad (4b)$$

$$m_n \downarrow m; \quad (5a)$$

$$m_n \uparrow m; \quad (5b)$$

$$m_1 + m_2; \quad (6a)$$

$$m_1 + m_2(w_{m_1}^+); \quad (6b)$$

$$m_2(w_{m_1}^*); \quad (6c)$$

Рассмотрим, например, доказательство того, что (6b) — марковский момент.

Пусть даны марковские моменты m_1 и m_2 , и $m \equiv m_1 + m_2(w_{m_1}^+)$. Если $x_s(u) = x_s(v)$ ($s < t$) и $t > m(u)$, то $t > m_1(u)$, откуда $m_1(u) = m_1(v)$. Кроме того,

$$x_s(u_\theta^+) = x_s(v_\theta^+), \quad s < t - \theta, \quad \theta = m_1(u) = m_1(v), \quad (7a)$$

$$m_2(u_\theta^+) < t - \theta, \quad (7b)$$

откуда $m_2(u_\theta^+) = m_2(v_\theta^+)$. Складывая, получаем

$$m(u) = m_1(u) + m_2(u_\theta^+) = m_1(v) + m_2(v_\theta^+) = m(v), \quad (8)$$

и доказательство закончено.

Как в § 1.7, рассмотрим σ -алгебру ¹⁾

$$B_{m+0} = B \cap \{B: B \cap \{m < t\} \in B_t, \quad t \geq 0\}.$$

Относительно этой σ -алгебры измерим момент m ; B_{m+0} удовлетворяет соотношениям

$$B_{m_1+0} \subseteq B_{m_2+0}, \quad m_1 \leq m_2; \quad (9a)$$

$$\bigcap_{n \geq 1} B_{m_n+0} = B_{m+0}, \quad m_n \downarrow m; \quad (9b)$$

$$B_{m+0} \supseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} B \{x(t \wedge (m + \varepsilon)): t \geq 0\} \quad (10a)$$

¹⁾ $\{m < t\}$ — сокращенная запись для $\{w: m < t\}$.

и даже

$$B_{m+0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B \{x(t \wedge (m + \varepsilon)): t \geq 0\} \quad (10b)$$

(см. задачу 1); кроме того, как мы сейчас докажем,

$$B_{m+0} = B \cap \{B: \omega \in B \not\Rightarrow \omega_i \in B, t > m(\omega)\}. \quad (10c)$$

Пусть дано $B \in \mathbf{B}$, причем $\omega \in B \not\Rightarrow \omega_i \in B$ при $t > m(\omega)$. Тогда, как вытекает из формулы (1), множество $B \cap \{m < t\} = \{\omega: \omega_i \in B\} \cap \{m < t\}$ является элементом алгебры \mathbf{B}_t , т. е. $B \in \mathbf{B}_{m+0}$. Что касается обратного включения, пусть $B \in \mathbf{B}_{m+0}$; тогда $B \cap \{m < t\} \in \mathbf{B}_t$, и, применяя теорему Гальмарино в случае $t > m(\omega)$, получаем, что $\omega \in B \not\Rightarrow \omega \in B \cap \{m < t\} \not\Rightarrow \omega_i \in B \cap \{m < t\} \not\Rightarrow \omega_i \in B$, и доказательство закончено.

Задача 1. Доказать, что $B_{m+0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B \{x(t \wedge (m + \varepsilon)): t \geq 0\}$ (см. (10b)).

[Пусть дано $B \in \mathbf{B}_{m+0}$; в силу (10c) $\omega \in B \not\Rightarrow \omega_i \in B$ на множестве $\{m < t\}$. Так же, как при доказательстве равенства (1), получаем отсюда, что $B \in B \{x(t \wedge (m + \varepsilon)): t \geq 0\}$.]

Задача 2. Доказать, что σ -алгебры \mathbf{B}_{m+0} и $\mathbf{B} \{x(t, \omega_m^+): t \geq 0\}$ порождают всю универсальную σ -алгебру \mathbf{B} .

$$[x(t) = x(t \wedge m) \cdot \chi_{\{m \geq t\}} +$$

$$+ \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k2^{-n} < t} x(t - (k-1)2^{-n}, \omega_m^+) \cdot \chi_{\{(k-1)2^{-n} \leq m < k2^{-n}\}}]$$

для любого $t \geq 0$ ¹⁾; далее используйте то, что m и $x(t \wedge m)$ измеримы относительно \mathbf{B}_{m+0} .]

Задача 3. Доказать, что

$$m_\infty = \min \{t: x(t) = \infty\},$$

$$m_{0\infty} = \inf \{t: x(t) > 0\},$$

$$m_0 = \min \{t: x(t) = 0\},$$

$$m_{+0} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \min \{t: x(t) = \varepsilon\}$$

— марковские моменты.

$$[\{m_\infty < t\} = \bigcup_{k2^{-n} < t} \{\omega: x(k2^{-n}) = \infty\} \in \mathbf{B}_t,$$

т. е. m_∞ — марковский момент. Аналогично доказывается, что $m_{0\infty}$ — марковский момент. Утверждение относительно m_0 следует

¹⁾ χ_A — характеристическая функция множества A . — Прим. перев.

из того, что $m_0 < t$ означает, что траектория стремится к 0 вдоль какой-то убывающей последовательности моментов $k2^{-n} < t$, а относительно m_{+0} — из того, что $m_{+0} < t$ означает, что точки $x(k2^{-n})$: $k2^{-n} < t$ накапливаются к 0 сверху.]

Задача 4. Если m — марковский момент, то $P_0\{m > 0\} = 0$ или 1.

$$\{m > 0\} = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \{m \geq n^{-1}\} \in \bigcap_{m \geq 1} B_{m-1} = B_{+0};$$

далее используйте блютенталевский закон 0 — 1.]

Задача 5. Доказать, что $\{m_1 < m_2\} \in B_{m_1+0}$.

$$\begin{aligned} \{m_1 < m_2\} \cap \{m_1 < t\} &= \{m_1 < m_2 < t\} \cup \{m_1 < t \leq m_2\} = \\ &= \{m_1(w_i) < m_2(w_i) < t\} \cup \{m_1 < t \leq m_2\} \in B_t \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

в силу соотношения (1) и теоремы Гальмарино.]

Задача 6. Доказать, что $m_1(w_{m_2}^*) \wedge m_2 = m_1 \wedge m_2$.

[Применим теорему Гальмарино. Если $m_1 < m_2$, то $m_1(w_{m_2}^*) = m_1$, а если $m_1 \geq m_2$, то или $m_1(w_{m_2}^*) \geq m_2$, или $m_1(w_{m_2}^*) < m_2$; но в последнем случае $m_1 = m_1(w_{m_2}^*) < m_2$, что противоречит тому, что $m_1 \geq m_2$.]

Задача 7. Показать, что для момента выхода $m = \inf\{t: x(t) \neq 0\}$

$$P_0\{m > t\} = e^{-\kappa t}, \quad 0 \leq \kappa \leq +\infty, \quad t \geq 0,$$

и что при $\kappa < +\infty$

$$P_0\{m = m_\infty\} = 1.$$

[Так как $\{m > s\} \in B_{s+0}$ ($s \geq 0$), то m есть марковский момент и $P_0\{m > t + s\} = P_0\{m > s, m(w_s^+) > t\} = P_0\{m > s\} P_0\{m > t\}$, откуда следует $P_0\{m > t\} = e^{-\kappa t}$. Пусть $\kappa < +\infty$, тогда $P_0\{m > 0\} = 1$, и так как $m \leq m_\infty$, то, учитывая $\{m < m_\infty\} \in B_{m+0}$ (см. задачу 5), получаем $P_0\{m < m_\infty\} = P_0\{m < m_\infty, m(w_m^+) = 0\} \leq P_0\{m = 0\} = 0$.]

Задача 8 (продолжение задачи 7). В случае когда $P_0\{m = 0\} = 1$ ($\kappa = +\infty$), множество $\mathcal{Z} = \{t: x(t) = 0\}$ не имеет внутренних точек.

3.3. Некоторые локальные характеристики диффузии

Пусть $a \leq b \leq c$. Если $x(0) = a$, то $m_c = m_b + m_c(w_m^+)$ ($m = m_b$), а так как величина m измерима относительно B_{m+0} и траектория начинается заново в момент $t = m$ в точке $x(m) = b$, то

$$E_a(e^{-m_c}) = E_a[e^{-m_b} E_a(e^{-m_c(w_m^+)} | B_{m+0})] = E_a(e^{-m_b}) E_b(e^{-m_c}). \quad (1)$$

Поэтому функция $E_a(e^{-mb})$ монотонна по a и b ($a \leq b$), что доказывает существование пределов

$$e_1 = \lim_{b \downarrow a} E_a(e^{-mb}) = E_a(e^{-ma+0}); \quad (2a)$$

$$e_2 = \lim_{b \downarrow a} \lim_{c \downarrow a} E_c(e^{-mb}) = \lim_{b \downarrow a} E_{a+0}(e^{-mb}); \quad (2b)$$

$$e_3 = \lim_{b \downarrow a} E_b(e^{-ma}) = E_{a+0}(e^{-ma}); \quad (2c)$$

$$e_4 = \lim_{b \downarrow a} E_b(e^{-ma+0}). \quad (2d)$$

Здесь $m_{a+0} \equiv \lim_{b \downarrow a} m_b$, т. е. $m_{a+0} = \inf \{t: x(t) > a\}$ или $\min \{t: \lim_{s \uparrow t} x(s) = a\}$ в зависимости от того, $x(0) \leq a$ или $x(0) > a$.

Мы сейчас докажем, что

$$e_1 = 0 \text{ или } 1; \quad (3a)$$

$$e_2 = 0 \text{ или } 1; \quad (3b)$$

$$e_4 = 0 \text{ или } 1; \quad (3c)$$

$$e_1 = e_1 e_2 \leq e_2; \quad (4a)$$

$$e_3 = e_3 e_4 \leq e_4; \quad (4b)$$

$$e_1 e_3 = e_2 e_4. \quad (5)$$

Пусть дана траектория, выходящая из a . Введем обозначение $m = m_{a+0} = \inf \{t: x(t) > a\}$; тогда при $m < +\infty$ имеем $m(w_m^+) = 0$ и $x(m) = a$. Поэтому

$$\begin{aligned} e_1 &= E_a(e^{-ma+0}) = \\ &= E_a\{e^{-m}, m < +\infty, x(m) = a, E_a(e^{-m(w_m^+)} | B_{m+0})\} = e_1^2, \end{aligned} \quad (6)$$

что доказывает формулу (3a). Формула (3b) вытекает из

$$\begin{aligned} e_2 &= \lim_{b \downarrow a} E_{a+0}(e^{-mb}) = \lim_{b \downarrow a} \lim_{c \downarrow a} E_{a+0}(e^{-mc}) E_c(e^{-mb}) = \\ &= e_2 \lim_{b \downarrow a} E_{a+0}(e^{-mb}) = e_2^2, \end{aligned} \quad (7)$$

а (3c)—из

$$\begin{aligned} e_4 &= \lim_{b \downarrow a} E_b(e^{-ma+0}) = \lim_{b \downarrow a} \lim_{c \downarrow a} E_b(e^{-mc}) E_c(e^{-ma+0}) = \\ &= \lim_{b \downarrow a} E_b(e^{-ma+0}) e_4 = e_4^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Формулы (4a) и (4b) тривиальны. Доказательство формулы (5) основывается на том, что если $x(0) > a$, то из $m_a > m_{a+0}$ следует $+\infty = m_a > m_{a+0} = m_\infty$. Используя это, получаем:

$$\begin{aligned} e_1 e_3 &= \lim_{b \downarrow a} \lim_{c \downarrow a} E_c \{e^{-m_a} e^{-m_b(w_{m_a}^+)}\} = \\ &= \lim_{b \downarrow a} \lim_{c \downarrow a} E_c \{e^{-m_{a+0}} e^{-m_b(w_{m_{a+0}}^+)}\} = \\ &= \lim_{b \downarrow a} \lim_{c \downarrow a} \lim_{d \downarrow a} E_c \{e^{-m_d} e^{-m_b(w_{m_d}^+)}\} = 1) \\ &= \lim_{b \downarrow a} \lim_{c \downarrow a} \lim_{d \downarrow a} E_c(e^{-m_d}) E_d(e^{-m_b}) = e_2 e_4. \quad (9) \end{aligned}$$

Теперь мы в состоянии доказать следующие соотношения (в которых $\varepsilon > 0$ можно выбрать произвольно):

$$e_1 = P_a \{m_{a+0} < +\infty\} = P_a \{m_{a+0} = 0\}; \quad (10a)$$

$$e_2 = \lim_{b \downarrow a} P_{a+0} \{m_b < \varepsilon\}; \quad (10b)$$

$$e_3 = \lim_{b \downarrow a} P_b \{m_a < +\infty\} = \lim_{b \downarrow a} P_b \{m_a < \varepsilon\}; \quad (10c)$$

$$e_4 = \lim_{b \downarrow a} P_b \{m_{a+0} < +\infty\} = \lim_{b \downarrow a} P_b \{m_{a+0} < \varepsilon\}. \quad (10d)$$

Действительно, (10a), (10b) и (10d) вытекают из законов 0—1, выражаемых формулами (3a), (3b) и (3c), и из того факта, что при $a \leq b$ функции $P_a \{m_b < +\infty\}$ и $P_a \{m_b < \varepsilon\}$ монотонны по a и b . Формула (10c) получается из

$$\begin{aligned} 0 &\leq P_b \{m_a < +\infty\} - E_b(e^{-m_a}) = \\ &= P_b \{m_a < +\infty\} - E_b \{e^{-m_{a+0}}, m_a < +\infty\} = \\ &= E_b \{1 - e^{-m_{a+0}}, m_a < +\infty\} \leq \begin{cases} E_b(1 - e^{-m_{a+0}}) \downarrow 0 \text{ при } b \downarrow a, \\ \text{если } e_4 = 1; \\ P_b \{m_a < +\infty\} = 0 \text{ при } b > a, \\ \text{если } e_4 = 0, \end{cases} \quad (11) \end{aligned}$$

¹⁾ $\lim_{d \downarrow a} [m_d + m_b(w_{m_d}^+)] = \lim_{d \downarrow a} \min \{t: x(t) = b, t > m_d\} = \min \{t: x(t) = b, t > m_{a+0}\} = m_{a+0} + m_b(w_{m_{a+0}}^+).$

и

$$\begin{aligned}
 P_b \{ \varepsilon \leq m_a < +\infty \} &\leq P_b \{ \varepsilon \leq m_{a+0} < +\infty \} \leq \\
 &\leq \begin{cases} P_b \{ \varepsilon \leq m_{a+0} \} \downarrow 0 \text{ при } b \downarrow a, \text{ если } e_4 = 1; \\ P_b \{ m_{a+0} < +\infty \} = 0 \text{ при } b > a, \text{ если } e_4 = 0. \end{cases} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Возможны $2^3 = 8$ комбинаций значений e_1, e_2, e_4 ; три из них нарушают справедливость соотношений (4а), (4б) и (5), и остается 5 возможных случаев:

e_1	e_2	e_3	e_4
1	1	1	1
1	1	0	0
0	1	0	0
0	0		1
0	0	0	0

(значения e_3 можно получить из формул (4б) и (5); оставленное пустым место означает, что возможны все значения $0 \leq e_3 \leq 1$).

Рассмотрим теперь соответствующие *левые пределы* e_1^-, e_2^-, \dots и положим $e_1 = e_1^+, e_2 = e_2^+, \dots$. Возможны $5^2 = 25$ комбинаций значений e_1^-, e_2^-, e_4^- и e_1^+, e_2^+, e_4^+ . Три комбинации противоречат тому факту, что из $e_1^- e_1^+ = 1$ вытекает $e_3^- e_3^+ = 1$ (см. задачу 1), и остается 22 возможных случая.

Задача 1. Доказать, что $e_3^- e_3^+ = 1$, если $e_1^- e_1^+ = 1$.

$$\begin{aligned}
 [1 = e_1^- = E_a(e^{-m_{a-0}}) = \lim_{c \uparrow a} E_a(e^{-m_c}) = \\
 = \lim_{c \uparrow a} E_a[e^{-m_{a+0}} e^{-m_c(w_{m_{a+0}}^+)}] = \\
 = \lim_{c \uparrow a} \lim_{b \downarrow a} E_a[e^{-m_b - m_c(w_{m_b}^+)}] \leq \lim_{b \downarrow a} E_b(e^{-m_a}) = e_3^+, \text{ как в (9), и т. д.}]
 \end{aligned}$$

Задача 2. Дать конкретные примеры 5 возможных комбинаций значений $e_1^\pm, e_2^\pm, e_3^\pm, e_4^\pm$.

3.4. Сингулярные точки

Имея в виду закон 0 — 1

$$e_\xi^\pm = P_\xi \{ m_{\xi \pm 0} = 0 \} = 0 \text{ или } 1, \quad (1)$$

дадим следующие определения. Точка $\xi \in Q$ называется *регулярной*, если $e_1^- = e_1^+ = 1$; *сингулярной* ($\xi \in K_- \cup K_+$), если $e_1^- e_1^+ = 0$; *левосингулярной* ($\xi \in K_-$), если $e_1^+ = 0$; *правосингулярной* ($\xi \in K_+$), если $e_1^- = 0$; *точкой левого переноса*, если $e_1^- = 1$, а $e_1^+ = 0$; *точкой пра-*

вого переноса, если $e_1^- = 0$, а $e_1^+ = 1$; ловушкой ($\xi \in K_- \cap K_+$), если $e_1^- = e_1^+ = 0$.

Множество K_- (левосингулярных точек) замкнуто справа в Q , что означает, что если последовательность левосингулярных точек $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$ стремится к $a \in Q$, то точка a также левосингулярна. Действительно, в этом случае $P_a\{m_b < +\infty\} = 0$ ($a < b$), потому что интервал (a, b) содержит точки, которые нельзя пройти слева направо.

Множество K_+ (правосингулярных точек) замкнуто слева в Q , т. е. если последовательность правосингулярных точек $b_1 < b_2 < b_3 < \dots$ стремится к $a \in Q$, то a также правосингулярна; доказательство такое же.

K_- и K_+ — борелевские множества; докажем это, например, для K_+ . Пусть точки a_1, a_2, \dots образуют множество, плотное в K_+ и содержащее все точки из K_+ , изолированные слева. Тогда из того, что K_+ замкнуто слева в Q , вытекает, что

$$K_+ = Q \cap \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} [a_n, a_n + m^{-1}].$$

Множество $Q \setminus [K_- \cup K_+]$ (регулярных точек) открыто на прямой (т. е. не только относительно Q). Действительно, если точка ξ регулярна, то $e_1^- = e_1^+ = 1$, откуда $e_3^- = e_3^+ = 1$ или, что то же, $P_a\{m_b < +\infty\} P_b\{m_a < +\infty\} > 0$ для каких-то $a < \xi < b$, и тогда целая окрестность (a, b) должна не содержать сингулярных точек.

Поэтому множество $K_- \cup K_+$ (сингулярных точек) замкнуто в Q .

3.5. Разложение общей диффузии на простые куски

Пусть дана диффузия D . Если вероятность $P_a\{m_b < +\infty\}$ или $P_b\{m_a < +\infty\}$ положительна, говорят, что между a и b есть прямое сообщение; если есть конечная цепь точек c_1, c_2, \dots , ведущая от a к b , причем между c_1 и c_2 , c_2 и c_3 , ... есть прямое сообщение, то говорят, что между a и b есть не прямое сообщение. На интервале Q отношение (непрямого) сообщения обладает следующими свойствами: любая точка сообщается сама с собой; если a сообщается с b , то и b сообщается с a ; если a сообщается с b , а b с c , то сообщаются также a и c .

Поэтому Q расщепляется на несообщающиеся классы Q^* , причем в пределах каждого класса действует (не прямое) сообщение; это расщепление индуцирует расщепление D на отдельные самостоятельные диффузии

$$D^* = [W^* = W(Q^*), V^* = V(W^*), P_a^* = P_a: a \in Q^*].$$

Если Q^* состоит из единственной точки 0, то диффузия D^* тривиальна, ибо тогда

$$P_0\{x(t) = 0, t < m_\infty\} = 1;$$

функция $f(t) = P_0 \{m_\infty > t\} = P_0 \{x(s) = 0, s \leq t\}$ удовлетворяет условию

$$f(t+s) = E_0 \{m_\infty > s, x(s) = 0, P_0 \{m_\infty(w_s^+) > t \mid B_s\}\} = f(t)f(s), \quad (1)$$

поэтому

$$P_0 \{m_\infty > t\} = e^{-\kappa t}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \kappa < +\infty. \quad (2)$$

Если Q^* — не точка, то это интервал, потому что если $a, b \in Q^*$, то из существования сообщения между ними следует, что каждая точка интервала (a, b) сообщается с a ; таким образом, $[a, b] \subseteq Q^*$, откуда вытекает сделанное утверждение.

Рассмотрим (открытое) множество регулярных точек в Q^* ; разобьем его на непересекающиеся открытые интервалы. Выделим *особые интервалы*, концы которых — точки переноса с противоположными направлениями переноса. Назовем концы особых интервалов и ловушки, принадлежащие внутренности множества Q^* , *особыми сингулярными точками*.

Пусть даны особые сингулярные точки $c_1 > c_2 > c_3 > \dots$, сходящиеся к точке a , принадлежащей внутренности множества Q^* ; тогда

$$P_a \{m_{a+0} < +\infty\} = P_{a+0} \{m_a < +\infty\} = 0,$$

что противоречит тому, что между $Q^* \cap \{b \leq a\}$ и $Q^* \cap \{b > a\}$ есть (непрямое) сообщение. Применяя аналогичное рассуждение к особым сингулярным точкам $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$, сходящимся к точке a из внутренности множества Q^* , получаем, что в любом замкнутом подинтервале из Q^* содержится конечное число особых сингулярных точек.

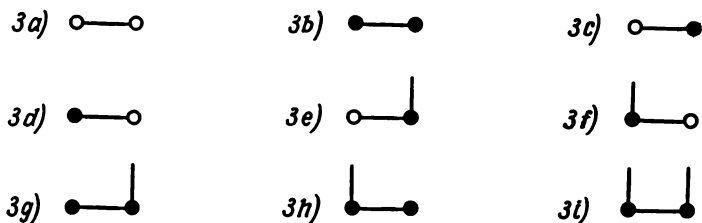
Таким образом, Q^* делится рядом особых сингулярных точек на неперекрывающиеся интервалы Q^* (замкнутые в точках деления), причем в пределах каждого интервала действует (непрямое) сообщение, а внутри они не содержат особых сингулярных точек.

Интервал Q^* либо не содержит внутренних сингулярных точек, либо содержит внутри точки переноса ровно одного рода. Действительно, если внутри Q^* есть две точки переноса $c_1 < c_2$ с противоположными направлениями переноса, то существует максимальная точка переноса $c_1 \leq c_3 < c_2$ того же рода, что c_1 , и минимальная точка переноса $c_3 < c_4 \leq c_2$ того же рода, что c_2 ; и либо (c_3, c_4) — особый интервал, что противоречит выбору Q^* , либо интервал (c_3, c_4) содержит сингулярные точки, что противоречит выбору c_3 или c_4 .

Рассмотрим далее момент выхода $e = \inf \{t: x(t) \notin Q^*\}$.

Движение $D^* = [x(t, w_e^+); t \geq 0, P_a^* = P_a: a \in Q^*]$ само по себе является диффузией (см. § 3.9); частица, начинающая движение в интервале $Q^* = Q_i^*$, совершает соответствующую диффузию $D^* =$

$= D_1$ вплоть до момента выхода $e = e_1 (\leq +\infty)$. Если $e_1 < +\infty$, она входит в новый интервал $Q^* = Q_2^*$ (причем никогда не возвращается в $Q_1^* \setminus Q_2^*$), совершает соответствующую диффузию D_2^* вплоть до момента выхода $e_2 (\leq +\infty)$ и т. д.¹⁾ Таким образом, D^* разлагается на более простые диффузии D^* . С точностью до замены направления отсчета на интервалах Q^* с внутренними левосингулярными точками получается 9 отдельных случаев:



Здесь \bigcirc — и $—\bigcirc$ означают концевые точки, не принадлежащие Q^* ; \bullet — и $—\bullet$ —концевые точки, принадлежащие $Q^* \setminus (K_- \cap K_+)$, а \bullet — \bullet —концевые точки, принадлежащие $Q^* \cap (K_- \cap K_+)$. Во всех случаях в интервале Q^* действует (непрямое) сообщение, и внутри него нет левосингулярных точек; так что если $\inf Q^* < a < b < \sup Q^*$, то $P_a \{m_b < +\infty\} > 0$, т. е. внутри Q^* действует прямое сообщение. Действительно, если a —внутренняя точка множества Q^* , то для некоторых $b < a < c$ имеем $0 < P_b \{m_c < +\infty\}$, потому что иначе a —точка правого переноса, т. е. $P_a \{m_{a+0} = 0\} = P_a \{m_{a-0} = +\infty\} = 1$, и если бы $P_{a-0} \{m_a < +\infty\} = 0$, то было бы невозможно сообщение между $Q^* \cap \{b < a\}$ и $Q^* \cap \{b > a\}$; доказательство завершается простым применением леммы Гейне—Бореля.

В дальнейшем мы будем часто выделять случай 3g), оставляя рассмотрение остальных случаев читателю.

3.6. Операторы Грина и пространство D

Пусть дана диффузия D на интервале Q с концами 0 и 1. Введем пространство $B(Q)$ (действительных) борелевских функций f , определенных на $Q \cup \infty$ и таких, что

$$f(\infty) = 0; \quad (1a)$$

¹⁾ Число интервалов Q^* , по которым движется частица, не может превосходить 3. Действительно, если частица, выйдя из Q_1^* , пошла влево, прошла интервал Q_2^* и достигла Q_3^* , то левые концы Q_1^* и Q_2^* —точки левого переноса; а значит, по определению особой сингулярной точки левый конец Q_3^* должен быть точкой правого переноса, и частица никогда не покинет Q_3^* .—Прим. перев.

$$\|f\| < +\infty. \quad (1b)$$

Определим операторы Грина

$$G_\alpha: f \in B(Q) \rightarrow E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right], \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

и покажем, что функция $u = G_\alpha f$ удовлетворяет следующим условиям:

$$u \in B(Q); \quad (3)$$

$$u(a-0) = u(a), \text{ если } P_a \{m_{a-0} = 0\} = 1; \quad (4a)$$

$$u(a+0) = u(a), \text{ если } P_a \{m_{a+0} = 0\} = 1; \quad (4b)$$

$$u(a-0) \text{ существует, если } \lim_{b \uparrow a} E_{a-0}(e^{-mb}) = 1; \quad (5a)$$

$$u(a+0) \text{ существует, если } \lim_{b \downarrow a} E_{a+0}(e^{-mb}) = 1; \quad (5b)$$

$$u(a-0) = [1 - k_+(a)] u(a), \text{ если } \lim_{b \uparrow a} P_b \{m_{a-0} < +\infty\} = 1, \quad (6a)$$

$$k_+(a) = P_{a-0} \{m_a = +\infty\};$$

$$u(a+0) = [1 - k_-(a)] u(a), \text{ если } \lim_{b \downarrow a} P_b \{m_{a+0} < +\infty\} = 1, \quad (6b)$$

$$k_-(a) = P_{a+0} \{m_a = +\infty\};$$

$$u(1-0) = 0, \text{ если } 1 \notin Q, \lim_{b \uparrow 1} P_b \{m_{1-0} < +\infty\} = 1; \quad (7a)$$

$$u(+0), \text{ если } 0 \notin Q, \lim_{b \downarrow 0} P_b \{m_{+0} < +\infty\} = 1. \quad (7b)$$

Выполнение условия (3) ясно, так как $P.(\mathbf{B})$ — борелевская функция на Q для любого $B \in \mathbf{B}$. Если дан марковский момент m , то, поскольку $e^{-\alpha m}$ измеримо относительно \mathbf{B}_{m+0} , имеем:

$$\begin{aligned} u = G_\alpha f &= E. \left[\int_0^m e^{-\alpha t} f(x_t) dt + e^{-\alpha m} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x(t, w_m^*)) dt \right] = \\ &= E. \left[\int_0^m e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] + \\ &\quad + E. \left[e^{-\alpha m} E. \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x(t, w_m^*)) dt \mid \mathbf{B}_{m+0} \right) \right] = \\ &= E. \left[\int_0^m e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] + E. [e^{-\alpha m} u(x_m)]. \quad (8) \end{aligned}$$

Из этого мы выведем условия (4) — (7).

Начнем с (4b). Если $P_a \{m_{a+0} = 0\} = 1$, то из (8) следует

$$u(a) = \lim_{b \downarrow a} \left[E_a \left[\int_0^{m_b} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] + E_a(e^{-\alpha m_b}) u(b) \right] = \lim_{b \downarrow a} u(b), \quad (9)$$

причем существование предела входит в утверждение (9). Что касается (5b), то, если $\lim_{b \downarrow a} E_{a+0}(e^{-\alpha m_b}) = 1$, из (8) получаем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{c \downarrow a} u(c) &= \lim_{c \downarrow a} \overline{\lim}_{b \downarrow a} \left[E_c \left[\int_0^{m_b} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] + E_c(e^{-\alpha m_b}) u(b) \right] = \\ &= \lim_{b \downarrow a} u(b), \quad (10) \end{aligned}$$

что нам и было нужно. Докажем (6b): пусть $\lim_{b \downarrow a} P_b \{m_{a+0} < +\infty\} = 1$ и $P_{a+0} \{m_a < +\infty\} = 1 - k_-(a)$; тогда [см. (3.3.10с)] $E_{a+0}(e^{-\alpha m_a}) = 1 - k_-(a)$. Учитывая, что $u(\infty) = 0$, с помощью формулы (8) находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{b \downarrow a} u(b) &= \lim_{b \downarrow a} \left(E_b \left[\int_0^{m_{a+0}} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] + E_b[e^{-\alpha m_{a+0}} u(m_{a+0})] \right) = \\ &= \lim_{b \downarrow a} E_b \{e^{-\alpha m_{a+0}}, m_{a+0} = m_a < +\infty\} u(a) = \\ &= \lim_{b \downarrow a} E_b(e^{-\alpha m_a}) u(a) = [1 - k_-(a)] u(a). \quad (11) \end{aligned}$$

Поскольку $m_{+0} = m_\infty$, если $m_{+0} < +\infty$ и $0 \notin Q$, (7b) является частным случаем условия (6b). Условия (4a), (5a), (6a), (7a) доказываются аналогично (первоначальное изложение этого метода см. Д. Б. Рэй [2]).

Из формул (3)–(7) получаем, в частности, что операторы Грина отображают $B(Q)$ в пространство D таких функций $f \in B(Q)$, что

$$\lim_{b \uparrow a} f(b) = f(a), \text{ если } P_a \{m_{a-0} = 0\} = 1; \quad (12a)$$

$$\lim_{b \downarrow a} f(b) = f(a), \text{ если } P_a \{m_{a+0} = 0\} = 1; \quad (12b)$$

это нам понадобится в § 3.7.

Задача 1. Просто марковское движение D (определение см. в § 3.1) является строгим марковским, если

$$P. \{ \lim_{s \downarrow t} (G_\alpha f)(x_s) = (G_\alpha f)(x_t), t \geq 0 \} = 1, f \in C(Q), f(\infty) = 0.$$

[Рассмотрим марковский момент m , положим $m_n = ([m2^n] + 1)2^{-n}$ ($n \geq 1$). Пусть функция $e = e(w)$ ($0 \leq e \leq 1$) измерима относительно B_{m+0} . Выберем произвольную функцию $f \in C[0, 1]$, $f(\infty) = 0$. Поскольку $\{m_n = k2^{-n}\} \in B_{k2^{-n}}$ ($k \geq 0$) и $e(w_{m_n}) = e$ (см. (3.2.10с)), находим, как в § 1.7, что

$$\begin{aligned} E. \left[e \int_0^{+\infty} e^{-at} f[x(t+m)] dt \right] &= \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} E. \left[e(w_{m_n}) \int_0^{+\infty} e^{-at} f[x(t+m_n)] dt \right] = \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} E. (eG_a f[x(m_n)]) = E. (eG_a f[x(m)]). \end{aligned}$$

Обращая преобразование Лапласа и выражая полученный результат в терминах условных вероятностей, получаем

$$P. \{x(t+m) \in db \mid B_{m+0}\} = P_a \{x(t) \in db\}, \quad a = x(m).]$$

Задача 2. Просто марковское движение D , начинающееся заново в марковские моменты

$$\begin{aligned} m_a &= \min \{t: x(t) = a\}, & a \in Q; \\ m_{a-0} &= \lim_{b \uparrow a} m_b, & a > \inf Q; \\ m_{a+0} &= \lim_{b \downarrow a} m_b, & a < \sup Q, \end{aligned}$$

начинается заново также в произвольный марковский момент, т. е. оно является строго марковским.

[Рассуждения § 3.3, 3.4, 3.6 повторяются без всяких изменений. Пусть дано плотное счетное подмножество I множества K_+ , содержащее все точки из K_+ , изолированные слева; тогда

$$\begin{aligned} P. \{x_s < x_t \in K_+ \text{ для некоторого } s > t \geq 0\} &\leq \\ &\leq \sum_{l \in I} P. \{m_l < +\infty, x(s+m_l) < l \text{ для некоторого } s > 0\} \leq \\ &\leq \sum_{l \in I} P. \{m_l < +\infty\} P_l \{m_{l-0} < +\infty\} = 0; \end{aligned}$$

т. е. траектория не может пройти сверху вниз правосингулярную точку. Аналогично доказывается, что она не может пройти снизу вверх левосингулярную точку. Так как $G_a B(Q) \subseteq D$, то отсюда следует, что $P. \{\lim_{s \downarrow t} (G_a f)(x_s) = (G_a f)(x_t), t \geq 0\} = 1$ для $f \in B(Q)$; и остается только применить результат задачи 1.]

Задача 3. Пусть дана диффузия D с интервалом состояний $(0, 1]$. Если 0 есть вход в том смысле, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_{+0}(e^{-m\varepsilon}) = 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_\varepsilon \{m_{+0} < +\infty\} = 0,$$

то можно определить новую диффузию D^* с интервалом состояний $[0, 1]$, $P_b^* = P_b$ ($b > 0$) и $P_0^* \{m_{+0} = 0, \lim_{s \downarrow 0} m_0(w_s^+) = +\infty\} = 1$.

[Положим по определению $P = P_{1/2} \times P_{1/3} \times P_{1/4} \times \dots$; обозначим через $w_{1/2}, w_{1/3}, \dots$ траектории, начинающиеся в $1/2, 1/3, \dots$. Положим

$$m_{i/n} = \sum_{l \geq n} m_{1/l}(w_{1/l+1}), \quad n \geq 2,$$

и пусть w^* — новая траектория

$$x^*(t) = \begin{cases} 0, & t = 0; \\ x(t - m_{i/n}, w_{1/n}), & m_{i/n} \leq t < m_{i/n-1}, \quad n \geq 3; \\ x(t - m_{i/2}, w_{1/2}), & m_{i/2} \leq t < +\infty. \end{cases}$$

Так как

$$\begin{aligned} P \{m_{i/n} < +\infty\} &\geq E \{e^{-m_{i/n}}\} = \\ &= E \{e^{-m_{1/n}(w_{1/n+1})}\} E \{e^{-m_{1/n+1}(w_{1/n+2})}\} \dots = \\ &= E_{+0} \{e^{-m_{1/n}}\} \uparrow 1, \quad n \uparrow +\infty, \end{aligned}$$

то $P \{\lim_{n \uparrow +\infty} m_{i/n} = 0\} = 1$; или, что нам важно, $P \{\lim_{t \downarrow 0} x^*(t) = 0\} = 1$.

Отсюда следует, что $P_0^*(B) = P \{w^* \in B\}$ — такая вероятностная мера, что $P_0^* \{m_{+0} = 0, \lim_{s \downarrow 0} m_0(w_s^+) = +\infty\} = 1$. Выберем $f \in B[0, 1]$; полагая $m = m_{1/n}$, $1/n \leq \varepsilon < 1/(n-1)$, получаем:

$$\begin{aligned} (G_\alpha f)(0) &= E_0^* \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_0^* \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x(t + m_\varepsilon(w_m^+) + m)) dt \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_{1/n} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x(t + m_\varepsilon)) dt \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (G_\alpha f)(\varepsilon) = (G_\alpha^* f)(+0). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $P: \{\lim_{s \downarrow t} (G_\alpha f)(x_s) = (G_\alpha f)(x_t), t \geq 0\} = 1$.

Чтобы закончить решение задачи, достаточно показать, что процесс $[x(t): t \geq 0, P_0]$ — просто марковский (см. задачу 1). Но если функция $0 \leq e_1 \leq 1$ измерима относительно B_s , причем $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e_1(w_\varepsilon^+) = e_1$, и если $e_2 \in C(0, 1]$, $e_2(\infty) \equiv 0$, то

$$\begin{aligned} E_0^* \left[e_1 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e_2(x_{t+s}) dt \right] &= \lim_{n \uparrow +\infty} E_0^* \left[e_1(w_m^+) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e_2(w_{t+s+m}) dt \right] = \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} E_{1/n} [e_1(G_\alpha e_2)(x_s)] = \lim_{n \uparrow +\infty} E_0^* [e_1(w_m^+) (G_\alpha e_2)(x_{s+m})] = \\ &= E_0^* [e_1(E_\alpha^* e_2)(x_s)]. \end{aligned}$$

(Здесь также $m = m_{1/n}$.) Обращая преобразование Лапласа, получаем

$$P_0^* \{x(t+s) \in db \mid B_s\} = P_\alpha^* \{x(t) \in db\}, \quad a = x(s).$$

Задача 4. В случае $P_0 \{m_1 < +\infty\} > 0$ дать явный изоморфизм $G_1 B(Q)$ в $C[0, 1]$.

[Рассмотрим отображение $u \in G_1 B(Q) \rightarrow u^* = [P, \{m_1 < +\infty\}]^{-1} u$. Поскольку $K \cap [0, 1) = \emptyset$, имеем $u(a+0) = u(a)$ и $\lim_{b \downarrow a} P_b \{m_1 < +\infty\} = \lim_{b \downarrow a} P_a \{m_b < +\infty\} P_b \{m_1 < +\infty\} = P_a \{m_1 < +\infty\} (a \leq 1)$; т. е. $u^*(a+0) = u^*(a) (a < 1)$. Что касается $u^*(a-0)$, то $u(a-0) = [1 - k_+(a)] u(a)$ и $\lim_{b \uparrow a} P_b \{m_1 < +\infty\} = \lim_{b \uparrow a} P_b \{m_a < +\infty\} \times P_a \{m_1 < +\infty\} = [1 - k_+(a)] \cdot P_a \{m_1 < +\infty\} (a \geq 0)$; т. е. $u^*(a-0) = u^*(a) (a > 0)$. Итак, $u \rightarrow u^*$ есть один из возможных изоморфизмов.]

3.7. Производящие операторы

Рассмотрим операторы Грина $G_\alpha (\alpha > 0)$, действующие на пространстве D , определенном в § 3.6.

При $\alpha, \beta > 0$ имеем

$$G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta = 0, \quad (1)$$

так как

$$\begin{aligned} G_\beta G_\alpha f &= E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} (G_\alpha f)(x_s) ds \right] = \\ &= E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} ds \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_{t+s}) dt \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\tau} f(x_\tau) d\tau \int_0^\tau e^{-(\beta-\alpha)\sigma} d\sigma \right] = \\
&= E. \left[\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-\beta\tau} - e^{-\alpha\tau})}{\alpha - \beta} f(x_\tau) d\tau \right] = (\alpha - \beta)^{-1} (G_\beta - G_\alpha) f \quad (2)
\end{aligned}$$

(в интеграле сделана замена $\tau = t + s$, $\sigma = s$). Отсюда следует, что для оператора G_α область значений $D(\mathfrak{G}) \equiv G_\alpha D \subseteq D$ и нуль-пространство $G_\alpha^{-1}(0) \equiv D \cap \{f: G_\alpha f = 0\}$ не зависят от $\alpha > 0$.

По определению пространства D при $a \in Q$ и $f \in D$ имеем $P_a \{\lim_{t \downarrow 0} f(x_t) = f(a)\} = 1$. Тогда при $f \in G_\alpha^{-1}(0)$ имеем

$$0 \equiv \lim_{\beta \uparrow +\infty} \beta G_\beta f = E. \left\{ \lim_{\beta \uparrow +\infty} \beta \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(x_t) dt \right\} = f. \quad (3)$$

Поэтому отображение $G_\alpha: D \rightarrow D(\mathfrak{G})$ обратимо. Положим по определению

$$\mathfrak{G} = 1 - G_1^{-1}: D(\mathfrak{G}) \rightarrow D. \quad (4)$$

Применяя оператор $1 - \mathfrak{G}$ к обеим частям соотношения (1) с $\alpha = 1$, находим, что

$$G_\beta^{-1} = (\beta - \mathfrak{G}), \quad \beta > 0. \quad (5)$$

Оператор \mathfrak{G} называют *производящим оператором диффузии D*.

Если даны марковский момент m , $\alpha > 0$ и $u \in D(\mathfrak{G})$, положим $f = (\alpha - \mathfrak{G})u$; тогда в соответствии с формулой (3.6.8)

$$\begin{aligned}
u = G_\alpha f &= E. \left[\int_0^m e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] + E. [e^{-\alpha m} (G_\alpha f)(x_m)] = \\
&= E. \left[\int_0^m e^{-\alpha t} (\alpha - \mathfrak{G}) u(x_t) dt \right] + E. [e^{-\alpha m} u(x_m)]. \quad (6)
\end{aligned}$$

Если $E.(m) < +\infty$, то формула (6) при $\alpha \downarrow 0^1$ переходит в формулу Е. Б. Дынкина [4]

$$E. [u(x_m)] - u = E. \left[\int_0^m (\mathfrak{G}u)(x_t) dt \right], \quad (7)$$

$$u \in D(\mathfrak{G}), \quad E.(m) < +\infty.$$

¹⁾ f зависит от α , а u — нет.

При помощи формулы (7), следуя Е. Б. Дынкину [4, 5], можно вычислить \mathfrak{G} .

Пусть дана ловушка $a \in Q$; тогда $P_a\{m_\infty > t\} = e^{-\kappa t}$ ($0 \leq \kappa < +\infty$) (см. задачу 3.2.7). Если $\kappa = 0$, то $P_a\{m_\infty = +\infty\} = 1$ и $(\mathfrak{G}u)(a) = 0$; а если $\kappa > 0$, то $0 < E_a(m_\infty) = \kappa^{-1} < +\infty$ и, пользуясь формулой Дынкина, получаем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{G}u)(a) E_a(m_\infty) &= \lim_{n \uparrow +\infty} E_a \left[\int_0^{m_\infty \wedge n} (\mathfrak{G}u)(x_t) dt \right] = \\ &= - \lim_{n \uparrow +\infty} P_a\{m_\infty < n\} u(a) = -u(a), \end{aligned} \quad (8)$$

т. е.

$$(\mathfrak{G}u)(a) = -\frac{u(a)}{E_a(m_\infty)}, \quad u \in D(\mathfrak{G}). \quad (9)$$

Если точка $a \in Q$ такова, что $(\mathfrak{G}u)(a) = 0$ для любой функции $u \in D(\mathfrak{G})$, то $\alpha(\mathfrak{G}_\alpha f)(a) = f(a)$ для любой $f \in D$ и любого $\alpha > 0$. Выбирая $f \in C(Q) \subseteq D$ так, чтобы $0 \leq f(a) < f(b)$ ($a \neq b$), находим, что $P_a\{x(t) \equiv a, t \geq 0\} = 1$, т. е. a — ловушка.

Ввиду этого если $a \in Q$ — не ловушка, то $(\mathfrak{G}u)(a) > 1$ для какой-то функции $u \in D(\mathfrak{G})$. Тот факт, что $\mathfrak{G}u \in D$, позволяет нам выбрать такую окрестность B точки a , что $\mathfrak{G}u > 1$ на B :

$$B = \begin{cases} (b, a], & b < a, & \text{если } a \text{ — точка левого переноса;} \\ [a, b), & b > a, & \text{если } a \text{ — точка правого переноса;} \\ (c, b), & c < a < b, & \text{если } a \text{ — несингулярная точка.} \end{cases}$$

Введем момент выхода $m = \min\{t: x(t) \notin B\}$; применяя формулу Дынкина к функции u и моменту $m \wedge n$, получаем, что

$$E_a(m) \leq \lim_{n \uparrow +\infty} E_a \left[\int_0^{m \wedge n} (\mathfrak{G}u)(x_t) dt \right] \leq 2 \|u\| < +\infty. \quad (10)$$

Значит, формулу Дынкина можно применить к любой функции $u \in D(\mathfrak{G})$ и моменту выхода m , если только окрестность B достаточно мала. Отсюда следует, что

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \lim_{B \downarrow a} \frac{E_a[u(x_m)] - u(a)}{E_a(m)}, \quad u \in D(\mathfrak{G}); \quad (11)$$

или, если рассматривать отдельные случаи,

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \lim_{b \uparrow a} \frac{u(b) P_a \{m_b < m_\infty\} - u(a)}{E_a \{m_b \wedge m_\infty\}}, \quad \text{если } a \text{ — точка} \quad (12a)$$

левого переноса;

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{u(b) P_a \{m_b < m_\infty\} - u(a)}{E_a \{m_b \wedge m_\infty\}}, \quad \text{если } a \text{ — точка} \quad (12b)$$

правого переноса;

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \lim_{\substack{c \uparrow a \\ b \downarrow a}} \frac{u(c) P_a \{m_c < m_b\} + u(b) P_a \{m_b < m_c\} - u(a)}{E_a \{m_b \wedge m_c \wedge m_\infty\}}, \quad (12c)$$

если } a \text{ — несингулярная точка.}

Поэтому \mathfrak{G} — локальный оператор, т. е. если $a \in Q$ и $u_1 \in D(\mathfrak{G})$ совпадает с $u_2 \in D(\mathfrak{G})$ в некоторой окрестности B точки a :

$$B = \begin{cases} a, & \text{если } a \text{ — ловушка;} \\ (b, a], \quad b < a, & \text{если } a \text{ — точка левого переноса;} \\ [a, b), \quad b > a, & \text{если } a \text{ — точка правого переноса;} \\ (c, b), \quad c < a < b, & \text{если } a \text{ — несингулярная точка,} \end{cases}$$

то $(\mathfrak{G}u_1)(a) = (\mathfrak{G}u_2)(a)$.

Задача 1. Пусть дана функция $u \in D(\mathfrak{G})$, и окрестность B точки $a \in Q$ выбрана так, как это описано выше. Тогда если $u(b) \leq u(a)$ на B и $u(a) \geq 0$, то $(\mathfrak{G}u)(a) \leq 0$.

[Воспользуйтесь формулой (3.7.12).]

В. Феллер [9] показал, что если оператор \mathfrak{G} локальный и если он, кроме того, является *неположительным* в смысле задачи 1, то он должен быть дифференциальным оператором порядка не более второго (см. далее об этом в § 4.1).

3.8. Производящие операторы (продолжение)

Приведем другой метод вычисления оператора \mathfrak{G} .

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{G}_\varepsilon u = \varepsilon^{-1} (E_\varepsilon [u(x_\varepsilon)] - u), \quad \varepsilon > 0, \quad (1)$$

и положим по определению

$$\mathfrak{G}^* = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathfrak{G}_\varepsilon. \quad (2)$$

Здесь оператор \mathfrak{G}^* применяется к классу $D(\mathfrak{G}^*)$ таких функций $u \in D$, что предел $\mathfrak{G}^* u \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathfrak{G}_\varepsilon u$ существует в каждой точке и при-

надлежит D , причем $\sup_{\varepsilon > 0} \|\mathfrak{G}_\varepsilon u\| < +\infty$. Нам нужно доказать, что

$$\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}, \quad (3)$$

т. е.

$$D(\mathfrak{G}^*) = D(\mathfrak{G}); \quad (4a)$$

$$\mathfrak{G}u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{E_\varepsilon [u(x_\varepsilon)] - u}{\varepsilon}, \quad u \in D(\mathfrak{G}). \quad (4b)$$

Формула (4b) сопоставима с (3.7.11). Применять оператор \mathfrak{G}^* предложил В. Феллер [5].

Применяя формулу Дынкина (3.7.7) к $u \in D(\mathfrak{G})$ и $m = \varepsilon > 0$, получаем, что $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}$ на $D(\mathfrak{G}) \subseteq D(\mathfrak{G}^*)$, так как

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathfrak{G}_\varepsilon u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} E_\varepsilon \left[\int_0^\varepsilon (\mathfrak{G}u)(x_t) dt \right] = \mathfrak{G}u \quad (5a)$$

и

$$\|\mathfrak{G}_\varepsilon u\| \leq \|\mathfrak{G}u\|. \quad (5b)$$

Чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что $D(\mathfrak{G}^*) \subseteq D(\mathfrak{G})$.

Пусть $u \in D(\mathfrak{G}^*)$; тогда

$$\begin{aligned} G_\alpha(\alpha - \mathfrak{G}^*)u &= \alpha G_\alpha u - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} G_\alpha \mathfrak{G}_\varepsilon u = \\ &= \alpha G_\alpha u - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} E_\varepsilon \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} [u(x_{t+\varepsilon}) - u(x_t)] dt \right] = \\ &= \alpha G_\alpha u - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} E_\varepsilon \left[(e^{\alpha\varepsilon} - 1) \int_\varepsilon^\infty e^{-\alpha t} u(x_t) dt - \int_0^\varepsilon e^{-\alpha t} u(x_t) dt \right] = u; \end{aligned} \quad (6)$$

а так как $(\alpha - \mathfrak{G}^*)u \in D$, то $u = G_\alpha(\alpha - \mathfrak{G}^*)u \in D(\mathfrak{G})$, что нам и было нужно.

Равенство $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}$ можно использовать для того, чтобы по-другому доказать, что \mathfrak{G} — локальный оператор (как замечено в конце § 3.7).

Поскольку траектория не может пройти снизу вверх через левосингулярную точку или сверху вниз через правосингулярную точку, достаточно доказать, что

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} P_\alpha \{m_b < t\} = 0, \quad a < b. \quad (7)$$

Сейчас мы это докажем, используя метод Д. Б. Рэя [2].

Пусть $a < c < b$; тогда $(m = m_c)$,

$$\begin{aligned} P_a \{m_b < t\} &= P_a \{m + m_b(w_m^+) < t\} \leq P_a \{m < t, m_b(w_m^+) < t\} = \\ &= E_a \{m_c < t, P_a \{m_b(w_m^+) < t \mid B_{m+0}\}\} = \\ &= P_a \{m_c < t\} P_c \{m_b < t\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} P_c \{m_a \wedge m_\infty \wedge m_b > s\} \left[\frac{s}{t} \right] P_a \{m_b < t\} &\leq \\ &\leq \sum_{n \leq [s/t]} P_c \{m_a \wedge m_\infty \wedge m_b > nt\} P_a \{m_b < t\} \leq \\ &\leq \sum_{n \leq [s/t]} \int_{(a, b)} P_c \{m_a \wedge m_\infty \wedge m_b > nt, x_{nt} \in dl\} P_t \{m_b \leq t\} \leq \\ &\leq \sum_{n \leq [s/t]} P_c \{m_b \in (nt, (n+1)t)\} \leq 1, \quad s > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Но так как $P_c \{m_a \wedge m_\infty \wedge m_b > 0\} = 1$, то $\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} P_a \{m_b < t\} < +\infty$, и из формулы (8) получаем, что $\lim_{t \downarrow 0} t^{-2} P_a \{m_b < t\} < +\infty$, что

доказывает формулу (7). На самом деле, из (8) следует даже, что $P_a \{m_b < t\} < \text{const} \cdot t^4, t^8, \dots (t \downarrow 0)$, откуда

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-n} P_a \{m_b < t\} = 0, \quad a < b, \quad n \geq 1. \quad (10)$$

Задача 1. Доказать по-другому формулу (10), проверяя с помощью формулы Дынкина неравенство

$$E_a(e^{-\alpha m_b}) \leq [\alpha E_c \{m_a \wedge m_\infty \wedge m_b\}]^{-1}, \quad a < c < b,$$

и используя затем оценку $P_a \{m_b \leq t\} \leq e \int_0^t e^{-s/t} P_a \{m_b \in ds\} \leq$

$\leq e E_a \{e^{-t^{-1} m_b}\}$ (см. еще одно доказательство в задаче 4.7.4).

[Пусть даны такие $a < b$, что $P_a \{m_{b+0} < +\infty\} > 0$. Возьмем функцию $f \in D$, равную 0 слева от b и положительную во всех остальных точках, и $\alpha > 0$; тогда $\gamma = (G_\alpha f)(b) > 0$; функция $u \equiv \gamma^{-1} G_\alpha f = E_\cdot(e^{-\alpha m_b})$ является положительным неубывающим решением уравнения $\mathcal{G}u = \alpha u$ на $[a, b)$. Применяя формулу Дынкина с $m = n \wedge m_a \wedge m_\infty \wedge m_b$, находим, что если $a < c < b$, то

$$\begin{aligned} 1 \geq E_c[u(x_m)] - u(c) &= E_c \left(\int_0^m (\mathcal{G}u)(x_t) dt \right) \geq \alpha u(a) E_c(m) \uparrow \\ &\uparrow \alpha u(a) E_c(m_a \wedge m_b \wedge m_b) \text{ при } n \uparrow +\infty. \end{aligned}$$

3.9. Остановленная диффузия

Мы докажем, что если Q^* — подинтервал в Q , замкнутый в Q , и e — момент выхода из него $\inf\{t: x(t) \notin Q^*\}$, то остановленное движение $D^* = [x(t \wedge e): t \geq 0, P_a: a \in Q^*]$ само является диффузией; этот факт был использован в § 3.5.

Рассмотрим стандартное описание остановленного движения с траекториями $w^*: t \rightarrow Q^*$, универсальной σ -алгеброй B^* , марковскими моментами $m^* = m^*(w^*)$, подалгебрами B_{m^*+0} и вероятностями

$$P_a^*(B^*) = P_a(B), \quad a \in Q^*, \quad B \equiv \{w: w_e^* \in B^*\}, \quad B^* \in B^*. \quad (1)$$

Задача состоит в том, чтобы показать, что при $B^* \in B_{m^*+0}$

$$P^*: \{B^*, x(t + m^*) \in db\} = E^*[B^*, P_{x(m^*)}^* \{x(t) \in db\}]. \quad (2)$$

Пусть $m^* = m^*(w^*)$ — марковский момент для остановленного движения (в стандартном описании); тогда если не учитывать траектории, начинающиеся не из Q^* , то $m(w) \equiv m^*(w_e^*)$ является марковским моментом для первоначального процесса. Действительно, поскольку $B^* = \{w^*: m^* < t\} \in B_i^*$, имеем¹⁾

$$\begin{aligned} \{w: m < t\} &= \{w: m^*(w_e^*) < t\} = \{w: w_e^* \in B^*\} = \{w: (w_e^*)_i \in B^*\} = \\ &= \{w: w_{e \wedge t}^* \in B^*\} \in B_t, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, если какое-то множество B^* принадлежит B_{m^*+0} , то $B \equiv \{w: w_e^* \in B^*\} \in B_{(m \wedge e)+0}$, поскольку²⁾

$$\begin{aligned} B \cap \{w: m \wedge e < t\} &= \{w_e^* \in B^*\} \cap \{m^*(w_e^*) < t\} \cap \{m < e\} \cup \\ \cup \{w_e^* \in B^*\} \cap \{e < t\} \cap \{m \geq e\} &= \{(w_e^*)_i \in B^*\} \cap \{m < t\} \cap \{m < e\} \cup \\ \cup \{(w_e^*)_i \in B^*\} \cap \{e < t\} \cap \{m \geq e\} &= \\ = \{w_{e \wedge t}^* \in B^*\} \cap \{m \wedge e < t\} &\in B_t, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

С помощью формул

$$e = m \wedge e + e(w_{m \wedge e}^+); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x(t + m, w_e^*) &= x((t + m \wedge e) \wedge (e(w_{m \wedge e}^+) + m \wedge e)) = \\ &= x(t \wedge e(w_{m \wedge e}^+), w_{m \wedge e}^+) \end{aligned} \quad (6)$$

¹⁾ Здесь используется соотношение (3.2.1) и то, что $e \wedge t = e(w_i^*) \wedge t$ (см. задачу 3.2.6).

²⁾ Здесь используется то, что $w^* \in B^*$ тогда и только тогда, когда $(w^*)_i \in B^*$ при любом $t > m^*(w^*)$; см. (3.2.10с).

и (1) получаем

$$\begin{aligned}
 P^*: \{B^*, x(t+m^*) \in db\} &= P^*: \{B, x(t+m, w_e^*) \in db\} = \\
 &= P^*: \{B, x(t \wedge e(w_{m \wedge e}^+), w_{m \wedge e}^+) \in db\} = \\
 &= E^*: [B, P_{x(m \wedge e)} \{x(t \wedge e) \in db\}] = \\
 &= E^*: [B, P_{x(m^*(w_e^*), w_e^*)} \{x(t) \in db\}] = \\
 &= E^*: [B^*, P_{x(m^*)} \{x(t) \in db\}], \quad (7)
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим производящие операторы \mathfrak{G} и \mathfrak{G}^* диффузий D и D^* . Оператор \mathfrak{G} является сужением оператора \mathfrak{G}^* в следующем смысле. Если $u \in D(\mathfrak{G})$, то

$$u^* \text{ — сужение функции } u, \text{ определенное на } Q^*, \text{ — принадлежит } D(\mathfrak{G}^*), \quad (8a)$$

$\mathfrak{G}^* u^* = \mathfrak{G} u$ внутри Q^* и в тех из концов интервала Q^* , в которых

$$P^*: \{e > 0\} = 1. \quad (8b)$$

Докажем это. Пусть дана функция $u \in D(\mathfrak{G})$. Положим $f = (1 - \mathfrak{G})u$; имеем

$$f \in D; \quad (9a)$$

$$u = G_1 f = E^*: \left[\int_0^e e^{-t} f(x_t) dt \right] + E^*: [e^{-e} u(x_e)]. \quad (9b)$$

Положим

$$f^*(a) = \begin{cases} f(a), & a \in Q^*, P_a \{e > 0\} = 1; \\ (G_1 f)(a), & a \in Q^*, P_a \{e = 0\} = 1; \\ 0, & a = \infty. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда

$$f^* \in D^*, \quad (11a)$$

где D^* — пространство D , связанное с диффузией D^* на Q^* . Кроме того,

$$\begin{aligned}
 G^* f^* &= E^*: \left[\int_0^{+\infty} e^{-t} f^*(x_t) dt \right] = E^*: \left[\int_0^{+\infty} e^{-t} f^*[x(t \wedge e)] dt \right] = \\
 &= E^*: \left[\int_0^e e^{-t} f^*(x_t) dt \right] + E^*: \left[\int_e^{+\infty} e^{-t} dt f^*(x_e) \right] =
 \end{aligned}$$

$$= E. \left[\int_0^e e^{-t} f(x_t) dt \right] + E. [e^{-e} (G_1 f)(x_e)] = G_1 f = u. \quad (11b)$$

Справедливость утверждения (8a) следует из (11), а что касается (8b), то из (11b) вытекает, что на Q^*

$$\mathfrak{G}^* u^* = (\mathfrak{G}_1^* - 1) f^* = G_1 f - f^* = \mathfrak{G} u + f - f^* = \mathfrak{G} u, \quad P. \{e > 0\} = 1. \quad (12)$$

Отсюда и получаем (8b).

Из доказанного следует, что оператор \mathfrak{G} является *локальным* в том смысле, что если A — замыкание окрестности B точки $a \in Q$:

$$B = \begin{cases} (b, a], & b < a, & \text{если } a \text{ — левосингулярная точка;} \\ [a, b), & b > a, & \text{если } a \text{ — правосингулярная точка;} \\ (c, b), & c < a < b, & \text{если } a \text{ — несингулярная точка,} \end{cases}$$

то \mathfrak{G} совпадает на B с производящим оператором \mathfrak{G}^* остановленного движения

$$[x(t \wedge e): t \geq 0, P_\xi: \xi \in A], \quad e = \inf \{t: x(t) \notin A\}.$$

Интересно сравнить это употребление слова *локальный* с тем смыслом, который вкладывался в него в § 3.7 и 3.8.

Задача 1. В каком месте не проходит доказательство того, что D^* — диффузия, если e — произвольный марковский момент? Привести конкретный пример.

[Нарушается соотношение (5). Действительно, пусть D — стандартное броуновское движение, $f \in C(R^1)$ — положительная функция;

тогда $e = \min \left\{ t: \int_0^t f(x_s) ds = 1 \right\}$ — марковский момент. Если бы (5)

выполнялось, то при $m = t < e$ мы получили бы противоречие:

$$1 = \int_0^e f(x_s) ds = \int_0^t f(x_s) ds + \int_0^{e(w_t^+)} f(x(s, w_t^+)) ds = \int_0^t f(x_s) ds + 1.]$$

Задача 2. Пусть $e = \inf \{t: x(t) \notin Q^*\}$; показать, что если $P. \{e < +\infty\} > 0$ на Q^* , то остановленное условное движение

$$D^* = [x(t \wedge e): t \geq 0, P_a \{B | e < +\infty\}: a \in Q^*]$$

является диффузией (см. применение этого в § 4.3).

[Пусть m^* , m , B^* , B обозначают то же, что при доказательстве формулы (2). Если положить $P^*(B^*) = P.\{B | e < +\infty\}$ на Q^* , то при $db \subset Q^*$, как в (7), получаем

$$\begin{aligned}
 P^*.\{B^*, x(t+m^*) \in db\} P.\{e < +\infty\} &= \\
 &= P.\{B, x(t \wedge e(w_{m \wedge e}^+), w_{m \wedge e}^+) \in db, m \wedge e + e(w_{m \wedge e}^+) < +\infty\} = \\
 &= E.\{B, P_{x(m \wedge e)}^* \{x(t \wedge e) \in db, e < +\infty\}, m \wedge e < +\infty\} = \\
 &= E.\{B, P_{x(m \wedge e)}^* \{x(t) \in db\} P_{x(m \wedge e)}^* \{e < +\infty\}\} = \\
 &= E.\{B, m \wedge e + e(w_{m \wedge e}^+) < +\infty, P_{x(m \wedge e)}^* \{x(t) \in db\}\} = \\
 &= E.\{B, e < +\infty, P_{x(m \wedge e)}^* \{x(t) \in db\}\} = \\
 &= E.\{B^*, P_{x(m^*)}^* \{x(t) \in db\}\} P.\{e < +\infty\},
 \end{aligned}$$

и утверждение доказано.]

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

4.1. Общий обзор

Частица начинает движение в момент $t=0$ в точке $-1 \leq l < 0$ и движется со скоростью $+1$, пока не достигнет точки $l=0$; в этот момент она начинает броуновское движение с отражением на $[0, +\infty)$, останавливающееся в момент τ_1 первого достижения точки $l=1$. Здесь она ждет в течение экспоненциального времени ε со средним $1/3$, а в момент $\tau_1 + \varepsilon$ перескакивает в точку ∞ .

С помощью формулы Е. Б. Дынкина (3.7.11) можно проверить, что оператор $\mathcal{G}u$ совпадает с оператором

$$(\mathcal{G} \cdot u)(l) = \begin{cases} u^+(l), & -1 \leq l < 0; \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{u(\varepsilon) - u(0)}{\varepsilon^2}, & l = 0; \\ \frac{1}{2} u''(l), & 0 < l < 1; \\ -3u(1), & l = 1, \end{cases} \quad (1)$$

на области определения $D(\mathcal{G}) = D(\mathcal{G} \cdot)$, состоящей из всех таких функций $u \in C[-1, 1] \cap C^1[-1, 0) \cap C^2[0, 1)$, что

$$u^-(0) = \frac{1}{2} u''(+0); \quad (2a)$$

$$u^+(0) = 0^1; \quad (2b)$$

$$\frac{1}{2} u''(1-0) = -3u(1). \quad (2c)$$

В частности, отсюда вытекает, что $u \rightarrow (\mathcal{G}u)(l)$ есть дифференциальный оператор второго, первого или нулевого порядка в зависимости от того, является l несингулярной точкой, точкой переноса или ловушкой.

Пусть даны броуновское движение с отражением x^+ , введенное в § 2.1, с моментом первого достижения $\tau_1 = \min\{t: x^+ = 1\}$ и независимое от него экспоненциальное время ε с законом рас-

¹⁾ Автоматически вытекает из второй строчки формулы (1), поскольку $\varepsilon^{-2}[u(\varepsilon) - u(0)]$ ограничено при $\varepsilon \downarrow 0$.

предела $P\{e > t\} = e^{-3t}$. Тогда

$$x^*(t) = \begin{cases} t+l, & 0 \leq t < -l; \\ x^+(t+l), & -l \leq t \leq -l+m_1; \\ 1, & -l+m_1 \leq t < -l+m_1+e; \\ \infty, & t \geq -l+m_1+e, \end{cases} \quad (3)$$

есть описание (нестандартное) движения, начинающегося в точке $-1 \leq l < 0$.

Как будет показано ниже, оператор \mathcal{G} с областью определения $D(\mathcal{G})$ и связанные с ним траектории допускают подобное описание и в общем случае. В. Феллер выяснил, что \mathcal{G} выражается в виде дифференциального оператора \mathcal{G}^* в случае, когда оператор Грина отображает пространство $C(Q)$ в себя, и исследовал это выражение в ряде фундаментальных статей [5, 7, 9, 10, 11]. Е. Б. Дынкин [4, 5, 8] нашел изящный теоретико-вероятностный метод вывода феллеровского оператора \mathcal{G}^* , основанный на формулах (3.7.12), для консервативного случая, причем в то же время он дал более прямое теоретико-вероятностное выражение для этого оператора. Выражение для оператора \mathcal{G}^* на точках переноса, свойства убывающих мер и конкретное выражение траекторий через оператор \mathcal{G}^* и стандартное броуновское движение (см. § 5.1 и следующие) публикуются здесь впервые.

Начнем с несингулярного случая:

$$Q = [0, 1]; \quad (4a)$$

$$P_a\{m_{a-0} = m_{a+0} = 0\} = 1, \quad 0 < a < 1; \quad (4b)$$

$$E_0(e^{-m_{+0}}) = \lim_{b \downarrow 0} E_{+0}(e^{-m_b}), \quad E_{+0}(e^{-m_0}) = \lim_{b \downarrow 0} E_b(e^{-m_{+0}}); \quad (5a)$$

$$E_1(e^{-m_{1-0}}) = \lim_{b \uparrow 1} E_{1-0}(e^{-m_b}), \quad E_{1-0}(e^{-m_1}) = \lim_{b \uparrow 1} E_b(e^{-m_{1-0}}). \quad (5b)$$

Формула (4b) означает, что в интервале (0,1) нет сингулярных точек; формулы (5) обсуждаются в § 4.5.

Пусть $0 < a < b < 1$; рассмотрим *выходные вероятности* и *среднее время выхода*:

$$p_{ab}(\xi) = P_\xi\{m_a < m_b\}; \quad (6a)$$

$$p_{ba}(\xi) = P_\xi\{m_b < m_a\}; \quad (6b)$$

$$e_{ab}(\xi) = E_\xi(m_a \wedge m_b \wedge m_\infty) \quad (6c)$$

(здесь $a < \xi < b$). С помощью этих функций можно ввести *шкалу* $s = s_{ab}$ (непрерывную возрастающую функцию), *убывающую меру*

$k = k_{ab}$ (неотрицательную) и меру скорости $m = m_{ab}$ (положительную), пользуясь формулами

$$s(d\xi) = p_{ab}(\xi) p_{ba}(d\xi) - p_{ba}(\xi) p_{ab}(d\xi) > 0; \quad (7a)$$

$$k(d\xi) = \frac{p_{ab}^+(d\xi)}{p_{ab}(\xi)} = \frac{p_{ba}^+(d\xi)}{p_{ba}(\xi)} \geq 0; \quad (7b)$$

$$m(d\xi) = -[e_{ab}^+(d\xi) - e_{ab}(\xi) k_{ab}(d\xi)] > 0 \quad (7c)$$

(при $a < \xi < b$)¹⁾. Используя эти характеристики, мы можем записать \mathcal{G} как дифференциальный оператор

$$(\mathcal{G} \cdot u)(\xi) = \frac{u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi)}{m(d\xi)}, \quad a < \xi < b. \quad (8a)$$

Точный смысл формулы (8a) заключается в том, что

$$\int_{[c, d]} (\mathcal{G} \cdot u)(\xi) m(d\xi) = u^+(d) - u^+(c) - \int_{[c, d]} u(\xi) k(d\xi), \quad (8b)$$

$$a < c < d < b.$$

Пусть $0 < a^* < a < b < b^* < 1$; тогда новые $s_{a^*b^*}$, $k_{a^*b^*}$, $m_{a^*b^*}$ связаны со старыми равенствами ($a < \xi < b$)

$$s_{a^*b^*}(d\xi) = B \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ a & b \end{pmatrix} s_{ab}(d\xi); \quad (9a)$$

$$k_{a^*b^*}(d\xi) = B \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} k_{ab}(d\xi); \quad (9b)$$

$$m_{a^*b^*}(d\xi) = B \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} m_{ab}(d\xi), \quad (9c)$$

где

$$B \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ a & b \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{cc} p_{b^*a^*}(b) & p_{b^*a^*}(a) \\ p_{a^*b^*}(b) & p_{a^*b^*}(a) \end{array} \right| > 0.$$

Используя правила перехода (9), легко ввести такие универсальные шкалу, убывающую меру и меру скорости, что (8) будет выполнено при всех $0 < \xi < 1$.

¹⁾ $e^+(\xi) = \lim_{\eta \downarrow \xi} [s(\eta) - s(\xi)]^{-1} [e(\eta) - e(\xi)]$ ($e = p_{ab}, p_{ba}, e_{ab}$), а $e^+(d\xi)$ — мера, индуцируемая функцией интервала $e^+(\xi, \eta) = e^+(\eta) - e^+(\xi)$ ($\xi < \eta$).

В случае $E_0(e^{-m_{+0}}) = 1$ положим по определению $s(0) = s(+0)$; тогда оказывается, что

$$k(0) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{P_0 \{m_b = +\infty\}}{s(b) - s(0)} < +\infty; \quad (10a)$$

$$m(0) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{E_0 \{m_b \wedge m_\infty\}}{s(b) - s(0)} < +\infty; \quad (10b)$$

$$\int_0^{1/2} k[0, \xi] s(d\xi) < +\infty; \quad (11a)$$

$$\int_0^{1/2} m[0, \xi] s(d\xi) < +\infty, \quad (11b)$$

и для $u \in D(\mathfrak{G})$

$$(\mathfrak{G}u)(0) m(0) = u^+(0) - u(0) k(0). \quad (12a)$$

Здесь

$$u^+(+0) = u^+(0) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{u(b) - u(0)}{s(b) - s(0)}, \quad (12b)$$

причем при $s(0) = -\infty$ мы полагаем $k(0) = m(0) = u^+(0) = 0$. Аналогичный результат имеет место для точки 1, если $E_1(e^{-m_{1-0}}) = 1$.

Можно доказать, что $D(\mathfrak{G})$ совпадает с классом $D(\mathfrak{G}^*)$ функций $u \in D$, удовлетворяющих соотношениям

$$u(+0) = u(0), \text{ если } E_{+0}(e^{-m_0}) = 1; \quad (13a)$$

$$u(1-0) = u(1), \text{ если } E_{1-0}(e^{-m_1}) = 1, \quad (13b)$$

и таких, что для некоторой функции $u^* \in D$

$$u^*(\xi) m(d\xi) = u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi), \quad 0 < \xi < 1; \quad (14)$$

$$u^*(0) m(0) = u^+(0) - u(0) k(0), \text{ если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 1; \quad (15a)$$

$$u^*(1) m(1) = -u^-(1) - u(1) k(1), \text{ если } E_1(e^{-m_{1-0}}) = 1; \quad (15b)$$

$$u^*(0) = -\kappa(0) u(0), \text{ если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 0; \quad \kappa(0) = E_0(m_\infty)^{-1}; \quad (16a)$$

$$u^*(1) = -\kappa(1) u(1), \text{ если } E_1(e^{-m_{1-0}}) = 0; \quad \kappa(1) = E_1(m_\infty)^{-1}. \quad (16b)$$

Что касается оператора \mathfrak{G} , то в соответствии с формулой (8) он оказывается совпадающим с глобальным дифференциальным оператором \mathfrak{G}^* , производящим отображение $u \in D(\mathfrak{G}^*) \rightarrow u^*$. Опера-

тор \mathcal{G}^* однозначен, потому что $u^* \in D$ и $0 < m[a, b]$ ($0 < a < b < 1$).

Оператор \mathcal{G} в 0 зависит в некоторой мере от s , m и k *вблизи* 0, как показано в приводимой ниже таблице. В этой таблице точка 0 называется

точкой выхода, если $+\infty > \int_0^{1/2} k(\xi, 1/2] s(d\xi) + \int_0^{1/2} m(\xi, 1/2] s(d\xi);$

точкой входа, если $+\infty > \int_0^{1/2} k(0, \xi] s(d\xi) + \int_0^{1/2} m(0, \xi] s(d\xi).$

Равенство $(\mathcal{G}u)(0) = m(0)^{-1}[u^+(0) - u(0)k(0)]$ в случае $m(0) = 0$ означает, что $u^+(0) = u(0)k(0)$. Приводимая классификация принадлежит В. Феллеру [4].

	Выход и вход	Выход, не вход	Вход, не выход	Не выход и не вход
$P_0\{m_{+0}=0\}=$	0 или 1	0	1	0
$E_{+0}(e^{-m_0})=$	1	1	0	0
$(\mathcal{G}u)(0)=$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^+(0) - u(0)k(0)}{m(0)}, \\ \text{если } P_0\{m_{+0}=0\}=1; \\ -\kappa u(0) \\ \text{если } P_0\{m_{+0}=0\}=0 \end{array} \right.$	$-\kappa u(0)$	$u^+(0)=0$	$-\kappa u(0)$

Оператор \mathcal{G} в 1 зависит от s , m и k *вблизи* 1 таким же образом.

В качестве второго примера рассмотрим сингулярный случай:

$$Q = [0, 1]; \quad (17a)$$

$$P_0\{m_1 < +\infty\} > 0; \quad (17b)$$

$$P_1\{m_{1-0} \wedge m_\infty = +\infty\} = 1; \quad (17c)$$

$$E_0(m_1 \wedge m_\infty) < +\infty. \quad (17d)$$

Формула (17b) означает, что в $[0, 1)$ нет левосингулярных точек.

Интервал Q разбивается на множество *точек переноса*

$$K_+ \cap [0, 1) = [0, 1) \cap \{a: P_a\{m_{a-0} = +\infty\} = 1\}; \quad (18)$$

регулярные интервалы

$$Q_n = [l_n, r_n), E_{l_n} \{e^{-m_{l_n+0}}\} = 1, n \geq 1, \quad (19)$$

и

$$\text{единственную ловушку в точке 1.} \quad (20)$$

На $\bigcup_{n \geq 1} [l_n, r_n)$ оператор \mathfrak{G} можно представить в виде

$$(\mathfrak{G}u)(\xi) m(d\xi) = u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi), l_n < \xi < r_n; \quad (21a)$$

$$(\mathfrak{G}u)(l_n) m(l_n) = u^+(l_n) - u(l_n) k(l_n). \quad (21b)$$

Здесь s , k и m , как и в описанном выше несингулярном случае, выбраны так, что для $l_n < a < b < r_n$ при некотором выборе константы B , зависящем от a и b , выполнены соотношения¹⁾

$$s(d\xi) = B [p_{ab}(\xi) p_{ba}(d\xi) - p_{ba}(\xi) p_{ab}(d\xi)] > 0; \quad (22a)$$

$$k(d\xi) = \frac{p_{ab}^+(d\xi)}{p_{ab}(\xi)} = \frac{p_{ba}^+(d\xi)}{p_{ba}(\xi)} \geq 0; \quad (22b)$$

$$m(d\xi) = -[e_{ab}^+(d\xi) - e_{ab}(\xi) k(d\xi)] > 0. \quad (22c)$$

В левом конце интервала Q_n имеем

$$u^+(l_n + 0) = u^+(l_n) = \lim_{b \downarrow l_n} \frac{u(b) - u(l_n)}{s(b) - s(l_n)}; \quad (23a)$$

$$k(l_n) = \lim_{b \downarrow l_n} \frac{P_{l_n} \{m_b = +\infty\}}{s(b) - s(l_n)}; \quad (23b)$$

$$m(l_n) = \lim_{b \downarrow l_n} \frac{E_{l_n} \{m_b \wedge m_\infty\}}{s(b) - s(l_n)}, \quad (23c)$$

причем, если $s(l_n) = s(l_n + 0) = -\infty$, считаем по определению $u^+(l_n) = k(l_n) = m(l_n) \equiv 0$. Функции s , k и m удовлетворяют дополнительному условию

$$\sum_{n \geq 1} \left[\int_{Q_n} k[l_n, \xi) s(d\xi) + \int_{Q_n} m[l_n, \xi) s(d\xi) \right] < +\infty. \quad (24)$$

Кроме того, рассматривая для $a \leq b$ выходные вероятности и среднее время выхода

$$p_b(a) = P_a \{m_b < +\infty\}, \quad (25a)$$

$$e_b(a) = E_a \{m_b \wedge m_\infty\}, \quad (25b)$$

¹⁾ p_{ab}^+ , p_{ba}^+ и т. д. вычислены относительно универсальной шкалы s , задаваемой формулой (22a), а не относительно локальной шкалы $s_{ab}(d\xi) = p_{ab}(\xi) p_{ba}(d\xi) - p_{ba}(\xi) p_{ab}(d\xi)$.

можно ввести меру k_+ , убывающую при переносе, и шкалу переноса s_+ :

$$\begin{aligned} 0 \leq k_+(d\xi) &= \frac{p_b(d\xi)}{p_b(\xi)} \quad (\xi < b); \\ k_+(d\xi) &= \frac{p_1(d\xi)}{p_1(\xi)} \quad (\xi < 1); \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} k_+(0) &= 0, \quad 0 \leq k_+(1) = P_{1-0} \{m_1 = +\infty\}; \\ s_+(d\xi) &= -[e_b(d\xi) - e_b(\xi) k_+(d\xi)] \quad (\xi < b), \\ s_+(d\xi) &= -[e_1(d\xi) - e_1(\xi) k_+(d\xi)] \quad (\xi < 1). \end{aligned} \quad (26b)$$

При этом будут справедливы следующие утверждения:

$$\text{функция } s_+(b) \equiv \int_0^b s_+(d\xi) \text{ непрерывна}; \quad (27a)$$

$$s_+(a) < s_+(b) \quad (a < b); \quad (27b)$$

$$s_+(1) + k_+[0, 1) < +\infty; \quad (27c)$$

$$\begin{aligned} \int_{[a, b) \cap K_+} (\mathcal{G}u)(\xi) s_+(d\xi) &= \int_{[a, b) \cap K_+} [u(d\xi) - u(\xi) k_+(d\xi)], \quad (28a) \\ a < b, \quad u &\in D(\mathcal{G}), \end{aligned}$$

а при $l_n < \xi < r_n$

$$k_+(d\xi) = \frac{s(d\xi)}{p(\xi)} \int_{[l_n, \xi)} p(\eta) k(d\eta); \quad (29a)$$

$$s_+(d\xi) = \frac{s(d\xi)}{p(\xi)} \int_{[l_n, \xi)} p(\eta) m(d\eta); \quad (29b)$$

здесь p — решение краевой задачи

$$p^+(d\xi) = p(\xi) k(d\xi), \quad l_n < \xi < r_n; \quad (30a)$$

$$p^+(l_n) = p(l_n) k(l_n); \quad (30b)$$

$$p(l_n + 0) = p(l_n) = 1. \quad (30c)$$

Формулу (28a) можно переписать по-другому:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}u)(a) &= \lim_{b \downarrow a} \frac{u(b) - u(a) - \left[\bigcap_{a < \xi \leq b} [1 - k_+(d\xi)]^{-1} - 1 \right] u(a)}{s_+(b) - s_+(a)}, \quad (28b) \\ a &\in K_+ \cap [0, 1), \quad u \in D(\mathcal{G}). \end{aligned}$$

Здесь под $\bigcap_{a < \xi \leq b} [1 - k_+(d\xi)]$ понимается $e^{-j_+(a, b]} (1 - \kappa_1)(1 - \kappa_2) \dots$, где j_+ — непрерывная часть функции k_+ , а $\kappa_1, \kappa_2, \dots (\leq 1)$ — скачки функции k_+ при $a < \xi \leq b$.

Область $D(\mathfrak{G})$ можно теперь описать как класс $D(\mathfrak{G}^*)$ таких функций $u \in D$, что для какой-то функции $u^* \in D$ выполняются равенства ¹⁾

$$\int_{[a, b)} u^*(\xi) m(d\xi) = \int_{[a, b)} [u^*(d\xi) - u(\xi) k(d\xi)], \quad (31a)$$

$$l_n < a < b < r_n;$$

$$u^*(l_n) m(l_n) = u^*(l_n) - u(l_n) k(l_n); \quad (31b)$$

$$\int_{[a, b) \cap K_+} u^*(\xi) s_+(d\xi) = \int_{[a, b) \cap K_+} [u(d\xi) - u(\xi) k_+(d\xi)], \quad (32)$$

$$0 \leq a < b \leq 1;$$

$$u^*(1) = 0, \quad (33)$$

а оператор \mathfrak{G} оказывается совпадающим с глобальным дифференциальным оператором \mathfrak{G}^* , производящим отображение $u \in D(\mathfrak{G}^*) \rightarrow u^*$. Оператор \mathfrak{G}^* однозначен, так как $u^* \in D$, $0 < m[a, b)$ ($l_n \leq a < b < r_n$) и $s_+(a) < s_+(b)$ ($a < b$).

Аналогичное описание оператора \mathfrak{G} сохраняется и в общем случае; выкладки становятся несколько сложнее, но ничего нового не появляется. Доказательство удастся провести по образцу рассмотренного частного случая, используя расщепление, описанное в § 3.5, и оставшиеся движения, изученные в § 3.9.

Если читатель хочет пропустить *сингулярный* случай при первом чтении, ему нужно читать § 4.2—4.7 и 5.1—5.9, а потом вернуться и прочесть § 4.8—4.10, 5.10 и 5.11.

4.2. \mathfrak{G} как локальный дифференциальный оператор. Консервативный несингулярный случай

Рассмотрим консервативный несингулярный случай

$$P_a \{m_\infty = +\infty\} = 1, \quad 0 \leq a \leq 1; \quad (1)$$

$$P_a \{m_{a+0} = 0\} = 1, \quad 0 < a < 1; \quad (2a)$$

$$P_a \{m_{a-0} = 0\} = 1, \quad 0 < a < 1. \quad (2b)$$

¹⁾ В формуле (32) содержится условие согласования $u(b-0) = [1 - k_+(b)] u(b)$ ($0 \leq b < 1$).

Предположим, кроме того, что

$$P_a \{m_0 < +\infty\} > 0, \quad a < 1; \quad (3a)$$

$$P_a \{m_1 < +\infty\} > 0, \quad a > 0; \quad (3b)$$

$$P_0 \{m_{+0} = +\infty\} = 1; \quad (4a)$$

$$P_1 \{m_{1-0} = +\infty\} = 1; \quad (4b)$$

$$E_a \{m_0 \wedge m_1\} < +\infty, \quad 0 \leq a \leq 1. \quad (5)$$

Построим теперь шкалу s (т. е. непрерывную функцию, удовлетворяющую условию $s(a) < s(b)$ ($a < b$)) и меру скорости m (т. е. неотрицательную меру, удовлетворяющую условию $m[a, b] > 0$ ($a < b$)), такие, что

$$(\mathfrak{G}u)(\xi) = \frac{u^-(d\xi)}{m(d\xi)} = \frac{u^+(d\xi)}{m(d\xi)}, \quad u \in D(\mathfrak{G}), \quad 0 < \xi < 1. \quad (6)$$

Здесь u^- и u^+ — односторонние производные функции u по шкале

$$u^-(a) = \lim_{b \uparrow a} \frac{u(a) - u(b)}{s(a) - s(b)}, \quad u^+(a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{u(b) - u(a)}{s(b) - s(a)},$$

а формула (6) является сокращенной записью для

$$u^-(b) - u^-(a) = \int_{[a, b]} \mathfrak{G}u \, dm, \quad (7a)$$

$$u^+(b) - u^+(a) = \int_{(a, b]} \mathfrak{G}u \, dm, \quad (7b)$$

где $0 < a < b < 1$.

Положим по определению

$$s(\xi) = P_\xi \{m_1 < +\infty\} = P_\xi \{m_1 < m_0\}, \quad 0 < \xi < 1. \quad (8)$$

Пусть e_1 — характеристическая функция точки 1; тогда при $\varepsilon \downarrow 0$

$$u = E_\cdot (e^{-\varepsilon m_1}) = \varepsilon G_\varepsilon e_1 \uparrow s. \quad (9)$$

Полагая $\varepsilon \downarrow 0$ в соотношении

$$\varepsilon \times [G_\alpha e_1 - G_\varepsilon e_1 + (\alpha - \varepsilon) G_\alpha G_\varepsilon e_1] = 0, \quad (10)$$

получаем

$$\alpha G_\alpha s = s. \quad (11)$$

Это показывает, что

$$s \in D(\mathfrak{G}); \quad (12a)$$

$$\mathfrak{G}s = 0. \quad (12b)$$

Ясно, что $s(a) \leq s(b)$ ($a < b$); если при каких-то $a < b$ окажется $s(a) = s(b)$, то или $s(b) = 0$, что противоречит (3b), или же $s(a)/s(b) = P_a \{m_b < +\infty\} = 1$ и

$$0 < E_a(e^{-m_0}) = E_a\{e^{-m_0}, m_b < m_0\} = E_a(e^{-m_b}) E_b(e^{-m_0}) < E_a(e^{-m_0}), \quad (13)$$

чего не может быть. Это означает, что s является шкалой.

Так как выполнено (5), то при $a < \xi < b$

$$1 = P_\xi \{m_a \wedge m_b < +\infty\} = P_\xi \{m_a < m_b\} + P_\xi \{m_b < m_a\}. \quad (14)$$

Кроме того, если положить $m = m_a \wedge m_b$, легко вывести, что

$$\begin{aligned} s(\xi) &= P_\xi \{m < +\infty, m_1(\omega_m^+) < +\infty\} = \\ &= P_\xi \{m_a < m_b\} s(a) + P_\xi \{m_b < m_a\} s(b). \end{aligned} \quad (15)$$

Разрешая уравнения (14) и (15) относительно $P_\xi \{m_a < m_b\}$ и $P_\xi \{m_b < m_a\}$, находим выражение этих вероятностей через шкалу

$$\begin{aligned} P_\xi \{m_a < m_b\} &= \frac{s(b) - s(\xi)}{s(b) - s(a)}, \quad P_\xi \{m_b < m_a\} = \frac{s(\xi) - s(a)}{s(b) - s(a)}, \\ a &< \xi < b. \end{aligned} \quad (16)$$

Определим e_{ab} как среднее время выхода

$$e_{ab}(\xi) = E_\xi \{m_a \wedge m_b\}, \quad a < \xi < b. \quad (17)$$

Из формул (16) вытекает, что если при $a < \xi < b$ положить $m = m_a \wedge m_b$, то получим

$$\begin{aligned} e(\xi) &= e_{01}(\xi) = E_\xi [m + m_0(\omega_m^+) \wedge m_1(\omega_m^+)] = \\ &= e_{ab}(\xi) + \frac{s(b) - s(\xi)}{s(b) - s(a)} e(a) + \frac{s(\xi) - s(a)}{s(b) - s(a)} e(b). \end{aligned} \quad (18)$$

Это означает, что e — выпуклая вверх функция от шкалы.

Функция e также принадлежит $D(\mathcal{G})$. Действительно, пусть f — характеристическая функция интервала $(0, 1)$; тогда

$$G_\varepsilon f = E. \left[\int_0^{m_0 \wedge m_1} e^{-\varepsilon t} dt \right] \uparrow e, \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

Устремляя ε к 0 в соотношении

$$[G_\alpha - G_\varepsilon + (\alpha - \varepsilon) G_\alpha G_\varepsilon] f = 0, \quad (19)$$

находим, что $e = G_\alpha [f + \alpha e]$. Это означает, что

$$e \in D(\mathcal{G}); \quad (20a)$$

$$-\mathcal{G}e = f = \begin{cases} 1 & (0 < \xi < 1); \\ 0 & (\xi = 0, 1). \end{cases} \quad (20b)$$

В частности, в силу условий (2) и (3) функция e непрерывна на $[0, 1]$ (см. § 3.6).

Вообще, пусть e — выпуклая вверх функция, причем

$$e(0) = e(+0) = e(1) = e(1-0) = 0;$$

тогда

$$e(a) = - \int_0^1 G(a, b) e^{\pm}(db), \quad 0 < a < 1, \quad (21)$$

где G — функция Грина

$$G(a, b) = G(b, a) = \frac{[s(a) - s(0)][s(1) - s(b)]}{s(1) - s(0)}, \quad a \leq b, \quad (22)$$

а $e^-(db) = e^+(db)$ — неположительная мера, индуцированная функциями интервала

$$e^-[a, b] = e^-(b) - e^-(a), \quad e^-(a) = \lim_{b \uparrow a} \frac{e(a) - e(b)}{s(a) - s(b)}; \quad (23a)$$

$$e^+(a, b] = e^+(b) - e^+(a), \quad e^+(a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{e(b) - e(a)}{s(b) - s(a)}. \quad (23b)$$

Приведем доказательство.

Поскольку e выпукла вверх, имеем

$$\frac{e(b) - e(a)}{s(b) - s(a)} \uparrow e^+(a) \quad (b \downarrow a), \quad e^+(a) < +\infty \quad (a > 0), \quad e^+ \in \downarrow; \quad (24a)$$

$$\frac{e(a) - e(b)}{s(a) - s(b)} \downarrow e^-(a) \quad (b \uparrow a), \quad e^-(a) > -\infty \quad (a < 1), \quad e^- \in \downarrow, \quad (24b)$$

причем

$$e^-(a-0) = e^+(a-0) = e^-(a), \quad a < 1; \quad (25a)$$

$$e^-(a+0) = e^+(a+0) = e^+(a), \quad a > 0. \quad (25b)$$

Отсюда следует, что функции интервала (23) индуцируют одну и ту же неположительную меру $e^-(db) = e^+(db)$. Поскольку $e^{\pm} \in \downarrow$ и

$$e(0) = e(+0) = e(1) = e(1-0) = 0,$$

имеем

$$e(b) - e(0) \geq e^{\pm}(b) [s(b) - s(0)] \geq e^{\pm}\left(\frac{1}{2}\right) [s(b) - s(0)], \quad (26a)$$

$$b \leq \frac{1}{2};$$

$$e(1) - e(b) \leq e^{\pm}(b) [s(1) - s(b)] \leq e^{\pm}\left(\frac{1}{2}\right) [s(1) - s(b)], \quad b \geq \frac{1}{2}. \quad (26b)$$

Отсюда получаем, что при $0 < a < 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(a, b) e^{\pm}(db) &= \frac{s(1)-s(a)}{s(1)-s(0)} \int_{0 < b \leq a} [s(b)-s(0)] e^{\pm}(db) + \\ &+ \frac{s(a)-s(0)}{s(1)-s(0)} \int_{a < b < 1} [s(1)-s(b)] e^{\pm}(db) = \\ &= \frac{s(1)-s(a)}{s(1)-s(0)} \left[[s(a)-s(0)] e^{\pm}(a) - \int_0^a e^{\pm}(b) s(db) \right] + \\ &+ \frac{s(a)-s(0)}{s(1)-s(0)} \left[-[s(1)-s(a)] e^{\pm}(a) + \int_a^1 e^{\pm}(b) s(db) \right] = -e(a), \quad (27) \end{aligned}$$

т. е. формула (21) доказана.

Если применить теперь (21) к $e = E_*(m_0 \wedge m_1)$, то получим, что $e = \int_0^1 G dm$, где m — мера скорости:

$$m(db) = -e^{\pm}(db) \geq 0. \quad (28)$$

Так как член e_{ab} в (18) положителен, то $m[a, b] > 0$ ($a < b$). Теперь легко доказать (6).

Пусть дана функция $u \in D(\mathfrak{G})$. Из формулы Дынкина (3.7.7) при $m = m_0 \wedge m_1$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{s(\xi)-s(a)}{s(1)-s(0)} u(1) + \frac{s(1)-s(\xi)}{s(1)-s(0)} u(0) - u(\xi) = \\ = E_{\xi}[u(x_m)] - u(\xi) = E_{\xi} \left[\int_0^m (\mathfrak{G}u)(x_t) dt \right], \quad 0 < \xi < 1. \quad (29) \end{aligned}$$

Чтобы установить (6), достаточно доказать, что

$$E_* \left[\int_0^m f(x_t) dt \right] = \int_0^1 Gf dm, \quad f \in D, \quad (30)$$

продифференцировать полученную формулу

$$\frac{s(\xi)-s(0)}{s(1)-s(0)} u(1) + \frac{s(1)-s(\xi)}{s(1)-s(0)} u(0) - u(\xi) = \int_0^1 G(\xi, \eta) (\mathfrak{G}u)(\eta) m(d\eta). \quad (31)$$

Пусть дано множество $B \subseteq [0, 1]$ с характеристической функцией f . Функция $u_B = E_* \left[\int_0^m f(x_t) dt \right]$ выпукла вверх, так как

$$u_B(\xi) = E_\xi \left[\int_0^{m_a \wedge m_b} f(x_t) dt \right] + \frac{s(b) - s(\xi)}{s(b) - s(a)} u_B(a) + \\ + \frac{s(\xi) - s(a)}{s(b) - s(a)} u_B(b), \quad a < \xi < b, \quad (32)$$

причем $u_B(+0) = u_B(1-0) = 0$, поскольку $0 \leq u_B \leq e_{01}$. Выбирая $B = (b, 1]$ ($0 < b < 1$) и применяя формулу (21) и

$$u(\xi) = e_{b1}(\xi) + \frac{s(1) - s(\xi)}{s(1) - s(b)} u(b), \quad b \leq \xi, \quad u = u_{(b, 1]}, \quad e_{01}, \quad (33)$$

получаем

$$u_{(b, 1]} \geq \int_{(b, 1]} G dm; \quad (34a)$$

$$u_{[b, 1]} = \lim_{a \uparrow b} u_{(a, 1]} \geq \int_{[b, 1]} G dm. \quad (34b)$$

Но таким же образом мы устанавливаем, что

$$u_{[0, b)} \geq \int_{[0, b)} G dm, \quad (34c)$$

и, складывая (34b) и (34c), получаем

$$e = u_{[0, b)} + u_{[b, 1]} \geq \int_{[0, b)} G dm + \int_{[b, 1]} G dm = \int_0^1 G dm = e,$$

т. е.

$$u_{(b, 1]} = \int_{(b, 1]} G dm, \quad 0 \leq b \leq 1, \quad (35)$$

что сразу приводит к формуле (30).

Задача 1. Рассмотрим расщепление стандартного броуновского движения на независимые элементы: множество $\mathfrak{Z} = \{t: x(t) = 0\}$, экскурсии $e_n: n \geq 1$ и знаки $e_n: n \geq 1$ (см. § 2.9). Задача состоит в том, чтобы вычислить шкалу $s(d\xi)$ и меру скорости $m(d\xi)$ для *косого* броуновского движения, составленного из стандартных броуновских \mathfrak{Z} и $e_n: n \geq 1$ и *косых* знаков $e_n = \pm 1$, $P\{e_n = +1\} = \alpha$, $n \geq 1$, $0 < \alpha < 1$. (Для стандартного броуновского движения $\alpha = 1/2$.)

$$[s(d\xi) = (1 - \alpha)^{-1} d\xi, \quad m(d\xi) = 2(1 - \alpha) d\xi \quad \text{для } \xi \leq 0;$$

$$s(d\xi) = \alpha^{-1} d\xi, \quad m(d\xi) = 2\alpha d\xi \quad \text{для } \xi \geq 0.$$

Действительно, пусть \mathcal{Z}_n : $n \geq 1$ — некоторая (борелевская) нумерация смежных интервалов множества \mathcal{Z} , а m_{-1}^* , m_{+1}^* — моменты достижения ± 1 косым броуновским движением; тогда

$$\begin{aligned} \frac{s(+1)-s(0)}{s(+1)-s(-1)} &= P_0 \{m_{-1}^* < m_{+1}^*\} = \\ &= \sum_{n \geq 1} P_0 \{e_n = -1, m_{-1} \wedge m_{+1} \in \mathcal{Z}_n\} = \\ &= (1-\alpha) \sum_{n \geq 1} P_0 \{m_{-1} \wedge m_{+1} \in \mathcal{Z}_n\} = 1-\alpha \end{aligned}$$

или, что то же, $\frac{s(+1)-s(0)}{s(0)-s(-1)} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Чтобы закончить доказательство, воспользуйтесь тем, что косое и обычное броуновские движения совпадают вплоть до момента достижения точки 0.]

Задача 2. Рассмотрим частицу, движущуюся по множеству Z^1 целых чисел по следующему правилу: она ждет в точке $x(0) = l \in Z^1$ в течение экспоненциального времени $e_1 > 0$; в момент e_1 делает шаг величины ± 1 с вероятностями, зависящими от l :

$$0 < p_{\pm} = P_l \{x(e_1) = l \pm 1\}, \quad p_- + p_+ = 1;$$

затем она начинает движение заново, т. е. ждет в точке $x(e_1) = l \pm 1$ в течение независимого от e_1 экспоненциального времени $e_2 > 0$, и т. д. В. Феллер [12] установил, что производящий оператор \mathfrak{G} такого процесса гибели и размножения можно выразить через расстояние (шкалу) и положительные веса (меру скорости):

$$\mathfrak{G}u = \frac{u^+ - u^-}{m},$$

где

$$u^-(l) = \frac{u(l) - u(l-1)}{s(l) - s(l-1)};$$

$$u^+(l) = \frac{u(l+1) - u(l)}{s(l+1) - s(l)};$$

$$P_l \{m_a < m_b\} = \frac{s(b) - s(l)}{s(b) - s(a)}, \quad a < l < b;$$

$$0 < m(l) = \frac{s(l+1) - s(l-1)}{[s(l) - s(l-1)][s(l+1) - s(l)]} E_l(e_1).$$

Дать полное доказательство этого утверждения изложенным выше методом.

4.3. \mathfrak{G} как локальный дифференциальный оператор. Общий несингулярный случай

Рассмотрим теперь общую несингулярную диффузию D с интервалом состояний $[0, 1]$ и докажем существование шкалы s , неотрицательной убывающей меры k и положительной меры скорости m ,

определенных на $(0, 1)$ и таких, что для любой функции $u \in D(\mathfrak{G})$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{G}u)(\xi) m(d\xi) &= u^-(d\xi) - u(\xi) k(d\xi) = \\ &= u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi), \quad 0 < \xi < 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть $0 < a < b < 1$. Ясно, что с точностью до изменения масштаба условная диффузия (см. задачу 3.9.2)

$$D^* = [W, B, P_\xi^*(B) = P_\xi\{\omega_m^* \in B \mid m < +\infty\}, a \leq \xi \leq b], \quad (2)$$

$$m = m_a \wedge m_b,$$

удовлетворяет всем условиям предыдущего параграфа. Отсюда мы заключаем, что для шкалы

$$s^*(\xi) = P_\xi^*\{m_b < +\infty\}, \quad (3)$$

меры скорости¹⁾

$$m^*(d\xi) = -e^{*+}(d\xi), \quad e^*(\xi) = E_\xi^*(m), \quad (4)$$

и связанной с ними функции Грина G^*

$$E_\xi^* \left[\int_0^m f(x_t) dt \right] = \int_a^b G^*(\xi, \eta) f(\eta) m^*(d\eta), \quad (5)$$

$$a \leq \xi \leq b, \quad f \in C(a, b).$$

Положим по определению $f^* = f/P_\cdot\{m < +\infty\}$ на $[a, b]$.

Если $u \in D(\mathfrak{G})$, из формулы Дынкина следует, что при $a \leq \xi \leq b$

$$\begin{aligned} [E_\xi^*[u^*(x_m)] - u^*(\xi)] P_\xi\{m < +\infty\} &= E_\xi\{u(x_m), m < +\infty\} - u(\xi) = \\ &= E_\xi \left[\int_0^{m \wedge m_\infty} (\mathfrak{G}u)(x_t) dt \right] = \\ &= \int_0^{+\infty} dt E_\xi\{(\mathfrak{G}u)^*(x_t) P_{x_t}\{m < +\infty\}, t < m \wedge m_\infty\} = \\ &= \int_0^{+\infty} dt E_\xi^*\{(\mathfrak{G}u)^*(x_t), t < m\} P_\xi\{m < +\infty\} = \\ &= E_\xi^* \left[\int_0^m (\mathfrak{G}u)^*(x_t) dt \right] P_\xi\{m < +\infty\}. \end{aligned} \quad (6)$$

¹⁾ В применении к функциям e^* (со звездочкой) знаки $-$ и $+$ означают левое и правое дифференцирование по s^* .

Учитывая равенство (5), выводим из (6), что

$$-u^*(\xi) + \frac{s^*(b) - s^*(\xi)}{s^*(b) - s^*(a)} u^*(a) + \frac{s^*(\xi) - s^*(a)}{s^*(b) - s^*(a)} u^*(b) = \\ = \int_a^b G^*(\xi, \eta) (\mathcal{G}u)^* m^*(d\eta), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (7)$$

Это означает, что

$$(\mathcal{G}u)^*(\xi) m^*(d\xi) = u^{*-}(d\xi) = u^{*+}(d\xi), \quad a < \xi < b, \quad u \in D(\mathcal{G}). \quad (8)$$

Рассмотрим новую шкалу

$$s(d\xi) = [p(\xi)]^2 s^*(d\xi), \quad p(\xi) = P_\xi \{m < +\infty\}, \quad a \leq \xi \leq b. \quad (9)$$

Пусть $\alpha > 0$; тогда $G_\alpha 1 \in D(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}G_\alpha 1 = \alpha G_\alpha 1 - 1 \leq 0$, и, используя (7), получаем отсюда, что $(G_\alpha 1)^*$ — выпуклая вверх функция от s^* . Значит, и $1^* = \lim_{\alpha \uparrow +\infty} \alpha (G_\alpha 1)^*$ является выпуклой вверх функцией от s^* . Выражая производную -1^{**} по s^* через производные по s , мы находим, что¹⁾

$$-1^{**}(\xi) = p^+(\xi) \in \uparrow. \quad (10)$$

Формула (10) позволяет ввести неотрицательную убывающую меру

$$k(d\xi) = p(\xi)^{-1} p^+(d\xi) = p(\xi)^{-1} p^-(d\xi), \quad (11)$$

а также определить положительную меру скорости

$$m(d\xi) = p(\xi)^{-2} m^*(d\xi). \quad (12)$$

Из (8) вытекает, что для $u \in D(\mathcal{G})$

$$(\mathcal{G}u)(\xi) m(d\xi) = p(\xi)^{-1} (\mathcal{G}u)^*(\xi) m^*(d\xi) = \\ = p(\xi)^{-1} u^{*+}(d\xi) = p(\xi)^{-1} (p^2 (up^{-1})^+)(d\xi) = \\ = p(\xi)^{-1} (u^+ p - up^+)(d\xi) = u^+(d\xi) - u(\xi) p(\xi)^{-1} p^+(d\xi) = \\ = u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi) = u^-(d\xi) - u(\xi) k(d\xi), \quad (13)$$

т. е. формула (1) справедлива при $a < \xi < b$.

Формула (13) — локальная; докажем глобальную формулу (1).

Пусть даны какие-то другие s^* , k^* , m^* , для которых формула (13) справедлива; положим по определению

$$g_1(\xi) = E_\xi(e^{-\alpha m_b}); \quad (14a)$$

$$g_2(\xi) = E_\xi(e^{-\alpha m_a}). \quad (14b)$$

¹⁾ В применении к функциям e (без звездочки) знаки $-$ и $+$ означают левое и правое дифференцирование по s .

Тогда если $u(\xi) = G_a[(a - \xi) \vee 0]$, то $u(a) > 0$ и $g_2 = u(a)^{-1}u(a < \xi < b)$. Применяя формулу (13) с s^* , k^* , m^* , получаем¹⁾

$$\alpha g_2(\xi) m^*(d\xi) = g_2^{*+}(d\xi) - g_2(\xi) k^*(d\xi), \quad a < \xi < b; \quad (15a)$$

аналогично получаем

$$\alpha g_1(\xi) m^*(d\xi) = g_1^{*+}(d\xi) - g_1(\xi) k^*(d\xi). \quad (15b)$$

Так как $g_1 \in \uparrow$, $g_2 \in \downarrow$ и $0 = g_1^{*+}(d\xi) g_2(\xi) - g_1(\xi) g_2^{*+}(d\xi)$, то вронскиан $g_1^{*+}g_2 - g_1g_2^{*+}$ является константой (положительной). Поэтому $s^*(d\xi)$ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя (положительного); а при фиксированном $s^*(d\xi)$ из формул (15) однозначно определяются $k^*(d\xi)$ и $m^*(d\xi)$:

$$s^*(d\xi) = ls(d\xi), \quad k^*(d\xi) = l^{-1}k(d\xi), \quad m^*(d\xi) = l^{-1}m(d\xi),$$

$$l = \frac{s^*(a, b)}{s(a, b)} > 0. \quad (16)$$

Далее, любая точка $0 < \xi < 1$ принадлежит какому-то интервалу (a, b) , на котором определены такие s , k и m , что выполнено (13). Если даны два таких интервала, то соответствующие s , k и m согласуются между собой на их общей части так, как это указывает формула (16). Используя это, легко соединить локальные шкалы, меры скорости и убывающие меры и получить глобальные, для которых будет справедлива формула (1).

4.4. Другое доказательство

Формулу (4.3.1) можно доказать, усовершенствовав метод § 4.2; при этом мы обойдемся без условной диффузии, рассматриваемой в § 4.3.

Если $0 < a < b < 1$, то функция

$$p_{ba}(\xi) = P_\xi\{m_b < m_a\}, \quad a \leq \xi \leq b, \quad (1)$$

удовлетворяет условиям

$$p_{ba}(\xi) < p_{ba}(\eta), \quad \xi < \eta; \quad (2a)$$

$$p_{ba} \in C[a, b]; \quad (2b)$$

$$p_{ba}(a) = 0, \quad p_{ba}(b) = 1. \quad (2c)$$

Формула (2c) не требует доказательства; докажем (2a). Предположим, что $p_{ba}(\eta) = 0$ при каком-то $a < \eta < b$; тогда

$$0 < E_\eta[e^{-m_b}] = E_\eta\{e^{-m_b}, m_a < m_b\} < E_a[e^{-m_b}],$$

¹⁾ В применении к функциям g символ $^{*+}$ означает правое дифференцирование по s^* .

что невозможно. Аналогично доказывается, что $p_{\eta a}(\xi) < 1$ ($\xi < \eta$). Поэтому

$$p_{ba}(\xi) = p_{\eta a}(\xi) p_{ba}(\eta) < p_{ba}(\eta),$$

что и требовалось доказать. Так как функция $p_{\eta a}(\xi)$ непрерывна по η ($\eta > \xi$), то $p_{ba}(\eta)$ непрерывна ($\eta > a$), и для завершения доказательства формулы (2b) достаточно применить оценку

$$p_{\eta a}(a+0) \leq P_{\eta} \{m_b < \varepsilon\} \downarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0, a < \eta < b).$$

Меняя местами a и b , получаем, что функция

$$p_{ab}(\xi) = P_{\xi} \{m_a < m_b\}, \quad a \leq \xi \leq b, \quad (3)$$

удовлетворяет аналогичным условиям

$$p_{ab}(\xi) > p_{ab}(\eta), \quad \xi < \eta; \quad (4a)$$

$$p_{ab} \in C[a, b]; \quad (4b)$$

$$p_{ab}(a) = 1, \quad p_{ab}(b) = 0. \quad (4c)$$

Докажем, что p_{ab} — выпуклая вниз функция от $t = p_{ba}$. Действительно, если $a < a^* < \xi < b^* < b$, то

$$p_{ab}(\xi) = p_{a \cdot b \cdot}(\xi) p_{ab}(a^*) + p_{b \cdot a \cdot}(\xi) p_{ab}(b^*); \quad (5a)$$

$$p_{ba}(\xi) = p_{a \cdot b \cdot}(\xi) p_{ba}(a^*) + p_{b \cdot a \cdot}(\xi) p_{ba}(b^*). \quad (5b)$$

Разрешаем уравнения (5b) и

$$p(\xi) = p_{a \cdot b \cdot}(\xi) + p_{b \cdot a \cdot}(\xi) \quad (\leq 1) \quad (6)$$

относительно $p_{b \cdot a \cdot}$ и $p_{a \cdot b \cdot}$ и, выражая последние через p и $t = p_{ba}$:

$$p_{b \cdot a \cdot}(\xi) = \frac{t(\xi) - p(\xi) t(a^*)}{t(b^*) - t(a^*)} = \frac{t(\xi) - t(a^*)}{t(b^*) - t(a^*)} + \frac{[1 - p(\xi)] p_{ba}(a^*)}{t(b^*) - t(a^*)}; \quad (7a)$$

$$p_{a \cdot b \cdot}(\xi) = \frac{p(\xi) t(b^*) - t(\xi)}{t(b^*) - t(a^*)} = \frac{t(b^*) - t(\xi)}{t(b^*) - t(a^*)} - \frac{[1 - p(\xi)] p_{ba}(b^*)}{t(b^*) - t(a^*)}, \quad (7b)$$

подставляем в (5a) и находим

$$\begin{aligned} p_{ab}(\xi) &= \frac{t(b^*) - t(\xi)}{t(b^*) - t(a^*)} p_{ab}(a^*) + \frac{t(\xi) - t(a^*)}{t(b^*) - t(a^*)} p_{ab}(b^*) - \\ &\quad - \frac{1 - p(\xi)}{t(b^*) - t(a^*)} [p_{ba}(b^*) p_{ab}(a^*) - p_{ba}(a^*) p_{ab}(b^*)] \leq \\ &\leq \frac{t(b^*) - t(\xi)}{t(b^*) - t(a^*)} p_{ab}(a^*) + \frac{t(\xi) - t(a^*)}{t(b^*) - t(a^*)} p_{ab}(b^*), \end{aligned} \quad (8)$$

что и требовалось доказать.

Но это означает, что функция

$$0 \geq p^* = \lim_{\eta \downarrow \xi} \frac{p_{ab}(\eta) - p_{ab}(\xi)}{t(\eta) - t(\xi)}, \quad \xi < b, \quad (9)$$

удовлетворяет условиям

$$p^* \in \uparrow; \quad (10a)$$

$$\lim_{\eta \downarrow \xi} p^*(\eta) = p^*(\xi). \quad (10b)$$

Если определить шкалу

$$s(\xi) = s_{ab}(\xi) = \int_a^\xi [p_{ab} dp_{ba} - p_{ba} dp_{ab}] = \int_a^\xi [p_{ab} - tp^*] dt, \quad (11)$$

то оказывается, что

$$t^+ = p_{ba}^+(\xi) = \lim_{\eta \downarrow \xi} \frac{t(\eta) - t(\xi)}{s(\eta) - s(\xi)} = [p_{ab} - tp^*]^{-1} \in \uparrow; \quad (12)$$

$$p_{ab}^+(\xi) = \lim_{\eta \downarrow \xi} \frac{p_{ab}(\eta) - p_{ab}(\xi)}{s(\eta) - s(\xi)} = p^* t^+ \in \uparrow, \quad (13)$$

и [см. (11)]

$$p_{ba}^+ p_{ab} - p_{ba} p_{ab}^+ = t^+ [p_{ab} - tp^*] = 1. \quad (14)$$

Это позволяет ввести убывающую меру

$$0 \leq k_{ab}(d\xi) = \frac{p^+(d\xi)}{p(\xi)}, \quad a < \xi < b, \quad p = p_{ab}, \quad p_{ba}. \quad (15)$$

Пусть даны $a < a^* < b^* < b$; применяя тот же метод к $p_{a^*b^*}$ и $p_{b^*a^*}$, находим шкалу $s_{a^*b^*}$ и убывающую меру $k_{a^*b^*}$ для $a^* < \xi < b^*$. Разрешая уравнения (5) относительно $p_{a^*b^*}$ и $p_{b^*a^*}$:

$$p_{a^*b^*}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} p_{ab}(\xi) & p_{ab}(b^*) \\ p_{ba}(\xi) & p_{ba}(b^*) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_{ab}(a^*) & p_{ab}(b^*) \\ p_{ba}(a^*) & p_{ba}(b^*) \end{vmatrix}} = \frac{B \begin{pmatrix} a & b \\ \xi & b^* \end{pmatrix}}{B \begin{pmatrix} a & b \\ a^* & b^* \end{pmatrix}}; \quad (16a)$$

$$p_{b^*a^*}(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} p_{ab}(a^*) & p_{ab}(\xi) \\ p_{ba}(a^*) & p_{ba}(\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_{ab}(a^*) & p_{ab}(b^*) \\ p_{ba}(a^*) & p_{ba}(b^*) \end{vmatrix}} = \frac{B \begin{pmatrix} a & b \\ a^* & \xi \end{pmatrix}}{B \begin{pmatrix} a & b \\ a^* & b^* \end{pmatrix}}, \quad (16b)$$

получаем с помощью несложных преобразований, что при $a^* < \xi < b^*$

$$s_{a^*b^*}(d\xi) = B^{-1} s_{ab}(d\xi); \quad (17a)$$

$$k_{a^*b^*}(d\xi) = B k_{ab}(d\xi), \quad (17b)$$

где $B = B \begin{pmatrix} a & b \\ a^* & b^* \end{pmatrix}$.

Перейдем теперь к мере скорости. Введем среднее время выхода

$$e(\xi) = e_{ab}(\xi) = E_{\xi} \{m_a \wedge m_b \wedge m_{\infty}\}, \quad a \leq \xi \leq b. \quad (18)$$

Выберем интервал (a, b) настолько малым, чтобы для какой-то функции $u \in D(\mathfrak{G})$ было $\mathfrak{G}u > 0$ ($a \leq \xi \leq b$) (такими интервалами (a, b) можно покрыть весь интервал $(0, 1)$).

При $a < \xi < b$ имеем

$$\begin{aligned} E_{\xi} [u(x(m_a \wedge m_b \wedge m_{\infty}))] - u(\xi) &= \\ &= E_{\xi} \left[\int_0^{m_a \wedge m_b \wedge m_{\infty}} \mathfrak{G}u \, dt \right] \geq \min_{[a, b]} \mathfrak{G}u \cdot e(\xi), \end{aligned} \quad (19)$$

что показывает, что функция e ограничена и что

$$e(a+0) = e(b-0) = 0. \quad (20)$$

Кроме того, при $a < a^* < \xi < b^* < b$

$$e(\xi) = e_{a^*b^*}(\xi) + p_{a^*b^*}(\xi) e(a^*) + p_{b^*a^*}(\xi) e(b^*). \quad (21)$$

Легко проверить, что $\sup_{[a^*, b^*]} e_{a^*b^*}$ мал для малого (a^*, b^*) (достаточно в формулу (19) подставить (a^*, b^*) вместо (a, b)); поэтому из (21) вытекает, что $e_{ab} \in C[a, b]$.

Теперь подставим (16a) и (16b) в (21); получим

$$B \begin{pmatrix} a & b \\ a^* & b^* \end{pmatrix} e(\xi) = B \begin{pmatrix} a & b \\ a^* & b^* \end{pmatrix} e_{a^*b^*}(\xi) + B \begin{pmatrix} a & b \\ \xi & b^* \end{pmatrix} e(a^*) + B \begin{pmatrix} a & b \\ a^* & \xi \end{pmatrix} e(b^*) \quad (22)$$

или, если собрать определители вместе,

$$0 \geq -B \begin{pmatrix} a & b \\ a^* & b^* \end{pmatrix} e_{a^*b^*}(\xi) = \begin{vmatrix} e(b^*) & e(\xi) & e(a^*) \\ p_{ba}(b^*) & p_{ba}(\xi) & p_{ba}(a^*) \\ p_{ab}(b^*) & p_{ab}(\xi) & p_{ab}(a^*) \end{vmatrix}, \quad (23)$$

$$a < a^* < \xi < b^* < b.$$

Формула (21) означает, что $e(\xi)$ лежит выше, чем линейная интерполирующая функция

$$l(\xi) = p_{a^*b^*}(\xi) e(a^*) + p_{b^*a^*}(\xi) e(b^*) \quad (a^* < \xi < b^*).$$

Функция l удовлетворяет соотношению¹⁾

$$l^{\pm}(d\xi) - k_{ab}(d\xi) l(\xi) = 0.$$

¹⁾ $l^{+}(\xi) = \lim_{\eta \downarrow \xi} \frac{l(\eta) - l(\xi)}{s_{ab}(\eta) - s_{ab}(\xi)}; \quad l^{-}(\xi) = \lim_{\eta \uparrow \xi} \frac{l(\xi) - l(\eta)}{s_{ab}(\xi) - s_{ab}(\eta)}.$

Будем представлять себе такие l как прямые; тогда ситуацию, выражаемую формулами (21)–(23), естественно описать словами: функция e *выпукла вверх относительно линейной формы*¹⁾

$$u^\pm(d\xi) - k_{ab}(d\xi) u(\xi).$$

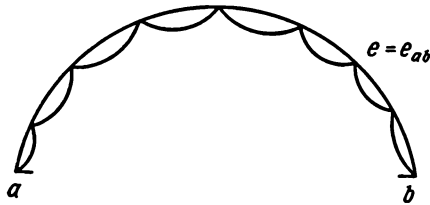
Мы можем ожидать, что при этом

$$e(\xi) = e_{ab}(\xi) = \int_a^b G_{ab}(\xi, \eta) m_{ab}(d\eta), \quad a < \xi < b, \quad (24)$$

где $m_{ab}(d\xi)$ — мера (положительная) — $[e^\pm(d\xi) - k(d\xi)e(\xi)]$, а G_{ab} — функция Грина

$$G_{ab}(\xi, \eta) = G_{ab}(\eta, \xi) = p_{ba}(\xi) p_{ab}(\xi), \quad \xi \leq \eta. \quad (25)$$

Для доказательства формулы (24) рассмотрим разбиение Δ отрезка $[a, b]$ и между каждой парой последовательных точек



Р и с. 1.

деления $a \leq a^* < b^* \leq b$ определим интерполирующую функцию

$$e_\Delta(\xi) = p_{a^*b^*}(\xi) e(a^*) + p_{b^*a^*}(\xi) e(b^*), \quad a^* \leq \xi \leq b^*. \quad (26)$$

(См. рис. 1.)

Имеем: $e_\Delta \in C[a, b]$, $e_\Delta \leq e$ и $e_\Delta \uparrow e$, когда диаметр разбиения, убывая, стремится к 0; мера $m_\Delta(d\xi) \equiv [e^\pm(d\xi) - k_{ab}(d\xi)e_\Delta(\xi)]$ ($a < \xi < b$) сосредоточена в точках деления разбиения.

Мера m_Δ неотрицательна. Действительно, пусть $a < \xi < b$ — одна из точек деления, и пусть $a < a^* < \xi < b^* < b$; тогда имеем (используя соотношения $e_\Delta \leq e$, $e_\Delta(\xi) = e(\xi)$ и формулу (23))

$$\begin{vmatrix} e_\Delta(b^*) & e_\Delta(\xi) & e_\Delta(a^*) \\ p_{ba}(b^*) & p_{ba}(\xi) & p_{ba}(a^*) \\ p_{ab}(b^*) & p_{ab}(\xi) & p_{ab}(a^*) \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} e(b^*) & e(\xi) & e(a^*) \\ p_{ba}(b^*) & p_{ba}(\xi) & p_{ba}(a^*) \\ p_{ab}(b^*) & p_{ab}(\xi) & p_{ab}(a^*) \end{vmatrix} < 0. \quad (27)$$

¹⁾ См. частный случай этой идеи в работе М. Хейнса [1].

Преобразуя определитель в левой части, получаем

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \lim_{\substack{a^* \uparrow \xi \\ b^* \downarrow \xi}} \begin{vmatrix} \frac{e_\Delta(b^*) - e_\Delta(\xi)}{s(b^*) - s(\xi)} & e_\Delta(\xi) & \frac{e_\Delta(\xi) - e_\Delta(a^*)}{s(\xi) - s(a^*)} \\ p_{ba}(b^*) - p_{ba}(\xi) & p_{ba}(\xi) & \frac{p_{ba}(\xi) - p_{ba}(a^*)}{s(\xi) - s(a^*)} \\ p_{ab}(b^*) - p_{ab}(\xi) & p_{ab}(\xi) & \frac{p_{ab}(\xi) - p_{ab}(a^*)}{s(\xi) - s(a^*)} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} e_\Delta^+(\xi) & e_\Delta(\xi) & e_\Delta^-(\xi) \\ p_{ba}^+(\xi) & p_{ba}(\xi) & p_{ba}^-(\xi) \\ p_{ab}^+(\xi) & p_{ab}(\xi) & p_{ab}^-(\xi) \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} e_\Delta^+(\xi) - e_\Delta^-(\xi) - k_{ab}(\xi) e_\Delta(\xi) & e_\Delta(\xi) & e_\Delta^-(\xi) \\ p_{ba}^+(\xi) - p_{ba}^-(\xi) - k_{ab}(\xi) p_{ba}(\xi) & p_{ba}(\xi) & p_{ba}^-(\xi) \\ p_{ab}^+(\xi) - p_{ab}^-(\xi) - k_{ab}(\xi) p_{ab}(\xi) & p_{ab}(\xi) & p_{ab}^-(\xi) \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} -m_\Delta(\xi) & e_\Delta(\xi) & e_\Delta^-(\xi) \\ 0 & p_{ba}(\xi) & p_{ba}^-(\xi) \\ 0 & p_{ab}(\xi) & p_{ab}^-(\xi) \end{vmatrix} = m_\Delta(\xi) \cdot [p_{ba}^- p_{ab} - p_{ba} p_{ab}^-] = m_\Delta(\xi), \quad (28)
 \end{aligned}$$

т. е. в каждой точке деления $m_\Delta \geq 0$.

Легко убедиться с помощью простой выкладки, что $e^* \equiv e_\Delta - \int G_{ab} dm_\Delta$ является решением задачи

$$e^{*+}(d\xi) - k_{ab}(d\xi) e^*(\xi) = 0, \quad a < \xi < b, \quad (29a)$$

$$e^*(a+0) = e^*(b-0) = 0. \quad (29b)$$

А значит, $e^* \equiv 0$. В самом деле, пусть, например, $0 < d = \max_{[a, b]} e^*$ и $a < \eta < b$ — наименьший корень уравнения $e^* = d$. Тогда (в силу (29a)) $0 \geq e^{*-}$ в некоторой левой окрестности точки η , что противоречит неравенству $d > e^*(\xi)$ ($\xi < \eta$) и означает, что $e_\Delta = \int G_{ab} dm_\Delta$.

Далее, так как $e \geq e_\Delta = \int G_{ab} dm_\Delta$, то, если мы выберем $a < c < b$ и положим

$$n_\Delta(d\xi) = \begin{cases} p_{ba}(\xi) m_\Delta(d\xi), & a < \xi < c; \\ p_{ab}(\xi) m_\Delta(d\xi), & b > \xi \geq c, \end{cases} \quad (30)$$

полная масса $n_\Delta[a, b]$ этой меры ограничена. Выберем такие разбиения Δ с диаметрами, стремящимися к 0, что n_Δ сходится к неот-

рицательной мере n на $[a, b]$. Тогда получим

$$e_{\Delta} = \int_a^b G_{ab} dm_{\Delta} \uparrow e = n(a) p_{ab}(\xi) + n(b) p_{ba}(\xi) + \int_a^b G_{ab} dm_{ab}, \quad (31)$$

где

$$m_{ab}(d\xi) = \begin{cases} p_{ba}(\xi)^{-1} n(d\xi), & a < \xi < c; \\ p_{ab}(\xi)^{-1} n(d\xi), & b > \xi \geq c, \end{cases} \quad (32)$$

и

$$n(a) = e(a+0) = n(b) = e(b-0) = 0. \quad (33)$$

Доказательство формулы (24) завершено.

Мера m_{ab} и есть *мера скорости*. Теперь нужно, применяя формулы (21) и (17), доказать, что m_{ab} преобразуется в соответствии с правилом

$$m_{a \cdot b \cdot}(d\xi) = B \begin{pmatrix} a & b \\ a \cdot & b \cdot \end{pmatrix} m_{ab}(d\xi). \quad (34)$$

Конец доказательства формулы (4.3.1) проводится, как в § 4.2.

Задача 1. Доказать, что при $a < b$

$$p_{ab}(\xi) \leq \frac{s(b)-s(\xi)}{s(b)-s(a)}, \quad p_{ba}(\xi) \leq \frac{s(\xi)-s(a)}{s(b)-s(a)},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $k(a, b) = 0$.

[Функция $p(\xi) = p_{ab}(\xi)$ является решением задачи $p^+(d\xi) = p(\xi)k(d\xi)$, $p(a) = 1$, $p(b) = 0$, и поэтому

$$p(\xi) \leq \frac{s(b)-s(\xi)}{s(b)-s(a)} p(a) + \frac{s(\xi)-s(a)}{s(b)-s(a)} p(b) = \frac{s(b)-s(\xi)}{s(b)-s(a)} \equiv l(\xi).$$

График p не может касаться l внутри (a, b) , если только это не линейная функция от s , т. е. $p^+(d\xi) = p(\xi)k(d\xi) = 0$.]

Задача 2. Доказать, что $P_a\{m_b \leq t\}$ — выпуклая вниз функция от $s = s(a)$ при $a \leq b$ и при $a \geq b$.

$$\begin{aligned} [P_a\{m_b \leq t\} \leq P_a\{m_b(\omega^+_{m_\xi} \wedge m_\eta) \leq t\} = \\ = p_{\xi\eta}(a) P_\xi\{m_b \leq t\} + p_{\eta\xi}(a) P_\eta\{m_b \leq t\} \end{aligned}$$

при $\xi < a < \eta < b$ или $\xi > a > \eta > b$; далее используйте результат задачи 1.]

Задача 3. Рассмотрим класс $D(\mathcal{G}^*)$ таких непрерывных функций u , что для некоторой непрерывной функции u^*

$$u^+(b) - u^+(a) = \int_{(a, b]} [u(\xi)k(d\xi) + u^*(\xi)m(d\xi)], \quad 0 < a < b < 1;$$

и пусть \mathfrak{G}^* — дифференциальный оператор

$$(\mathfrak{G}^*u)(\xi) \equiv u^*(\xi) = \frac{u^+(d\xi) - u(\xi)k(d\xi)}{m(d\xi)}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Задача состоит в том, чтобы показать, что $\mathfrak{G}^*u \leq 0$ в каждой точке ξ , $0 < \xi < 1$, где $u(\xi)$ принимает неотрицательный локальный максимум (см. задачу 3.7.1).

[Пусть ξ , $0 < a < \xi < b < 1$, таково, что $u(\eta) \leq u(\xi)$ (≥ 0) и $(\mathfrak{G}^*u)(\eta) > 0$ при $a < \eta < b$. Тогда находим, что

$$0 > p_{ab}(\xi)u(a) + p_{ba}(\xi)u(b) - u(\xi) = \int_a^b G_{ab}(\xi, \eta)(\mathfrak{G}^*u)(\eta)m(d\eta) > 0,$$

чего не может быть.]

Задача 4. Доказать, что $P_a\{m_b < +\infty\}P_b\{m_a < +\infty\}$ на $(0, 1) \times (0, 1)$ либо тождественно равно 1, либо меньше 1. Диффузия \mathbf{D} в первом случае называется *возвратной*, а во втором — *невозвратной*.

[Если $0 < a < b < 1$ и $P_a\{m_b < +\infty\}P_b\{m_a < +\infty\} = 1$, то $p_b(\xi) = P_\xi\{m_b < +\infty\}$ является решением задачи

$$p^+(d\xi) = p(\xi)k(d\xi), \quad 0 < \xi < b;$$

$$p(\xi) = 1, \quad \xi = a, b.$$

Используя то, что $0 \leq p_b^+ \in \uparrow$, находим, что $p_b(\xi) \equiv 1$ ($0 < \xi < b$). Но тогда $k(d\xi) = 0$ ($0 < \xi < b$); и так как по той же причине $k(d\xi) = 0$ ($a < \xi < 1$), то $p_\eta(\xi) = P_\xi\{m_\eta < +\infty\}$ ($1 > \eta > b$) является решением задачи

$$p^+(d\xi) = 0, \quad 0 < \xi < \eta;$$

$$p(\eta - 0) = 1;$$

$$p^+(\xi) = 0, \quad a < \xi < b.$$

Это означает, что $p_\eta(\xi) = 1$ ($0 < \xi < \eta$) при всех $\eta < 1$.]

4.5. \mathfrak{G} в изолированной сингулярной точке

Пусть дана несингулярная диффузия \mathbf{D} на интервале Q с концами 0 и 1. Если точка 0 не принадлежит Q , добавим ее и положим по определению $P_0\{m_{+0} = m_\infty = +\infty\} = 1$.

Мы изменим \mathbf{D} так, чтобы выполнялись условия

$$e_1 = E_0(e^{-m_{+0}}) = e_2 = \lim_{b \downarrow 0} E_{+0}(e^{-m_b}); \quad (1a)$$

$$e_3 = E_{+0}(e^{-m_0}) = e_4 = \lim_{b \downarrow 0} E_b(e^{-m_{+0}}). \quad (1b)$$

Тогда

$$e_1, e_2, e_4 = 0 \text{ или } 1; \quad (2a)$$

$$e_1 \leq e_2, e_3 \leq e_4; \quad (2b)$$

$$e_1 e_3 = e_2 e_4 \quad (2c)$$

[см. формулы (3.3.3) — (3.3.5)]. Поэтому если $e_1 < e_2$, то

$$e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = e_4 = 0; \quad (3a)$$

условие (1b) выполнено автоматически, и (см. задачу 3.6.3) P_0 можно изменить так, чтобы было $P_0 \{m_{+0} = 0\} = 1$, т. е. $e_1 = 1$. Если же $e_1 = e_2$, но $e_3 < e_4$, то

$$e_3 < 1 = e_4, e_1 = e_2 = 0; \quad (3b)$$

условие (1a) выполнено автоматически; $m_{+0} = m_0 \wedge m_\infty$, если $x(0) > 0$, и $m_{+0} < +\infty$. Чтобы изменить диффузию так, как нам нужно, достаточно рассмотреть $[x^*(t) : t \geq 0, P.]$, где

$$x^*(t) = \begin{cases} x(t), & t < m_0 \wedge m_{+0}; \\ 0, & t \geq m_0 \wedge m_{+0}. \end{cases}$$

Изменим теперь D в 1 так, чтобы $1 \in Q$ и

$$E_1(e^{-m_{1-0}}) = \lim_{b \uparrow 1} E_{1-0}(e^{-mb}); \quad (4a)$$

$$E_{1-0}(e^{-m_1}) = \lim_{b \uparrow 1} E_b(e^{-m_{1-0}}); \quad (4b)$$

всюду ниже будет рассматриваться именно эта измененная диффузия.

Пусть $u \in D(\mathfrak{G})$; если $P_0 \{m_{+0} < +\infty\} = 0$, то ¹⁾

$$(\mathfrak{G}u)(0) = -\chi(0)u(0), \quad \chi(0) = [E_0(m_\infty)]^{-1}. \quad (5a)$$

Если же $P_0 \{m_{+0} = 0\} = 1$ и при любом выборе $u \in D(\mathfrak{G})$ выполняется соотношение $c_1 u(0) + c_2 (\mathfrak{G}u)(0) = 0$, то для любой функции $f \in D$ при $\alpha > 0$ будет $[c_1 + c_2 \alpha](G_\alpha f)(0) = c_2 f(0)$. Выбирая функцию f так, чтобы $f(0) = 0 < f(b)$ ($b > 0$), из $(G_\alpha f)(0) > 0$ получаем $c_1 = c_2 = 0$. Короче говоря, если $P_0 \{m_{+0} = 0\} = 1$, то $u(0)$ и $(\mathfrak{G}u)(0)$ независимы для $u \in D(\mathfrak{G})$.

Но как мы сейчас докажем, если $P_0 \{m_{+0} = 0\} = 1$, для любого $u \in D(\mathfrak{G})$ существует ²⁾

$$u^+(0) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{u(b) - u(0)}{s(b) - s(0)} = u^+(+0), \quad (6)$$

¹⁾ $e = E_0(m_\infty) > 0$; если $e = +\infty$, полагаем e^{-1} равным 0

²⁾ Если $s(0) = -\infty$, полагаем $u^+(0) = 0$.

и $u(0)$, $u^+(0)$ и $(\mathfrak{G}u)(0)$ связаны соотношением

$$(\mathfrak{G}u)(0)m(0) = u^+(0) - u(0)k(0), \quad u \in D(\mathfrak{G}). \quad (5b)$$

Здесь ¹⁾

$$k(0) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{P_0 \{m_b = +\infty\}}{s(b) - s(0)}; \quad (7a)$$

$$m(0) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{E_0 \{m_b \wedge m_\infty\}}{s(b) - s(0)}. \quad (7b)$$

Формула (5b) дополняет формулу (4.3.1):

$$(\mathfrak{G}u)(\xi)m(d\xi) = u^+(d\xi) - u(\xi)k(d\xi), \quad 0 < \xi < 1.$$

Начнем с доказательства формулы (6). Если функция $f \in D$ такова, что $f(a) = 0$ ($a > 1/2$), то для $u = G$, $f \in D(\mathfrak{G})$ выполняется $u(a) = E_a(e^{-m_{1/2}})u(1/2)$ ($a < 1/2$). Так как $u(1/2) > 0$, то $0 \leq u(a) \in \uparrow$ ($0 < a \leq 1/2$); поскольку $P_0\{m_{+0} = 0\} = 1$, имеем $u(+0) = u(0) > 0$. Пользуясь тем, что $(\mathfrak{G}u)(a) = u(a)$ ($a \leq 1/2$), из $0 \leq u \in \uparrow$ получаем, что $0 \leq u^+ \in \uparrow$ слева от точки $1/2$. Из всего этого следует, что

$$\begin{aligned} k\left(0, \frac{1}{2}\right] + m\left(0, \frac{1}{2}\right] &\leq u(0)^{-1} \left[\int_{+0}^{1/2} uk(d\xi) + \int_{+0}^{1/2} um(d\xi) \right] \leq \\ &\leq u(0)^{-1} \left[u^+\left(\frac{1}{2}\right) - u^+(+0) \right] < +\infty, \quad (8) \end{aligned}$$

откуда вытекает сходимость интеграла

$$\int_{+0}^{1/2} uk(d\xi) + \int_{+0}^{1/2} \mathfrak{G}um(d\xi) = u^+\left(\frac{1}{2}\right) - u^+(+0)$$

для любой функции $u \in D(\mathfrak{G})$, а это в свою очередь доказывает существование $u^+(+0)$. Для доказательства формулы (6) достаточно теперь рассмотреть два случая: либо $s(0) > -\infty$ и тогда ²⁾

$$u^+(0) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{u(b) - u(0)}{s(b) - s(0)} = \lim_{b \downarrow 0} [s(b) - s(0)]^{-1} \int_0^b u^+s(d\xi) = u^+(+0);$$

либо $s(0) = -\infty$ и тогда $u^+(0) = 0$, $u^+(+0) = 0$ в силу $u(1/2) - u(0) = \int_{+0}^{1/2} u^+ds$, и в соответствии с формулой (5b) будет $k(0) = m(0) = 0$.

¹⁾ $k(0) = m(0) = 0$, если $s(0) = -\infty$.

²⁾ Из $P_0\{m_{+0} = 0\} = 1$ вытекает, что $u(+0) = u(0)$.

Пусть $s(0) > -\infty$; тогда из формулы Дынкина

$$(\mathfrak{G}u)(0) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{P_0 \{m_b < +\infty\} u(b) - u(0)}{E_0 \{m_b \wedge m_\infty\}} \quad (9)$$

следует, что

$$\begin{aligned} (\mathfrak{G}u)(0) \frac{E_0 \{m_b \wedge m_\infty\} [P_0 \{m_b < +\infty\}]^{-1}}{s(b) - s(0)} = \\ = \frac{u(b) - u(0)}{s(b) - s(0)} - \frac{[P_0 \{m_b < +\infty\}]^{-1} - 1}{s(b) - s(0)} u(0) + o(1), \quad b \downarrow 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Применяя формулу (6) и установленную независимость $u(0)$ и $(\mathfrak{G}u)(0)$, заключаем отсюда, что коэффициенты

$$\frac{[P_0 \{m_b < +\infty\}]^{-1} - 1}{s(b) - s(0)} = \frac{P_0 \{m_b = +\infty\}}{s(b) - s(0)} + o(1); \quad (11a)$$

$$\frac{E_0 \{m_b \wedge m_\infty\} [P_0 \{m_b < +\infty\}]^{-1}}{s(b) - s(0)} = \frac{E_0 \{m_b \wedge m_\infty\}}{s(b) - s(0)} + o(1) \quad (11b)$$

сходятся каждый в отдельности к неотрицательным пределам $k(0)$ и $m(0) < +\infty$. Из этого сразу получается формула (5b).

Аналогичным условиям удовлетворяет оператор \mathfrak{G} в 1; если $u \in D(\mathfrak{G})$ и $P_1 \{m_{1-0} = 0\} = 0$, то

$$(\mathfrak{G}u)(1) = -\kappa(1)u(1), \quad \kappa(1) = [E_1(m_\infty)]^{-1}, \quad (12a)$$

если же $P_1 \{m_{1-0} = 0\} = 1$, то

$$(\mathfrak{G}u)(1)m(1) = -u^-(1) - u(1)k(1), \quad (12b)$$

где

$$u^-(1) = \lim_{b \uparrow 1} \frac{u(1) - u(b)}{s(1) - s(b)} = u^-(1-0) \quad (13)$$

и

$$k(1) = \lim_{b \uparrow 1} \frac{P_1 \{m_b = +\infty\}}{s(1) - s(b)}; \quad (14a)$$

$$m(1) = \lim_{b \uparrow 1} \frac{E_1 \{m_b \wedge m_\infty\}}{s(1) - s(b)}. \quad (14b)$$

Задача 1. Дать другое доказательство того, что

$$(\mathfrak{G}u)(0)m(0) = u^+(0) - u(0)k(0), \quad u \in D(\mathfrak{G}),$$

в случае

$$P_0 \{m_1 < +\infty\} > 0, \quad E_0 \{m_1 \wedge m_\infty\} < +\infty.$$

Использовать, как в § 4.4, функции

$$\rho_1(\xi) = P_\xi \{m_1 < +\infty\};$$

$$\rho_{01}(\xi) = P_\xi \{m_0 < m_1\};$$

$$e_1(\xi) = E_\xi \{m_1 \wedge m_\infty\}$$

для того, чтобы определить убывающую меру

$$k(d\xi) = \frac{\rho_1^+(d\xi)}{\rho_1(\xi)}, \quad 0 < \xi < 1;$$

$$k(0) = \frac{\rho_1^+(0)}{\rho_1(0)} = \frac{\rho_1^+(+0)}{\rho_1(0)},$$

и мере скорости

$$m(d\xi) = -[e_1^+(d\xi) - e_1(\xi)k(d\xi)], \quad 0 < \xi < 1;$$

$$m(0) = -[e_1^+(0) - e_1(0)k(0)],$$

и чтобы выразить

$$\rho_1(\xi)u(1) - u(\xi) = E_\xi \left[\int_0^{m_1 \wedge m_\infty} (\mathcal{G}u)(x_t) dt \right], \quad u \in D(\mathcal{G})$$

через функцию Грина

$$G(\xi, \eta) = G(\eta, \xi) = \frac{\rho_1(\xi)\rho_{01}(\eta)}{B}, \quad \xi \leq \eta;$$

$$B = \rho_1^+(\xi)\rho_{01}(\xi) - \rho_1(\xi)\rho_{01}^+(\xi), \quad 0 \leq \xi < 1.$$

4.6. Решение уравнения $\mathcal{G}u = au$

Рассмотрим измененную несингулярную диффузию, введенную в § 4.5. Из правила композиции

$$E_a(e^{-\alpha m_b}) = E_a(e^{-\alpha m_c})E_c(e^{-\alpha m_b}), \quad a < c < b, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

сразу вытекает, что функция

$$g_1(a) = \begin{cases} E_a(e^{-\alpha m_{1/2}}), & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}; \\ E_{1/2}(e^{-\alpha m_a})^{-1}, & \frac{1}{2} < a \leq 1, \end{cases} \quad (2a)$$

удовлетворяет условиям

$$E_a(e^{-\alpha m_b}) = \frac{g_1(a)}{g_1(b)}, \quad a < b; \quad (3a)$$

$$g_1(a) < g_1(b), \quad a < b; \quad (4a)$$

$$g_1(a+0) = g_1(a) < +\infty, \quad 0 \leq a < 1; \quad (5a)$$

$$g_1(a-0) = g_1(a) > 0, \quad 0 < a \leq 1.$$

Теперь, так же как в рассуждении, приведшем нас к формуле (4.5.8), пусть $0 < b < 1$, и пусть $f \in D$ удовлетворяет усло-

виям $f(a) = 0$ ($a \leq b$) и $f(a) > 0$ ($a > b$); тогда функция $u = G_\alpha f \in D(\mathfrak{G})$ удовлетворяет условию $u(a) = E_a(e^{-\alpha m b}) u(b)$ ($a \leq b$). Поскольку $(\mathfrak{G}u)(a) = \alpha u(a)$ ($a \leq b$) и $u(b) > 0$, легко видеть, что g_1 является решением уравнения

$$(\mathfrak{G}^* g_1)(\xi) = \alpha g_1(\xi), \quad 0 \leq \xi < 1, \quad (6a)$$

с граничными условиями¹⁾

$$\begin{aligned} \alpha g_1(0) m(0) &= g_1^+(0) - g_1(0) k(0), & E_0(e^{-m+0}) &= 1; \\ g_1(0) &= g_1(+0) = 0, & E_0(e^{-m+0}) &= 0. \end{aligned} \quad (7a)$$

Здесь \mathfrak{G}^* — дифференциальный оператор

$$(\mathfrak{G}^* u)(\xi) = \frac{u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi)}{m(d\xi)}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Аналогичное рассуждение показывает, что

$$g_2(a) = \begin{cases} E_a(e^{-\alpha m_{1/2}}), & \frac{1}{2} < a \leq 1; \\ E_{\frac{1}{2}}(e^{-\alpha m_a})^{-1}, & 0 \leq a \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (2b)$$

удовлетворяет условиям

$$E_a(e^{-\alpha m b}) = \frac{g_2(a)}{g_2(b)}, \quad a > b; \quad (3b)$$

$$g_2(a) < g_2(b), \quad a > b; \quad (4b)$$

$$g_2(a+0) = g_2(a) > 0, \quad 0 \leq a < 1; \quad (5b)$$

$$g_2(a-0) = g_2(a) < +\infty, \quad 0 < a \leq 1,$$

и уравнению

$$(\mathfrak{G}^* g_2)(\xi) = \alpha g_2(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \quad (6b)$$

с граничными условиями²⁾

$$\begin{aligned} \alpha g_2(1) m(1) &= -g_2^-(1) - g_2(1) k(1), & E_1(e^{-m_{1-0}}) &= 1; \\ g_2(1) &= g_2(1-0) = 0, & E_1(e^{-m_{1-0}}) &= 0. \end{aligned} \quad (7b)$$

Функции g_1 и g_2 порождают все решения уравнения

$$(\mathfrak{G}^* u)(\xi) = \alpha u(\xi), \quad 0 < \xi < 1. \quad (8)$$

Докажем это. Пусть даны $0 < a < b < 1$ и решение u уравнения (8). Поскольку $g_1(a)g_2(b) - g_1(b)g_2(a) < 0$, можно выбрать

¹⁾ $g_1^+(0) = g_1^+(+0)$; если $s(0) = -\infty$, то $m(0) = k(0) = 0$.

²⁾ $g_2^-(1) = g_2^-(1-0)$; если $s(1) = +\infty$, то $m(1) = k(1) = 0$.

такие константы c_{ab} и c_{ba} , что $u^* = u - [c_{ab}g_1 + c_{ba}g_2] = 0$ в a и в b . Так как u^* — решение уравнения (8), если $u^*(\xi)$ принимает положительный локальный максимум в точке $a < \xi < b$, то $0 < \mathfrak{G}u^*(\xi) = (\mathfrak{G}^*u^*)(\xi) \leq 0$ (см. задачу 4.4.3), чего не может быть. Поэтому $u^* \leq 0$ ($a < \xi < b$); и если мы вместо u^* возьмем $-u^*$, то получим, что $u^*(\xi) = 0$ ($a < \xi < b$). Но тогда $u(\xi) = c_{ab}g_1(\xi) + c_{ba}g_2(\xi)$ ($a \leq \xi \leq b$) и читатель легко проверит, что c_{ab} и c_{ba} не зависят от a и b . Доказательство закончено.

Так как

$$g_1^+ g_2 - g_1 g_2^+ \Big|_a^b = \int_a^b [g_2 \mathfrak{G}^* g_1 - g_1 \mathfrak{G}^* g_2] m(d\xi), \quad 0 < a < b < 1, \quad (9)$$

то вронскиан

$$\begin{aligned} B = B[g_1, g_2] &= g_1^-(\xi) g_2(\xi) - g_1(\xi) g_2^-(\xi) = \\ &= g_1^+(\xi) g_2(\xi) - g_1(\xi) g_2^+(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \end{aligned} \quad (10)$$

является постоянной (> 0); это понадобится нам в дальнейшем.

Пусть $\alpha > 0$. Положим $j(db) = k(db) + \alpha m(db)$ ($0 < b < 1$) и будем называть 0

$$\begin{aligned} \text{точкой выхода, если } +\infty &> \int_{+0}^{1/2} s(da) \int_a^{1/2} j(db); \\ \text{точкой входа, если } +\infty &> \int_{+0}^{1/2} j(da) \int_a^{1/2} s(db). \end{aligned}$$

Заметим, что эта классификация не зависит от α , и проверим утверждения, содержащиеся в приводимых ниже табл. 1 и 2. Почему употребляются термины *выход* и *вход*, легко понять, если взглянуть на строку 1 табл. 2. Равенство $(\mathfrak{G}u)(0) = [m(0)]^{-1} [u^+(0) - k(0)u(0)]$ в табл. 2 означает, что $u^+(0) = k(0)u(0)$, если $m(0) = 0$; в табл. 1 $g_2^+(0) = g_2^+(+0)$.

Конечная точка 1 называется

$$\begin{aligned} \text{точкой выхода, если } +\infty &> \int_{1/2}^{1-0} s(da) \int_{1/2}^a j(db); \\ \text{точкой входа, если } +\infty &> \int_{1/2}^{1-0} j(da) \int_{1/2}^a s(db); \end{aligned}$$

значения

$g_1(1)$, $g_2(1)$, $g_1^-(1) = g_1^-(1-0)$, $P_1\{m_{1-0}=0\}$, $\lim_{b \uparrow 1} E_b(e^{-m_1})$, и т. д.

можно описать так же, как в табл. 1 и 2.

Таблица 1

	Выход и вход	Выход, не вход	Вход, не выход	Не выход и не вход
$g_1(0)$	≥ 0	$= 0$	> 0	$= 0$
$g_2(0)$	$< +\infty$	$< +\infty$	$= +\infty$	$= +\infty$
$g_1^+(0)$	≥ 0	> 0	$= 0$	$= 0$
$-g_2^+(0)$	$< +\infty$	$= +\infty$	$< +\infty$	$= +\infty$
$\int_0^{1/2} g_1 dj$	$< +\infty$	$< +\infty$	$< +\infty$	$< +\infty$
$\int_0^{1/2} g_2 dj$	$< +\infty$	$= +\infty$	$< +\infty$	$= +\infty$

Таблица 2

	Выход и вход	Выход, не вход	Вход, не выход	Не выход и не вход
$P_0\{m_{+0}=0\} =$	0 или 1	0	1	1
$E_{+0}(e^{-m_0}) =$	1	1	0	0
$\mathcal{G}u(0) =$	$\frac{u^+(0) - u(0)k(0)}{m(0)},$ если $P_0\{m_{+0}=0\} = 1;$ $-ku(0),$ если $P_0\{m_{+0}=0\} = 0.$	$-ku(0)$	$u^+(0) = 0$	$-ku(0)$

Занумеруем утверждения табл. 1, как клетки 11, 12, ..., 64 матрицы порядка 6×4 ; мы советуем читателю взять карандаш и проверять каждое утверждение по мере того, как мы будем их доказывать.

Поскольку $g_1^+(0) \geq 0$, строка 5 следует из равенства $g_1^+(1/2) - g_1^+(0) = \int_0^{1/2} g_1 dj$, а из равенства $g_2^+(1/2) - g_2^+(0) = \int_0^{1/2} g_2 dj$ легко видеть, что строка 6 следует из строки 4. Так как $0 > g_2^+ \uparrow$,

то $g_2^+(0) = g_2^+(+0) < 0$, и поэтому из $g_2(0) < +\infty$ вытекает, что $s(0) > -\infty$ и

$$+\infty > g_2(0) - g_2\left(\frac{1}{2}\right) - \left[s\left(\frac{1}{2}\right) - s(0)\right] g_2^-\left(\frac{1}{2}\right) = \\ = \int_0^{1/2} s(d\xi) \int_{\xi}^{1/2} g_2 dj \geq g_2\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{1/2} j\left(\xi, \frac{1}{2}\right) s(d\xi).$$

Иначе говоря, если $g_2(0) < +\infty$, то 0 — точка *выхода*, что доказывает утверждения 23 и 24; а отсюда выводятся 33 и 34, если использовать то, что $g_1^+ g_2$ меньше, чем константа $B = g_1^+ g_2 - g_1 g_2^+$. Из утверждений 42, 44 и из неравенства $-g_1 g_2^+ \leq B$ следуют 12 и 14; что касается самих 42 и 44, то, если $g_2^+(0) > -\infty$, имеем

$$+\infty > g_2^+\left(\frac{1}{2}\right) - g_2^+(0) = \int_{+0}^{1/2} g_2 dj \geq g_2^+\left(\frac{1}{2}\right) \int_{+0}^{1/2} \left[s\left(\frac{1}{2}\right) - s(\xi)\right] dj,$$

т. е. если бы было $g_2^+(0) > -\infty$, то 0 был бы точкой *входа*.

Пусть дано, что 0 — точка *входа*, но не *выхода*; тогда $g_1^+(0) = 0$ (см. 33),

$$0 < \frac{g_1^+(\xi)}{g_1(\xi)} = \frac{\int_{+0}^{\xi} g_1 dj}{g_1(\xi)} \leq j(0, \xi],$$

и поэтому

$$\ln g_1|_0^{1/2} = \int_0^{1/2} \frac{g_1^+}{g_1} ds \leq \int_0^{1/2} j(0, \xi) ds = \int_{+0}^{1/2} \left[s\left(\frac{1}{2}\right) - s(\xi)\right] dj < +\infty,$$

что доказывает 13. Утверждение 43 следует из неравенства $-g_1 g_2^+ \leq B$.

Если дано, что 0 — точка *выхода*, то

$$0 \leq \frac{\left[g_2^+\left(\frac{1}{2}\right) - g_2^+(\xi)\right]}{g_2(\xi)} = \frac{\int_{\xi}^{1/2} g_2 dj}{g_2(\xi)},$$

и поэтому

$$g_2^+\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{1/2} g_2^{-1} ds - \ln g_2 \int_0^{1/2} \leq \int_0^{1/2} j\left(\xi, \frac{1}{2}\right) s(d\xi) < +\infty.$$

Это доказывает 21 и 22. Утверждение 32 теперь с очевидностью следует из соотношений $g_1^+ g_2 - g_1 g_2^+ = B > 0$ и $-g_2^+(\xi) g_1(\xi) =$

$$= -g_2^+(\xi) \int_0^{\xi} g_1^+ ds \leq -g_1^+(\xi) \int_0^{\xi} g_2^+ ds, \text{ а 41 из 21 и из того, что}$$

$g_2^+(1/2) - g_2^+(0) \int_0^{1/2} g_2 dj \leq g_2(0) j(0, 1/2]$ (относительно утверждений 11 и 13 см. задачу 1).

Теперь табл. 1 установлена. Из нее сразу следует табл. 2.

Задача 1. Пусть дано, что 0 — точка выхода, и точка входа. Построить такие решения g_* и g^* уравнения

$$\alpha g(\xi) = (\mathfrak{G}^*g)(\xi), \quad 0 < \xi \leq \frac{1}{2}, \quad (11)$$

что

$$g_*(0) = 0, \quad g^+(0) > 0, \quad g_*\left(\frac{1}{2}\right) = 1; \quad (12a)$$

$$g^*(0) > 0, \quad g^{*+}(0) = 0, \quad g^*\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad (12b)$$

и доказать, что они являются соответственно наименьшим и наибольшим из решений уравнения (11), удовлетворяющих условию $g(1/2) = 1$.

$$\left[g_* = \frac{B_*}{B_*(1/2)}, \quad B_* = g_1 g_2(0) - g_1(0) g_2, \right.$$

и

$$g^* = \frac{B^*}{B^*(1/2)}, \quad B^* = g_1 g_2^+(0) - g_1^+(0) g_2,$$

являются решениями уравнения (11) с граничными условиями (12); $0 \leq g_* \leq g^*$, и если $0 \leq g \in \uparrow$ — какое-то другое решение уравнения (11), для которого $g(1/2) = 1$, то в силу очевидной независимости g_* и g^* можно выбрать c_* и c^* так, чтобы $g = c_* g_* + c^* g^*$. Теперь $g_* \leq g \leq g^*$ вытекает из $g_* \leq g^*$ и

$$\frac{g(0)}{g^*(0)} = c^* \geq 0, \quad \frac{g^+(0)}{g_+^+(0)} = c_* \geq 0,$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = c_* + c^*.]$$

Задача 2. Вычислить возрастающее и убывающее решения g_1 и g_2 и вронскиан $g_1^+ g_2 - g_1 g_2^+$ для $\mathfrak{G}^* = |b|^{-\gamma} D^2/2$ ($-1 < \gamma < +\infty$) (см. применение этого в § 6.8)¹⁾.

$[g_1(\alpha, a) = g_2(\alpha, -a)$; если положить $\beta = (\gamma + 2)^{-1}$, то $g_2(\alpha, a) = \sqrt{a} K_\beta(2\beta \sqrt{2\alpha} a^{1/2\beta})$ и $g_1(\alpha, a) = \Gamma(1-\beta) \Gamma(\beta) \sqrt{a} I_\beta(2\beta \sqrt{2\alpha} a^{1/2\beta}) + g_2$ для $a \geq 0$; вронскиан равен $\Gamma(1-\beta) \Gamma(\beta)/2\beta$.]

¹⁾ См. Ф. Б. Хильдебранд [1: 161—167].

Задача 3. Определить шкалу и меру скорости для бесселевского движения с производящим оператором $\mathfrak{G}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d}{dr} \right)$ и проверить, что

$$P_{\cdot} \{ \lim_{t \uparrow +\infty} r(t) = +\infty \} = 0 \text{ или } 1 \text{ в зависимости от того,}$$

$$d=2 \text{ или } d>3.$$

Доказать также, что $P_{\cdot} \{ r > 0, t > 0 \} = 1$ при $d \geq 2$ (см. § 2.7).

$$[s(dr) = r^{1-d} dr, m(dr) = 2r^{d-1} dr; s(+\infty) = +\infty (d=2), s(+\infty) < +\infty (d>2);$$

$$\int_1^{+\infty} s dm = \int_1^{+\infty} m ds = +\infty.]$$

Задача 4. Вычислить возрастающее и убывающее решения g_1 и g_2 и их вронскиан для бесселевского оператора $\mathfrak{G}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)$ ($r > 0$) и использовать g_2 для доказательства того, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_1(e^{-\alpha \varepsilon \gamma m_\varepsilon}) = \frac{\gamma}{\gamma+2}, \quad \gamma > 0.$$

Что означает исчезновение α 1)?

$$[g_1(\alpha, \xi) = I_0(\xi \sqrt{2\alpha}), g_2(\alpha, \xi) = K_0(\xi \sqrt{2\alpha});$$

$$g_1^+ g_2 - g_1 g_2^+ = 1; E_1(e^{-\alpha m_\varepsilon}) = \frac{K_0(\sqrt{2\alpha})}{K_0(\varepsilon \sqrt{2\alpha})};$$

$$K_0(\xi) \sim -\ln \xi (\xi \downarrow 0).]$$

Задача 5. Дать новое доказательство результата Д. Рэя

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-n} P_a \{ m_b \leq t \} = 0, \quad a < b, \quad n \geq 1,$$

для общей несингулярной диффузии, используя соотношение

$$\mathfrak{G}^* g_1 = \alpha g_1$$

для проверки того, что

$$e^{-1} P_a \{ m_b \leq t \} \leq \frac{g_1(a)}{g_1(b)} \leq [1 + \alpha p_2 + \alpha^2 p_4 + \alpha^3 p_6 + \dots]^{-1}, \quad \alpha = t^{-1},$$

1) См. связанный с этим результат в задаче 6.8.4.

где

$$p_{2n} = \int_a^b s(d\xi_1) \int_{a+0}^{\xi_1} m(d\xi_2) \dots \int_a^{\xi_{2n-2}} s(d\xi_{2n-1}) \int_{a+0}^{\xi_{2n-1}} m(d\xi_{2n}), \quad n \geq 1.$$

(См. (3.8.8) и задачу 3.8.1.)

Задача 6. Несингулярная диффузия D является возвратной, если

$$k = 0, \quad (13)$$

$$m\left(0, \frac{1}{2}\right] < +\infty, \quad (\mathcal{G}u)(0) m(0) = u^+(0), \quad \text{если } s(0) > -\infty; \quad (14a)$$

$$m\left[\frac{1}{2}, 1\right) < +\infty, \quad (\mathcal{G}u)(1) m(1) = u^+(1), \quad \text{если } s(1) < +\infty, \quad (14b)$$

и невозвратной в противном случае (определение возвратности см. в задаче 4.4.4).

[Пусть имеется возвратная диффузия; если $-s(0) < +\infty = m(0, 1/2]$ и $0 < a < b$, то

$$\begin{aligned} P_a \{m_b < +\infty\} &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{g_1(a)}{g_1(b)} \leq \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{g_1^+(a)}{g_1(b)} [s(a) - s(0)] \leq \\ &\leq \frac{s(a) - s(0)}{s(b) - s(a)} \downarrow 0, \quad a \downarrow 0, \end{aligned}$$

что невозможно; короче говоря, из $s(0) > -\infty$ следует $m(0, 1/2] < +\infty$. Но тогда $E_{+0}(e^{-m_0}) = 1$; в силу возвратности $E_0(e^{-m_{+0}})$ также равно 1, а из того, что $P_\xi \{m_b < +\infty\}$ является решением задачи

$$0 = p^+(d\xi) - p(\xi) k(d\xi), \quad 0 < \xi < b;$$

$$0 = p^+(0) - p(0) k(0), \quad p(0) = 1 \quad \text{при } E_0(e^{-m_{+0}}) = 1,$$

вытекают (13) и (14a). Доказательство обратного утверждения аналогично: согласно (13) и (14a), $p(\xi) = P_\xi \{m_b < +\infty\}$ является решением задачи

$$p^+(d\xi) = 0, \quad 0 < \xi < b;$$

$$p^+(0) = 0, \quad \text{если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 1;$$

$$p(b) = 1;$$

поэтому $p(\xi) = 1 + \text{const} \cdot [s(b) - s(\xi)]$; константа должна быть равна 0 или потому, что $s(0) = -\infty$ и $0 \leq p \leq 1$, или потому, что $s(0) > -\infty$ и $p^+(0) = 0$, и т. д.]

Задача 7 (по Дж. Л. Дубу [3]). Если дана такая консервативная диффузия, что $s(0) > -\infty$ и $m(0, 1/2] = +\infty$, то $\lim_{b \downarrow 0} P_b \{ \lim_{t \uparrow +\infty} x(t) = 0 \} = 1$ даже тогда, когда 0 не является точкой выхода.

[Так же, как при решении задачи 5, из $s(0) > -\infty$ и $m(0, 1/2] = \infty$ вытекает $P_{+0} \{m_b < +\infty\} = 0$ ($b > 0$). Тогда

$$P_\xi \{m_a \wedge m_{\frac{1}{2}} < +\infty\} \equiv 1 \quad \left(a \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right),$$

поскольку эта функция является решением задачи

$$(\mathfrak{G}^* u)(\xi) = 0 \quad \left(a \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right);$$

$$u(a+0) = u\left(\frac{1}{2}-0\right) = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_\varepsilon \{ \lim_{t \uparrow +\infty} x(t) = 0 \} &\geq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{b \downarrow 0} \lim_{a \downarrow 0} P_\varepsilon \{m_a < +\infty, m_b(w_{m_0}^+) = +\infty\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{b \downarrow 0} \lim_{a \downarrow 0} P_\varepsilon \{m_a < +\infty\} P_a \{m_b = +\infty\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{a \downarrow 0} P_\varepsilon \{m_a < +\infty\} \geq \\ &\geq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{a \downarrow 0} P_\varepsilon \{m_a \wedge m_{\frac{1}{2}} < +\infty, m_{\frac{1}{2}} = +\infty\} = 1. \end{aligned}$$

Задача 8. Доказать, что несингулярная диффузия со шкалой $s(\xi) \equiv \xi$ на $Q = R^1$, такая, что $P_a \{x(t) \leq a\} = P_a \{x(t) > a\} = 1/2$ для любого $t > 0$ и $a \in R^1$, является стандартным броуновским движением с точностью до растяжения или сжатия шкалы.

[Выведите сначала принцип отражения Д. Андрэ: $P_a \{m_b < t\} = 2P_a \{x(t) > b\}$ ($a < b$) и $P_a \{m_b < t\} = 2P_a \{x(t) < b\}$ ($a > b$), как в § 1.7; затем возьмите от этих функций преобразования Лапласа и выведите, что $-g_1 g_2^+ = g_1^+ g_2 = 1/2$ ($g_1^+ g_2 - g_1 g_2^+ = 1$), откуда $g_1 g_2 = \text{const}$. Оставшуюся часть доказательства легко провести, если использовать уравнение $\mathfrak{G}g = \alpha g$.]

4.7. \mathfrak{G} как глобальный дифференциальный оператор. Несингулярный случай

Теперь мы можем установить, что \mathfrak{G} совпадает с некоторым глобальным дифференциальным оператором \mathfrak{G}^* .

Пусть $D(\mathfrak{G}^*)$ — класс таких функций $u \in D$, что для какой-то функции $u^* \in D$

$$u^*(\xi) m(d\xi) = u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi) \text{ при } 0 < \xi < 1; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u^*(0) m(0) &= u^+(0) - u(0) k(0) \\ u^+(0) &= u^*(+0) \end{aligned} \right\}, \text{ если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 1; \quad (2a)$$

$$\left. \begin{aligned} u^*(1) m(1) &= -u^-(1) - u(1) k(1) \\ u^-(1) &= u^*(1-0) \end{aligned} \right\}, \text{ если } E_1(e^{-m_{1-0}}) = 1; \quad (2b)$$

$$u^*(0) = -\kappa(0) u(0), \text{ если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 0; \quad (3a)$$

$$u^*(1) = -\kappa(1) u(1), \text{ если } E_1(e^{-m_{1-0}}) = 0; \quad (3b)$$

$$u(0) = u(+0), \text{ если } \int_0^{1/2} j\left(b, \frac{1}{2}\right] s(db) < +\infty; \quad (4a)$$

$$u(1) = u(1-0), \text{ если } \int_{1/2}^1 j\left[\frac{1}{2}, b\right) s(db) < +\infty; \quad (4b)$$

и пусть \mathfrak{G}^* — отображение $u \in D(\mathfrak{G}^*) \rightarrow u^*$.

Так как $m[a, b] > 0$ ($a < b$) и $D(\mathfrak{G}^*) \subseteq D$, то $\mathfrak{G}^*u = u^*$ определяется однозначно. Включение $\mathfrak{G}^* \supseteq \mathfrak{G}$ мы устанавливаем, используя результаты § 4.5 [см. (3.6.6)] и клетки 21 и 22 табл. 4.6.2 в связи с (4). Чтобы отождествить \mathfrak{G} и \mathfrak{G}^* , достаточно показать, что $D(\mathfrak{G}^*) \subseteq D(\mathfrak{G})$.

Но если $u \in D(\mathfrak{G}^*)$, то $(1 - \mathfrak{G}^*)u \in D$; функция $u^* \equiv u - G_1(1 - \mathfrak{G}^*)u \in D(\mathfrak{G}^*)$ является решением уравнения $\mathfrak{G}^*u^* = u^*$ и поэтому должна тождественно равняться 0. Например, если $P_0\{m_{+0} = 0\} = 1$, а 1 не является ни точкой выхода, ни точкой входа, то $u^*(1) = 0$, так как $(\mathfrak{G}^*u^*)(1) = -\kappa(1)u^*(1) = u^*(1)$; $u^*(+0) = u^*(0)$; $u^*(\xi) = \text{const} \cdot g_2(\xi)$ ($0 \leq \xi < 1$), поскольку функция g_1 неограничена вблизи 1; причем константа должна равняться 0, так как

$$0 < \mathfrak{G}^*g_2(0) m(0) - [g_2^+(0) - g_2(0) k(0)].$$

Доказательство в других случаях — аналогичное.

В дальнейшем через \mathfrak{G}^* мы будем обозначать локальный или глобальный дифференциальный оператор, тогда как через \mathfrak{G} мы будем обозначать глобальный оператор. Так, $(\mathfrak{G}^*u)(\xi) = u^*(\xi)$ ($0 \leq \xi < 1/2$) означает, что и $u(\xi)$, и $u^*(\xi) = [u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi)]/m(d\xi) -$

функции, непрерывные при $0 < \xi < 1/2$, причем выполнены условия (4а) и

$$\begin{aligned} u(0) &= u(+0), \quad u^*(0) = u^*(+0), \quad u^+(0) = u^*(+0), \\ u^*(0) m(0) &= u^+(0) - u(0) k(0), \quad \text{если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 1; \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} u(b) \text{ и } u^*(b) &\text{ ограничены вблизи } b=0, \\ u^*(0) &= -\kappa(0)u(0), \quad \text{если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 0. \end{aligned} \quad (5b)$$

Пользуясь этим способом обозначения, можно записать утверждения (4.6.6а) и (4.6.7а) следующим образом:

$$(\mathcal{G}^* g_1)(\xi) = \alpha g_1(\xi) \quad (0 \leq \xi < 1);$$

а (4.6.6b) и (4.6.7b) — так:

$$(\mathcal{G}^* g_2)(\xi) = \alpha g_2(\xi) \quad (0 < \xi \leq 1).$$

4.8. Оператор \mathcal{G} на точках переноса

Пусть дана диффузия с интервалом состояний $Q = [0, 1]$, причем

$$P_0\{m_1 < +\infty\} > 0; \quad (1a)$$

$$P_1\{m_{1-0} = m_\infty = +\infty\} = 1; \quad (1b)$$

$$E_0\{m_1 \wedge m_\infty\} < +\infty; \quad (1c)$$

тогда можно определить шкалу переноса $s_+(\xi)$ и меру $k_+(d\xi)$, $k_+(0) = 0$, убывающую при переносе, такие, что для $u \in D(\mathcal{G})$

$$\begin{aligned} \int_{[a, b] \cap k_+} (\mathcal{G}u)(\xi) s_+(d\xi) &= \int_{[a, b] \cap k_+} u(d\xi) - \int_{[a, b] \cap k_+} u(\xi) k_+(d\xi), \quad (2a) \\ a &\leq b < 1; \end{aligned}$$

$$u(1-0) = [1 - k_+(1)] u(1), \quad k_+(1) = P_{1-0}\{m_1 = +\infty\}; \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}u)(a) &= \lim_{b \downarrow a} \frac{u(b) - u(a) - [(\bigcap_{a < \xi \leq b} [1 - k_+(d\xi)])^{-1} - 1] u(a)}{s_+(b) - s_+(a)}, \quad (2c) \\ a &\in k_+ \cap [0, 1]. \end{aligned}$$

Здесь $\bigcap_{a < \xi \leq b} [1 - k_+(d\xi)]$ обозначает $e^{-j_+(a, b]}(1 - \kappa_1)(1 - \kappa_2) \dots$, где $j_+(d\xi)$ — непрерывная часть функции $k_+(d\xi)$, а $\kappa_1, \kappa_2, \dots (\leq 1)$ — скачки функции $k_+(d\xi)$ ($a < \xi \leq b$).

Интервал Q расщепляется на множество K_+ и несингулярные интервалы (l_n, r_n) , $P_{l_n}\{m_{l_n+0} = 0\} = 1$. На $Q_n \equiv [l_n, r_n)$ можно

определить такие s , k и m , что при $u \in D(\mathfrak{G})$

$$(\mathfrak{G}u)(\xi) m(d\xi) = u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi), \quad l_n < \xi < r_n; \quad (3a)$$

$$(\mathfrak{G}u)(l_n) m(l_n) = u^+(l_n) - u(l_n) k(l_n), \quad (3b)$$

$$u^+(l_n) = \lim_{b \downarrow l_n} \frac{u(b) - u(l_n)}{s(b) - s(l_n)}.$$

(См. (4.3.1) и (4.5.5b).)

При этом для фиксированного $n \geq 1$

$$k_+(d\xi) = \frac{s(d\xi)}{p(\xi)} \int_{[l_n, \xi)} p(\eta) k(d\eta), \quad l_n < \xi < r_n; \quad (4a)$$

$$s_+(d\xi) = \frac{s(d\xi)}{p(\xi)} \int_{[l_n, \xi)} p(\eta) m(d\eta), \quad l_n < \xi < r_n, \quad (4b)$$

где p — решение задачи

$$p^+(db) = p(b) k(db), \quad l_n < b < r_n; \quad (5a)$$

$$p^+(l_n) = p(l_n) k(l_n), \quad p(l_n + 0) = p(l_n) = 1. \quad (5b)$$

Из формул (4) вытекает, в частности, что

$$k(l_n) = \lim_{b \downarrow l_n} \frac{k_+(l_n, b)}{s(b) - s(l_n)}; \quad (6a)$$

$$m(l_n) = \lim_{b \downarrow l_n} \frac{s_+(b) - s_+(l_n)}{s(b) - s(l_n)}. \quad (6b)$$

Должно также удовлетворяться глобальное условие (7):

$$k_+[0, 1) \leq \sum_{n \geq 1} \int_{Q_n} k[l_n, \xi) s(d\xi) + k_+(K_+) < +\infty; \quad (7a)$$

$$s_+(1) - s_+(0) \leq \sum_{n \geq 1} \int_{Q_n} m[l_n, \xi) s(d\xi) + s_+(K_+) < +\infty. \quad (7b)$$

Приведем доказательство.

Пусть $a \leq b$. Если положить

$$p_b(a) = P_a\{m_b < +\infty\}; \quad (8a)$$

$$e_b(a) = E_a\{m_b \wedge m_\infty\}, \quad (8b)$$

то [см. (1)]

$$p_b(a) \geq p_1(0) > 0; \quad (9a)$$

$$e_b(a) \leq e_1(0) < +\infty. \quad (9b)$$

Пользуясь тем фактом, что ¹⁾

$$\lim_{a \uparrow b} p_b(a) = P_{b-0} \{m_b < +\infty\} = 1 - k_+(b), \quad b > 0; \quad (10a)$$

$$\lim_{b \downarrow a} p_b(a) = P_a \{m_{a+0} < +\infty\} = 1, \quad a < 1, \quad (10b)$$

и правилами композиции, выполненными при $a \leq c \leq b$:

$$p_b(a) = p_c(a) p_b(c); \quad (11a)$$

$$e_b(a) = e_c(a) + p_c(a) e_b(c), \quad (11b)$$

легко показать, что

$$p_b(a+0) = p_b(a), \quad a < b; \quad (12a)$$

$$p_b(a-0) = p_b(a) [1 - k_+(a)], \quad a \leq b, \quad (12b)$$

и

$$e_b(a+0) = e_b(a), \quad a < b; \quad (13a)$$

$$e_b(a-0) = e_b(a) [1 - k_+(a)], \quad a \leq b. \quad (13b)$$

Справедливость формул (12) очевидна, а для доказательства (13a) достаточно положить $c \downarrow a$ в (11b) и использовать формулу (10b) и тот факт, что $\lim_{c \downarrow a} e_c(a) = E_a \{m_{a+0} \wedge m_\infty\} = 0$. Что касается (13b), то нужно положить $c \uparrow a$ в формуле

$$e_b(c) = e_a(c) + p_a(c) e_b(a) \quad (c < a \leq b)$$

и использовать то, что

$$\begin{aligned} \lim_{c \uparrow a} e_a(c) &= \lim_{c \uparrow a} [p_c(0)]^{-1} E_0 \{m_a \wedge m_\infty - m_c \wedge m_\infty, m_c < +\infty\} \leq \\ &\leq \lim_{c \uparrow a} [p_1(0)]^{-1} E_0 \{m_a \wedge m_\infty - m_c \wedge m_\infty\} = 0. \end{aligned}$$

Ввиду правила композиции (11a) мера, убывающая при переносе, определенная формулой ²⁾

$$k_+(da) = \frac{p_b(da)}{p_b(a)}, \quad a < b, \quad (14)$$

не зависит от b . Формула (10a) согласуется с этим определением. Имеем $k_+(0) = 0$ и $k_+[0, 1) < +\infty$, так как $p_1(0) > 0$.

Перейдем к определению шкалы переноса. Функция

$$v_b(a) = \frac{e_b(a)}{p_b(a)}, \quad a \leq b, \quad (15)$$

¹⁾ См. (3.3.10c) и (3.6.6a).

²⁾ $k_+(da) = d \ln p_1(a)$, если функция p_1 непрерывна.

непрерывна [см. (12) и (13)]. Используя формулу (11), получаем, что при $\xi < \eta \leq b$

$$v_b(\eta) - v_b(\xi) = \frac{p_\eta(\xi) e_b(\eta) - e_b(\xi)}{p_b(\xi)} = -\frac{e_\xi(\eta)}{p_b(\xi)} < 0. \quad (16)$$

Если перейти к дифференциалам и использовать (11b) и (14), то получим, что (непрерывная) шкала переноса $s_+(\xi)$, определяемая соотношением

$$\begin{aligned} 0 &< - \int_{\xi}^{\eta} p_b(a) v_b(da) = - \int_{\xi}^{\eta} [e_b(da) - v_b(a) p_b(da)] = \\ &= - \int_{\xi}^{\eta} [e_b(da) - e_b(a) k_+(da)] \equiv s_+(\eta) - s_+(\xi), \quad \xi < \eta < b, \end{aligned} \quad (17)$$

не зависит от b . Поскольку $p_1(0) > 0$ и $e_1(0) < +\infty$, имеем $s_+(1) - s_+(0) < +\infty$; кроме того (учитывая, что $\lim_{a \uparrow b} v_b(a) = 0$), получаем

$$e_b(a) = p_b(a) v_b(a) = p_b(a) \int_a^b \frac{s_+(d\xi)}{p_b(\xi)} = \int_a^b p_\xi(a) s_+(d\xi), \quad a \leq b. \quad (18)$$

Теперь (2с) можно доказать следующим образом. Пусть дана функция $u \in D(\mathfrak{G})$. Если $a \in K^+ \cap [0, 1)$, то из формулы Дынкина вытекает, как в § 4.5, что

$$\begin{aligned} (\mathfrak{G}u)(a) &= \lim_{b \downarrow a} \frac{p_b(a) u(b) - u(a)}{E_a(m_b \wedge m_\infty)} = \\ &= \lim_{b \downarrow a} \frac{u(b) - u(a) - [p_b(a)^{-1} - 1] u(a)}{e_b(a)/p_b(a)}. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу (18) $e_b(a)/p_b(a) = s_+(b) - s_+(a) + o(1)$ ($b \downarrow a$), и из формулы (14) легко вывести, что $\bigcap_{a < \xi \leq b} [1 - k_+(d\xi)]$ (если понимать это выражение в том смысле, как объяснено после формулы (2b)) равно $p_b(a)$. Это завершает доказательство.

Рассмотрим характеристическую функцию f точки 1, $f \in D$ [см. (1b)]; функция $\varepsilon G_\varepsilon f = E_\cdot (e^{-\varepsilon m_1}) \varepsilon (G_\varepsilon f)(1)$ при $\varepsilon \downarrow 0$, возрастающая, стремится к $p_1 \in D$; поэтому, полагая $\varepsilon \downarrow 0$ в равенстве

$$\varepsilon \cdot [G_\alpha - G_\varepsilon + (\alpha - \varepsilon) G_\alpha G_\varepsilon] f = 0, \quad (20)$$

находим, что

$$\alpha G_\alpha p_1 = p_1. \quad (21)$$

Это означает, что

$$p_1 \in D(\mathfrak{G}); \quad (22a)$$

$$\mathfrak{G}p_1 = 0. \quad (22b)$$

(Ср. (4.2.12).) Теперь, применяя правило композиции (11a) и формулу (3), получаем

$$p_b^+(da) = p_b(a) k(da), \quad l_n < a < r_n, \quad a \leq b; \quad (23a)$$

$$p_b^+(l_n) = p_b(l_n) k(l_n), \quad l_n \leq b, \quad (23b)$$

откуда сразу следуют утверждения (4a) и (5).

Докажем (4b). Пусть f — характеристическая функция интервала $[0, 1]$; тогда $G_\varepsilon f = E. \left[\int_0^{m_\infty \wedge m_1} e^{-\varepsilon t} f(x_t) dt \right]$, возрастая, стремится к $e_1 \in D$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Поэтому, устремляя ε к 0 в

$$[G_\alpha - G_\varepsilon + (\alpha - \varepsilon) G_\alpha G_\varepsilon] f = 0, \quad (24)$$

получаем

$$e_1 = G_\alpha [f + \alpha e_1]. \quad (25)$$

Иначе говоря,

$$e_1 \in D(\mathfrak{G}); \quad (26a)$$

$$(\mathfrak{G}e_1)(b) = -1, \quad b < 1. \quad (26b)$$

(Ср. (4.2.20).) Применяя теперь правило композиции (11b), выводим отсюда, что

$$e_b^+(da) - e_b(a) k(da) = -m(da), \quad l_n < a < r_n, \quad a \leq b; \quad (27a)$$

$$e_b^+(l_n) - e_b(l_n) k(l_n) = -m(l_n), \quad l_n \leq b. \quad (27b)$$

Отсюда с помощью формулы (17) сразу получаем (4b).

Из (4a) и (4b) немедленно вытекают условия (7a) и (7b).

Перейдем к доказательству формулы (2a). Пусть $J_+ = K_+ \setminus \bigcup_{n \geq 1} l_n$; тогда, как мы сейчас докажем,

$$E_\xi [\text{mes} \{t: x(t) \in [a, 1] \cap J_+, \quad t \leq m_1 \wedge m_\infty\}] = \int_{[a \vee \xi, 1] \cap K_+} p_\eta(\xi) s_+(d\eta). \quad (28)$$

Так как траектория, начинающаяся в ξ , не может войти в $[0, \xi] \cap J_+$, не пройдя в направлении сверху вниз точку из $\bigcup_{n \geq 1} l_n$,

то, полагая $b = \xi \vee a$, получаем

$$\begin{aligned}
 E_{\xi} [\text{mes} \{t: x(t) \in [a, 1) \cap J_+, t < m_1 \wedge m_{\infty}\}] &= \\
 = p_b(\xi) E_b [\text{mes} \{t: x(t) \in J_+, t < m_1 \wedge m_{\infty}\}] &= \\
 = p_b(\xi) e_1(b) - p_b(\xi) \sum_{n \geq 1} E_b [\text{mes} \{t: l_n \leq x(t) < r_n, t < m_1 \wedge m_{\infty}\}] &= \\
 = p_b(\xi) e_1(b) - p_b(\xi) \sum_{r_n > b} p_{b \vee l_n}(b) e_{r_n}(b \vee l_n) &= \\
 = \int_b^1 p_{\eta}(\xi) s_+(d\eta) - p_b(\xi) \sum_{r_n > b} p_{b \vee l_n}(b) \int_{b \vee l_n}^{r_n} p_{\eta}(b \vee l_n) s_+(d\eta) &= \\
 = \int_b^1 p_1(\xi) s_+(d\eta) - \sum_{r_n > b} \int_{b \vee l_n}^{r_n} p_{\eta}(\xi) s_+(d\eta) &= \\
 = \int_{[b, 1) \cap K_+} p_{\eta}(\xi) s_+(d\eta), & \quad (29)
 \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Теперь (2а) можно доказать в несколько строк.

Пусть $u \in D(\mathcal{G})$. Положим $e(d\eta) = -[u(d\eta) - u(\eta) k_+(d\eta)]$; тогда

$$p_b(a) u(b) - u(a) = \int_{[a, b)} p_{\eta}(a) e(d\eta), \quad a \leq b. \quad (30)$$

(Доказательство такое же, как у формулы (18).) Теперь, применяя формулу Дынкина и формулу (28), получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{[\xi, 1)} p_{\eta}(\xi) e(d\eta) &= p_1(\xi) u(1) - u(\xi) = E_{\xi} \left[\int_0^{m_1 \wedge m_{\infty}} (\mathcal{G}u)(x_t) dt \right] = \\
 &= E_{\xi} \left[\int_{\substack{t \leq m_1 \wedge m_{\infty} \\ x(t) \in J_+}} (\mathcal{G}u)(x_t) dt \right] + \\
 &\quad + \sum_{\substack{r_n > \xi \\ r_n \leq m_1 \wedge m_{\infty}}} p_{l_n \vee \xi}(\xi) E_{l_n \vee \xi} \left[\int_0^{m_{r_n} \wedge m_{\infty}} (\mathcal{G}u)(x_t) dt \right] = \\
 &= \int_{[\xi, 1) \cap K_+} p_{\eta}(\xi) (\mathcal{G}u)(\eta) s_+(d\eta) + \sum_{r_n > \xi} p_{l_n \vee \xi}(\xi) \int_{(l_1 \vee \xi, r_n)} p_{\eta}(l_n \vee \xi) e(d\eta) = \\
 &= \int_{[\xi, 1) \cap K_+} p_{\eta}(\xi) (\mathcal{G}u)(\eta) s_+(d\eta) + \int_{\bigcup_{r_n > \xi} [l_n \vee \xi, r_n)} p_{\eta}(\xi) e(d\eta). \quad (31)
 \end{aligned}$$

Отсюда сразу вытекает (2а).

Задача 1. Пусть $K_+ = [0, 1]$; тогда движение, начинающееся в точке $a < 1$, — это просто равномерное движение со скоростью 1 в шкале s_+ :

$$x(t) = \begin{cases} s_+^{-1}(t + s_+(0, a)), & t < m_\infty \wedge s_+(a, 1]; \\ \infty, & t \geq m_\infty < s_+(a, 1]; \\ 1, & t \geq s_+(a, 1] < m_\infty, \end{cases}$$

где s_+^{-1} — обратная функция для $s_+(0, a]$.

$[x^{-1}(b) = m_b$, если $m_b < +\infty$; используя очевидное соотношение

$$\alpha p(\xi) s_+(d\xi) = p(d\xi) - p(\xi) k_+(d\xi), \quad \xi < b, \quad p = E_*(e^{-\alpha m_b}),$$

находим, что при $a < b$

$$\begin{aligned} \frac{p(a)}{p(b)} &= e^{-\alpha s_+(a, b]} \bigcap_{0 < \xi \leq b} [1 - k_+(d\xi)] = \\ &= E_a(e^{-\alpha m_b}) = E_a\{e^{-\alpha x^{-1}(b)}, \quad m_b < +\infty\}; \end{aligned}$$

теперь результат становится очевидным.]

4.9. \mathfrak{G} как глобальный дифференциальный оператор. Сингулярный случай

Продолжим рассмотрение случая, когда

$$P_0\{m_1 < +\infty\} > 0; \quad (1a)$$

$$P_1\{m_{1-0} \wedge m_\infty = +\infty\} = 1; \quad (1b)$$

$$E_0\{m_1 \wedge m_\infty\} < +\infty, \quad (1c)$$

и покажем, что оператор \mathfrak{G} совпадает с некоторым глобальным дифференциальным оператором \mathfrak{G}^* .

В качестве $D(\mathfrak{G}^*)$ возьмем класс таких функций $u \in D$, что для какой-то функции $u^* \in D$

$$\int_{[a, b)} u^*(\xi) m(d\xi) = \int_{[a, b)} u^+(d\xi) - \int_{[a, b)} u(\xi) k(d\xi), \quad (2a)$$

$$l_n < a < b < r_n, \quad n \geq 1;$$

$$u^*(l_n) m(l_n) = u^+(l_n) - u(l_n) k(l_n), \quad n \geq 1; \quad (2b)$$

$$\int_{[a, b) \cap k_+} u^*(\xi) s_+(d\xi) = \int_{[a, b) \cap k_+} u(d\xi) - \int_{[a, b) \cap k_+} u(\xi) k_+(d\xi), \quad (3a)$$

$$a < b < 1;$$

$$u(1-0) = [1 - k_+(1)] u(1); \quad (3b)$$

$$u^*(1) = 0; \quad (4)$$

и пусть \mathfrak{G}^* будет отображение $u \in D(\mathfrak{G}^*) \rightarrow u^*$.

Так как $m[a, b] > 0$ ($a < b$) на Q_n и $s_+(a) < s_+(b)$ ($a < b$), отображение $\mathfrak{G}^*: u \rightarrow u^*$ однозначно. В силу результатов § 4.8 для установления совпадения операторов \mathfrak{G} и \mathfrak{G}^* достаточно доказать, что $D(\mathfrak{G}^*) \subseteq D(\mathfrak{G})$.

Но если $u \in D(\mathfrak{G}^*)$, то $(1 - \mathfrak{G}^*)u \in D$, и функция

$$u^* \equiv u - G_1(1 - \mathfrak{G}^*)u \in D(\mathfrak{G}^*) \quad (5a)$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{G}^* u^* = u^*. \quad (5b)$$

Мы сейчас докажем, что предположение $0 < d \equiv \sup_{0 \leq \xi \leq 1} u^*(\xi)$ приводит к противоречию. Тогда $u^*(\xi) \leq 0$ ($0 \leq \xi \leq 1$); заменяя u^* на $-u^*$, получаем, что $u^*(\xi) \equiv 0$ ($0 \leq \xi \leq 1$), т. е. $u = G_1(1 - \mathfrak{G}^*)u \in D(\mathfrak{G})$.

Итак, пусть $d > 0$. Если $\lim_{n \uparrow +\infty} b_n = a$ и $u(b_n) \uparrow d$ ($n \uparrow +\infty$), то

$$0 < d = \lim_{n \uparrow +\infty} u^*(b_n) = \begin{cases} u^*(a), & \text{если } b_n \geq a \text{ для бесконечно} \\ & \text{многих } n; \\ P_{a-0} \{m_a < +\infty\} u^*(a), & \text{если } b_n < a \\ & \text{для бесконечно многих } n. \end{cases}$$

Так как в последнем случае $0 < u^*(a) \leq d$, то $d = u^*(a)$ также и в этом случае.

Но если a — несингулярная точка, то (см. задачу 4.4.3) $u^*(a) = (\mathfrak{G}^* u)(a) \leq 0$, что противоречит тому, что $d > 0$. Если $a = 1$, то $0 < d = u^*(1) = (\mathfrak{G}^* u)(1) = 0$. Если же $a \in K_+ \cap [0, 1)$, то выберем $b > a$ так, чтобы $u^*(\xi) > d/2 > 0$ ($a \leq \xi \leq b$), и заметим, что

$$\begin{aligned} u^{*+}(\xi) &= u^{*+}(l_n) + \int_{(l_n, \xi]} [(\mathfrak{G}^* u^*)(\eta) m(d\eta) + u^*(\eta) k(d\eta)] > u^{*+}(l_n) = \\ &= (\mathfrak{G}^* u^*)(l_n) m(l_n) + u^*(l_n) k(l_n) \geq 0, \quad a \leq l_n \leq \xi < r_n \wedge b. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} u^*(b) &= u^*(a) + \sum_{a \leq l_n < b} \int_{l_n}^{r_n \wedge b} u^* ds + \int_{K_+ \cap [a, b)} [(\mathfrak{G}^* u^*)(\eta) s_+(d\eta) + \\ &\quad + u^*(\eta) k_+(d\eta)] > u^*(a) = d, \end{aligned}$$

чего также не может быть.

Задача 1. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(\mathfrak{G}^* u)(b) = \frac{u^+(db)}{m(db)}, \quad b \in R^* \equiv R^1 \setminus 0,$$

где $u^+(a) = \lim_{b \downarrow a} [b - a]^{-1} [u(b) - u(a)]$, $m(db)$ — некоторая мера скорости на R^+ и $u \in D(\mathfrak{G}^*) = C(R^+) \cap \{u: \mathfrak{G}^*u \in C(R^+)\}$. Задача состоит в том, чтобы найти все такие производящие операторы \mathfrak{G} консервативных диффузий на R^1 , что $\mathfrak{G}^* \equiv \mathfrak{G}$.

[Одна из возможностей состоит в том, чтобы объявить, что $(\mathfrak{G}u)(0) = 0$ для любого $u \in D(\mathfrak{G})$, где $D(\mathfrak{G})$ — класс функций

$u \in D(\mathfrak{G}^*)$, непрерывных слева в 0, если $\int_{-1}^0 m[-1, \xi] d\xi < +\infty$,

и непрерывных справа в 0, если $\int_0^1 m(\xi, 1] d\xi < +\infty$. Если $m(0, +1] < +\infty$, то можно сделать 0 точкой правого переноса, т. е. положить

$$(\mathfrak{G}u)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{u(\varepsilon) - u(0)}{s_+(\varepsilon) - s_+(0)},$$

где $s_+(a) = \int_0^a m[0, b] db$, $m(0) \geq 0$. Тогда $D(\mathfrak{G})$ — класс функций

$u \in D(\mathfrak{G}^*)$, непрерывных слева в 0, если $\int_{-1}^0 m[-1, \xi] d\xi < +\infty$,

и таких, что $u(+0) = u(0)$ и $(\mathfrak{G}u)(+0) = (\mathfrak{G}u)(0)$. Если $m[-1, 0] < +\infty$, то в точке 0 можно ввести левый перенос, а если $m[-1, 0] + m(0, +1] < +\infty$, то можно положить

$$(\mathfrak{G}u)(0) = \lim_{\substack{b \downarrow 0 \\ a \uparrow 0}} \frac{u^+(b) - u^+(a)}{m(a, b)},$$

где $m(0) \geq 0$, а $D(\mathfrak{G})$ — класс функций $u \in D(\mathfrak{G}^*)$, удовлетворяющих условиям $u(\pm 0) = u(0)$ и $(\mathfrak{G}u)(\pm 0) = \mathfrak{G}u(0)$.]

4.10. Моменты первого достижения

Рассмотрим, как в § 4.8, случай

$$P_0\{m_1 < +\infty\} > 0, \quad (1a)$$

$$E_0\{m_1 \wedge m_\infty\} < +\infty. \quad (1b)$$

Введем обозначение $Q^* = \bigcup_{n \geq 1} [l_n, r_n]$ и покажем, что процесс $[m_b: 0 \leq b \leq 1, P_0]$ совпадает по распределению с процессом

$$s_+([0, b] \cap K_+) + \int_{(0, +\infty)} l_p([0, b] \times dl) + \infty \cdot p((0, b] \times +\infty), \quad 0 \leq b \leq 1, \quad (2)$$

где $+\infty \cdot 0 \equiv 0$, а $p(db \times dl)$ ($0 \leq b \leq 1$, $0 < l \leq +\infty$) — пуассоновская мера со средним $n(db \times dl)$:

$$e^{-n((a, b] \times +\infty)} = P_a \{m_b < +\infty\} = \bigcap_{a < \xi \leq b} [1 - k_+(d\xi)]^1, \quad a < b; \quad (3a)$$

$$n(K_+ \times dl) = 0, \quad l < +\infty; \quad (3b)$$

$$n(db \cap Q^* \times dl) = s(db) \cdot \lim_{a \uparrow b} \frac{P_a \{m_b \in dl\}}{s(b) - s(a)}, \quad l > 0. \quad (3c)$$

Процесс $\{m_b: 0 \leq b \leq 1, P_0\{B | m_1 < +\infty\}\}$ является процессом с независимыми приращениями, причем

$$P_0 \left\{ \lim_{a \uparrow b} m_a = m_b, \quad 0 < b \leq 1 \mid m_1 < +\infty \right\} = 1 \quad \text{и} \quad P_0 \left\{ \lim_{a \uparrow b} m_a = m_b \right\} = 1 \\ (0 \leq b < 1);$$

поэтому m_b можно представить в виде

$$t(b) + \int_{(0, +\infty)} lp([0, b] \times dl), \quad 0 \leq b \leq 1, \quad (4)$$

относительно *условного* распределения $P_0\{B | m_1 < +\infty\}$. Здесь функция $t \in C[0, 1]$ не зависит от траектории, а $p(db \times dl)$ — пуассоновская мера²⁾. Если ввести пуассоновскую меру $p((a, b] \times +\infty)$, независимую от (4), со средним $E(p((a, b] \times +\infty))$, равным $n((a, b] \times +\infty) \equiv -\ln P_a \{m_b < +\infty\}$ ($0 \leq a < b \leq 1$) в соответствии с формулой (3a), то m_b можно представить в виде

$$t(b) + \int_{(0, +\infty)} lp([0, b] \times dl) + \infty \cdot p((0, b] \times +\infty), \quad (5) \\ 0 \leq b \leq 1,$$

уже относительно *безусловного* распределения P_0 .

Теперь нужно показать, что t и n совпадают с выражениями (2) и (3).

Если $a \leq b$ находятся в пределах какого-то интервала из Q^* , то $P_a \{m_b \geq l\}$ является выпуклой вверх функцией от $s(a)$ (см. задачу 4.4.2). Это позволяет определить $n^*(b \times dl)$ следующим образом:

$$0 \leq [s(b) - s(a)]^{-1} P_a \{m_b \geq l\} \uparrow n^*(b \times [l, +\infty]), \quad (6) \\ a \uparrow b, \quad l > 0,$$

¹⁾ См. объяснение, следующее за формулами (4.8.2).

²⁾ См. замечание 1.

для l , не являющихся скачками функции $n^*(b \times dl)$. Рассмотрим решение $g_1 = E_*(e^{-\alpha m_1})$ уравнения

$$(\mathcal{G}^* g_1)(b) = \alpha g_1(b), \quad 0 \leq b < 1. \quad (7)$$

Из того, что

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha l} n^*(b \times [l, +\infty]) dl &= \\ &= \lim_{a \uparrow b} \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha l} [s(b) - s(a)]^{-1} P_a \{m_b \geq l\} dl = \\ &= \lim_{a \uparrow b} [s(b) - s(a)]^{-1} \int_{(0, +\infty]} [1 - e^{-\alpha l}] P_a \{m_b \in dl\} = \\ &= \lim_{a \uparrow b} g_1(b)^{-1} \frac{g_1(b) - g_1(a)}{s(b) - s(a)} = \frac{g_1^-(b)}{g_1(b)}, \quad (8) \end{aligned}$$

легко выводим, что

$$\int_{(0, +\infty]} [1 - e^{-\alpha l}] n^*(b \times dl) = \frac{g_1^-(b)}{g_1(b)} \quad (9)$$

и

$$\int_{[a, b)} s(d\xi) n^*(\xi \times +\infty) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \ln \frac{g_1(b)}{g_1(a)} = -\ln P_a \{m_b < +\infty\}. \quad (10)$$

Но теперь, проверив при помощи выражения (5), что

$$\begin{aligned} e^{-\alpha[t(b)-t(a)]} - \int_{(0, +\infty)} [1 - e^{-\alpha l}] n([a, b) \times dl) - n((a, b) \times +\infty) &= \\ &= E_a(e^{-\alpha m_b}) = \frac{g_1(a)}{g_1(b)}, \quad 0 \leq a < b \leq 1, \quad (11) \end{aligned}$$

из (7), (9) и (10) получаем ($u = p^{-1}g_1 \in C[0, 1]$, $p = P_a \{m_1 < +\infty\}$)

$$\begin{aligned} \alpha [t(b) - t(a)] + \int_{(0, +\infty)} [1 - e^{-\alpha l}] n([a, b) \times dl) + n((a, b) \times +\infty) &= \\ &= \ln \frac{g_1(b)}{g_1(a)} = \ln \frac{u(b)}{u(a)} - \ln P_a \{m_b < +\infty\} = \\ &= \int_{[a, b)} \frac{u(d\xi)}{u(\xi)} - \ln P_a \{m_b < +\infty\} = \\ &= \int_{[a, b)} \left[\frac{g_1(d\xi)}{g_1(\xi)} - \frac{p(d\xi)}{p(\xi)} \right] - \ln P_a \{m_b < +\infty\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[a, b] \cap K_+} g_1(\xi)^{-1} [(\mathcal{G}^* g_1)(\xi) s_+(d\xi) + g_1(\xi) k_+(d\xi)] - k_+[a, b] + \\
&\quad + \int_{[a, b] \cap Q^*} \frac{g_1^-(\xi)}{g_1(\xi)} s(d\xi) - \ln P_a \{m_b < +\infty\} = \\
&= \alpha s_+([a, b] \cap K_+) - k_+([a, b] \cap Q^*) + \\
&\quad + \int_{[a, b] \cap Q^*} s(d\xi) \int_{(0, +\infty)} [1 - e^{-\alpha l}] n^*(\xi \times dl) - \ln P_a \{m_0 < +\infty\} = \\
&= \alpha s_+([a, b] \cap K_+) + \\
&\quad + \int_{[a, b] \cap Q^*} s(d\xi) \int_{(0, +\infty)} [1 - e^{-\alpha l}] n^*(\xi \times dl) - \ln P_a \{m_b < +\infty\}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $t(b) - t(a) = s_+([a, b] \cap K_+)$ и что справедливы формулы (3), и доказательство закончено.

Замечание 1. Процессы с независимыми приращениями с возрастающими траекториями. Пусть дан процесс с независимыми приращениями $p(t)$ ($t \geq 0$), такой, что $p(0) = 0$, $p(t) \in \uparrow$, $p(t) = p(t+0) < +\infty$ ($t \geq 0$), и $E[e^{-p(t)}]$ непрерывно ($t \geq 0$). П. Леви [1: 173—180] доказал, что

$$p(t) = c(t) + \int_0^{+\infty} lp([0, t] \times dl), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где функция $c(t)$ непрерывна и не зависит от траектории, а

$$p(dt \times dl) = \text{число скачков функции } p \text{ величины } l \in dl \text{ за время } dt \quad (2)$$

есть пуассоновская мера со средним $n(dt \times dl)$, для которой

$$\int_0^{+\infty} (1 - e^{-l}) n((0, t] \times dl) < +\infty, \quad t > 0. \quad (3)$$

(Определение пуассоновской меры см. в замечании в конце § 1.8.)
Формула П. Леви [1: 173—180]

$$E[e^{-\alpha(p(t_2) - p(t_1))}] = \exp[-\alpha[c(t_2) - c(t_1)] -$$

$$- \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\alpha l}) n((t_1, t_2] \times dl)], \quad \alpha > 0, \quad t_1 \leq t_2, \quad (4)$$

немедленно вытекает из (1), а соотношение (3) следует из того, что левая часть формулы (4) положительна.

Приведенное ниже доказательство формулы (1) заимствовано с изменениями из К. Ито [1]. Определим p соотношением (2); тогда

$$c(t) \equiv p(t) - \int_{+0}^{+00} lp([0, t] \times dl), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

— непрерывный неотрицательный неубывающий процесс с независимыми приращениями, и потому он должен не зависеть от траектории. Мы сейчас докажем это для $t=1$.

Пусть $l_{nk} = \left[c\left(\frac{k}{n}\right) - c\left(\frac{k-1}{n}\right) \right] \wedge 1$, $k \leq n$, $n \geq 1$. Так как

$$\frac{1}{2} \max_{k \leq n} E(l_{nk}) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{k \leq n} E[1 - e^{-l_{nk}}] \leq \max_{k \leq n} E[1 - e^{-\left[p\left(\frac{k}{n}\right) - p\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]}] = \\ &= \max_{k \leq n} E[e^{-p\left(\frac{k-1}{n}\right)} - e^{-p\left(\frac{k}{n}\right)}] E[e^{-p\left(\frac{k-1}{n}\right)}]^{-1} \leq \\ &\leq E[e^{-p(1)}]^{-1} \max_{k \leq n} [E(e^{-p\left(\frac{k-1}{n}\right)}) - E(e^{-p\left(\frac{k}{n}\right)})] \end{aligned} \quad (6)$$

стремится к 0 при $n \uparrow +\infty$, то, если $\beta < \alpha < \gamma$, имеем

$$\begin{aligned} e^{-\gamma \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k \leq n} E(l_{nk})} &= \overline{\lim}_{n \uparrow +\infty} \prod_{k \leq n} e^{-\gamma E(l_{nk})} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{n \uparrow +\infty} \prod_{k \leq n} [1 - \alpha E(l_{nk})] \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{n \uparrow +\infty} \prod_{k \leq n} E(e^{-\alpha l_{nk}}) = \overline{\lim}_{n \uparrow +\infty} E(e^{-\alpha \sum_{k \leq n} l_{nk}}) = \\ &= E[e^{-\alpha c(1)}] = \lim_{n \uparrow +\infty} E(e^{-\alpha \sum_{k \leq n} l_{nk}}) = \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} \prod_{k \leq n} E(e^{-\alpha l_{nk}}) \leq \lim_{n \uparrow +\infty} \prod_{k \leq n} [1 - \beta E(l_{nk})] = \\ &= e^{-\beta \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k \leq n} E(l_{nk})}. \end{aligned} \quad (7)$$

Полагая здесь $\beta \uparrow \alpha$ и $\gamma \downarrow \alpha$, находим, что

$$E[e^{-\alpha c(1)}] = e^{-\alpha \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k \leq n} E(l_{nk})}, \quad \alpha \geq 0, \quad (8)$$

а это может быть только в том случае, когда $c(1)$ не зависит от траектории.

Теперь докажем, что $p([t_1, t_2) \times [l_1, l_2))$ ($t_1 < t_2$, $0 < l_1 < l_2$) имеет распределение Пуассона. Пусть

$l_{nk} = 0$ или 1 в зависимости от того,

$$p\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \times [l_1, l_2)\right) = 0 \text{ или } 1; \quad (9)$$

тогда, так же как при выводе (6), получаем, что

$$\begin{aligned} [1 - e^{-\alpha}] \max_{k \leq n} P\{l_{nk} = 1\} &\leq \max_{k \leq n} E[1 - e^{-\alpha l_{nk}}] < \\ &\leq E[e^{-\alpha p(1)}]^{-1} \max_{k \leq n} (E[e^{-\alpha p(\frac{k-1}{n})}] - E[e^{-\alpha p(\frac{k}{n})}]) \end{aligned} \quad (10)$$

стремится к 0 при $n \uparrow +\infty$; и так же как при выводе (7), находим, что

$$\begin{aligned} E[e^{-\alpha p([0, 1) \times [l_1, l_2))}] &= \lim_{n \uparrow +\infty} E[e^{-\alpha \sum_{k \leq n} l_{nk}}] = \lim_{n \uparrow +\infty} \prod_{k \leq n} E(e^{-\alpha l_{nk}}) = \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} \prod_{k \leq n} [1 - (1 - e^{-\alpha}) P\{l_{nk} = 1\}] = \\ &= \exp[-(1 - e^{-\alpha}) \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k \leq n} P\{l_{nk} = 1\}], \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Это и нужно было доказать в случае $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$.

Ясно, что p имеет независимые приращения по t (вспомним, что означает p); чтобы закончить доказательство того, что p — пуассоновская мера, достаточно проверить независимость $\Omega_+ \equiv p([0, 1) \times (l_1, l_2])$ и

$$\Omega_- \equiv \int_{(0, l_1]} lp([0, 1) \times dl) \quad (0 < l_1 < l_2).$$

Для этого рассмотрим

$$l_{nk}^- = \int_{(0, l_1]} lp\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \times dl\right); \quad (12a)$$

$$l_{nk}^+ = p\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \times (l_1, l_2]\right). \quad (12b)$$

Обозначим через f некоторое подмножество (неслучайное) множества чисел $1, 2, \dots, n$, а через \mathfrak{f} — множество (случайное) таких целых чисел $k \leq n$, что $l_{nk}^+ > 0$.

Событие $\Omega_+ = m$ можно представить в виде суммы

$$\bigcup_f \bigcup_{t \in \mathfrak{X}} \{l_{nk}^+ = t_k, k \leq n\},$$

где \mathfrak{X} — класс всех наборов $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ таких неотрицательных целых чисел, что

$$t_k > 0 \text{ или } = 0 \text{ в зависимости от того, } k \in \mathfrak{f} \text{ или нет,} \quad (13a)$$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = m. \quad (13b)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} E \{ \mathfrak{Q}_+ = m, e^{-\alpha \sum_{k \notin \mathfrak{f}} l_{nk}^-} \} &= \\ &= \sum_{\mathfrak{f}} \sum_{t \in \mathfrak{X}} E \{ l_{nk}^+ = t_k, k \leq n; e^{-\alpha \sum_{k \notin \mathfrak{f}} l_{nk}^-} \} = \\ &= \sum_{\mathfrak{f}} \sum_{t \in \mathfrak{X}} \prod_{k \in \mathfrak{f}} P \{ l_{nk}^+ = t_k \} \prod_{k \notin \mathfrak{f}} E \{ l_{nk}^+ = 0, e^{-\alpha l_{nk}^-} \} = \\ &= \sum_{\mathfrak{f}} \sum_{t \in \mathfrak{X}} \prod_{k \in \mathfrak{f}} P \{ l_{nk}^+ = t_k \} \prod_{k \notin \mathfrak{f}} P \{ l_{nk}^+ = 0 \} \times \\ &\times \frac{\prod_{k \notin \mathfrak{f}} E \{ l_{nk}^+ = 0, e^{-\alpha l_{nk}^-} \} \prod_{k \notin \mathfrak{f}} E \{ l_{nk}^+ = 0, e^{-\alpha l_{nk}^-} \} \prod_{k \notin \mathfrak{f}} P \{ l_{nk}^+ = 0 \}}{\prod_{k \notin \mathfrak{f}} P \{ l_{nk}^+ = 0 \} \prod_{k \notin \mathfrak{f}} P \{ l_{nk}^+ = 0 \} \prod_{k \notin \mathfrak{f}} E \{ l_{nk}^+ = 0, e^{-\alpha l_{nk}^-} \}} = \\ &= \sum_{\mathfrak{f}} \sum_{t \in \mathfrak{X}} P \{ l_{nk}^+ = t_k, k \leq n \} \times \frac{E \{ e^{-\alpha \mathfrak{Q}_-} | \mathfrak{Q}_+ = 0 \}}{\prod_{k \notin \mathfrak{f}} E \{ e^{-\alpha l_{nk}^-} | l_{nk}^+ = 0 \}}. \quad (14) \end{aligned}$$

Но множества \mathfrak{f} и \mathfrak{f} в формуле (14) содержат не более m элементов; таким образом,

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \prod_{k \notin \mathfrak{f}} E \{ e^{-\alpha l_{nk}^-} | l_{nk}^+ = 0 \} = 1, \quad (15)$$

и при $n \uparrow +\infty$ формула (14) переходит в

$$\begin{aligned} E \{ \mathfrak{Q}_+ = m, e^{-\alpha \mathfrak{Q}_-} \} &= \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{\mathfrak{f}} \sum_{t \in \mathfrak{X}} P \{ l_{nk}^+ = t_k, k \leq n \} E \{ e^{-\alpha \mathfrak{Q}_-} | \mathfrak{Q}_+ = 0 \} = \\ &= P \{ \mathfrak{Q}_+ = m \} E \{ e^{-\alpha \mathfrak{Q}_-} | \mathfrak{Q}_+ = 0 \}, \quad (16) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4.11. Спектральные разложения для функций Грина и переходные плотности

Пусть имеется несингулярная диффузия, измененная так, как это описано в § 4.5. Обозначим через Q^* единичный интервал, замкнутый в 0, если $E_0(e^{-m_{+0}}) = E_{+0}(e^{-m_0}) = 1$, замкнутый в 1, если $E_1(e^{-m_{1-0}}) = E_{1-0}(e^{-m_1}) = 1$, а в остальных случаях открытый. Введем момент остановки $m = \min \{t: x(t) \notin Q^*\}$. Применяя идею спектральных разложений, построим такие переходные плотности $p(t, a, b)$, что

$$P_a \{x(t) \notin db, t < m\} = p(t, a, b) m(db), \quad (1)$$

$$(t, a, b) \in (0, +\infty) \times Q^* \times Q^*,$$

где

$$0 \leq p(t, a, b) = p(t, b, a) \text{ — непрерывная функция на } (0, +\infty) \times Q^* \times Q^*; \quad (2)$$

$$p(t, a, b) = \int_{Q^*} p(s, a, c) p(t-s, c, b) m(dc), \quad (3)$$

$$t > s > 0, a, b \in Q^*;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, a, b) = \mathfrak{G}^* p(t, a, b)^1); \quad (4a)$$

$$p(t, +0, b) = 0, \text{ если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 0, b \in Q^*; \quad (4b)$$

$$p(t, 1-0, b) = 0, \text{ если } E_1(e^{-m_{1-0}}) = 0, b \in Q^*;$$

$$p_2^+(t, +0, b) = 0, \text{ если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 1, E_{+0}(e^{-m_0}) = 0, b \in Q^{*2});$$

$$p_2^-(t, 1-0, b) = 0, \text{ если } E_1(e^{-m_{1-0}}) = 1, E_{1-0}(e^{-m_1}) = 0, b \in Q^*. \quad (4c)$$

1) Оператор \mathfrak{G}^* применяется по a или по b^- .

2) $p_2^+(t, a, b) \equiv \lim_{\xi \downarrow a} \frac{p(t, \xi, b) - p(t, a, b)}{s(\xi) - s(a)};$

$p_2^-(t, a, b) \equiv \lim_{\xi \uparrow b} \frac{p(t, a, b) - p(t, a, \xi)}{s(b) - s(\xi)}$ и т. д.

Здесь \mathfrak{Q}^* — локальный дифференциальный оператор, описанный в конце § 4.7.

Метод доказательства будет здесь только намечен; см. доказательство для частного случая в статье Г. П. Маккина [2]; прекрасный метод, который можно применить к нашему случаю, — в статье С. Карлина и Дж. Макгрегора [1]; классическое спектральное разложение для операторов Штурма — Лиувилля в статье Г. Вейля [1]. В качестве источника общих сведений о гильбертовом пространстве предлагается Б. Секефальви-Надь [1].

При фиксированном $\alpha > 0$ обозначим через g_1 и g_2 решения уравнений

$$(\mathfrak{Q}^* g_1)(b) = \alpha g_1(b), \quad 0 \leq b < 1; \quad (5a)$$

$$(\mathfrak{Q}^* g_2)(b) = \alpha g_2(b), \quad 0 < b \leq 1, \quad (5b)$$

описанные в § 4.5; и пусть B — вронскиан $g_1^* g_2 - g_1 g_2^* (= \text{const} > 0)$. Введем функцию Грина

$$G(a, b) = G(b, a) = B^{-1} g_1(a) g_2(b), \quad a \leq b, \quad a, b \in Q^*, \quad (6)$$

и докажем, что для $f \in D$ функция

$$\int_{Q^*} G(a, b) f(b) m(db) = E_a \left[\int_0^m e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right], \quad a \in Q^*, \quad (7)$$

является единственным решением задачи

$$u \in C(Q^*); \quad (8a)$$

$$(\alpha - \mathfrak{Q}^*) u(b) = f(b), \quad b \in Q^*, \quad (8b)$$

удовлетворяющим условиям

$$u(+0) = 0, \quad \text{если} \quad E_0(e^{-m+0}) = 0, \quad E_{+0}(e^{-m0}) = 1; \quad (9a)$$

$$u(1-0) = 0, \quad \text{если} \quad E_1(e^{-m1-0}) = 0, \quad E_{1-0}(e^{-m1}) = 1; \quad (9b)$$

$$u^+(+0) = 0, \quad \text{если} \quad E_0(e^{-m+0}) = 1, \quad E_{+0}(e^{-m0}) = 0; \quad (10a)$$

$$u^-(1-0) = 0, \quad \text{если} \quad E_1(e^{-m1-0}) = 1, \quad E_{1-0}(e^{-m1}) = 0. \quad (10b)$$

(См. частный случай в § 2.6.)

Так же, как в формуле (2.6.16), получаем

$$\int_{Q^*} G(a, b) m(db) \leq \alpha^{-1}; \quad (11)$$

например, если $0 \in Q^*$, $E_{1-0}(e^{-m_1}) = 0$ и $0 < a < 1$, то

$$\begin{aligned} \alpha \int_{Q^*} G(a, b) m(db) &= \\ &= B^{-1} \left[g_2(a) \int_{0 \leq b < a} \mathfrak{G}^* g_1 dm + g_1(a) \int_{a \leq b < 1} \mathfrak{G}^* g_2 dm \right] \leq \\ &\leq B^{-1} \left[g_2(a) \int_{0 \leq b < a} g_1^+(db) + g_1(a) \int_{a \leq b < 1} g_2^+(db) \right] + \\ &+ B^{-1} g_2(a) \alpha g_1(0) m(0) = \\ &= B^{-1} [B - g_2(a) g_1^+(0) + g_1(a) g_2^-(1)] + B^{-1} g_2(a) \alpha g_1(0) m(0) = \\ &= 1 + B^{-1} g_2(a) [\alpha g_1(0) m(0) - g_1^+(0)] + B^{-1} g_1(a) g_2^-(1) \leq 1. \quad (12) \end{aligned}$$

Функции

$$u \equiv \int_{Q^*} Gf dm \quad (13a)$$

и

$$G_\alpha f = E. \left[\int_0^m e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right] \quad (13b)$$

обе удовлетворяют соотношениям (8), (9) и (10). В случае (13a) для проверки этого нужно продифференцировать и использовать таблицу 4.6.1, а в случае (13b) достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} G_\alpha f &= G_\alpha f + E. [e^{-\alpha m} (G_\alpha f)(x_m)] = \\ &= G_\alpha f + \frac{g_2}{g_2(0)} \frac{P_0 \{m_0 = +\infty\}}{\kappa(0) + \alpha} f(0) + \frac{g_1}{g_1(1)} \frac{P_1 \{m_1 = 0 = +\infty\}}{\kappa(1) + \alpha} f(1). \quad (14) \end{aligned}$$

Итак, $u^* = u - G_\alpha f \in C(Q^*)$ — решение уравнения $(\mathfrak{G}^* u^*)(\xi) = \alpha u^*(\xi)$ ($\xi \in Q^*$), удовлетворяющее условиям (9) и (10). Отсюда вытекает, что $u^* \equiv 0$ на Q^* , в чем и состоит утверждение (7). Пусть, например, $0 \in Q^*$, $E_1(e^{-m_1-0}) = 0$, а $E_{1-0}(e^{-m_1}) = 1$. Рассуждая так же, как при доказательстве в § 4.7 того, что \mathfrak{G} — глобальный дифференциальный оператор, получаем, что $u^*(b) = \text{const} \cdot g_2$ ($0 \leq b < 1$), так как $g_1(1-0) > 0$. Константа должна быть равна 0, потому что

$$0 < k(0) g_2(0) - g_2^+(0) + m(0) (\mathfrak{G}^* g_2)(+0).$$

Теперь будем считать, что оператор G_α действует на (действительном) гильбертовом пространстве H измеримых (относительно

меры скорости) функций h , определенных на Q^* , с нормой $\|h\|_2 = \sqrt{\int_{Q^*} h^2 dm} < +\infty$ (функции, совпадающие всюду, кроме множества меры 0, отождествляются).

Поскольку $\int G dm \leq \alpha^{-1}$ и $G(a, b) = G(b, a)$, имеем

$$\begin{aligned} \|G_\alpha h\|_2^2 &= \int dm \left(\int G^{1/2} G^{1/2} h dm \right)^2 \leq \\ &\leq \int m(da) \int G(a, b) m(db) \int G(a, b) h(b)^2 m(db) \leq \\ &\leq \alpha^{-1} \int \int G(a, b) m(da) h(b)^2 m(db) \leq \\ &\leq \alpha^{-2} \int h(b)^2 m(db) = \alpha^{-2} \|h\|_2^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Значит, оператор G_α ограничен ($\|G_\alpha\|_2 \leq \alpha^{-1}$) и симметричен ($G_\alpha^* = G_\alpha$).

Оператор G_α также положительно определен. Действительно, пользуясь тем, что

$$G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta = 0, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (16)$$

убеждаемся в том, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} [G_{\alpha+\varepsilon} - G_\alpha] = -G_\alpha^2$$

в смысле сходимости по норме, причем $\|G_\alpha\|_2 \downarrow 0$ ($\alpha \uparrow +\infty$).

Поэтому $G_\alpha = \int_{\alpha}^{+\infty} G_\beta^2 d\beta$ — неотрицательно определенный оператор.

Вторично применяя (16), получаем, что нуль-пространство $H \cap \{h: G_\alpha h = 0\}$ не зависит от α , а отсюда вытекает, что если $(G_\alpha h, h) = 0$, то $0 = \lim_{\beta \uparrow +\infty} \beta G_\beta h = h$, что и требовалось доказать.

Итак, оператор G_α обратим. Применяя еще раз (16), находим, что область значений $G_\alpha H \equiv H(\mathfrak{D})$ не зависит от α и что

$$G_\alpha^{-1} = \alpha - \mathfrak{D}, \quad (17a)$$

$$\mathfrak{D} \equiv 1 - G_1^{-1}: H(\mathfrak{D}) \rightarrow H. \quad (17b)$$

Оператор \mathfrak{D} симметричен ($\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}$) и неположительно определен ($\mathfrak{D} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\varepsilon - G_\varepsilon^{-1}) \leq 0$).

Область определения $H(\Omega)$ есть класс таких функций $h \in H$, что при каком-то $u \in D$ и $h^* \in H$

$$u \equiv h \text{ п. в.с. } (m)^1; \quad (18a)$$

$$h^*(\xi) m(d\xi) = u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi), \quad 0 < \xi < 1, \quad (18b)$$

причем выполнены условия

$$h^*(0) m(0) = u^+(0) - u(0) k(0), \quad \text{если } 0 \in Q^*; \quad (19a)$$

$$h^*(1) m(1) = -u^-(1) - u(1) k(1), \quad \text{если } 1 \in Q^*; \quad (19b)$$

$$u(+0) = 0, \quad \text{если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 0, \quad E_{+0}(e^{-m_0}) = 1; \quad (20a)$$

$$u(1-0) = 0, \quad \text{если } E_1(e^{-m_{1-0}}) = 0, \quad E_{1-0}(e^{-m_1}) = 1; \quad (20b)$$

$$u^+(+0) = 0, \quad \text{если } E_0(e^{-m_{+0}}) = 1, \quad E_{+0}(e^{-m_0}) = 0; \quad (21a)$$

$$u^-(1-0) = 0, \quad \text{если } E_1(e^{-m_{1-0}}) = 1, \quad E_{1-0}(e^{-m_1}) = 0; \quad (21b)$$

$$u(+0) = 0, \quad \text{если } E_0(e^{-m_{+0}}) = E_{+0}(e^{-m_0}) = 0,$$

$$+\infty > \int_{+0}^{1/2} \left[s\left(\frac{1}{2}\right) - s(b) \right]^2 m(db); \quad (22a)$$

$$u(1-0) = 0, \quad \text{если } E_1(e^{-m_{1-0}}) = E_{1-0}(e^{-m_1}) = 0,$$

$$+\infty > \int_{1/2}^{1-0} \left[s(b) - s\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 m(db)^2, \quad (22b)$$

а Ω определяется как отображение $h \in H(\Omega) \rightarrow h^*$.

Введем теперь спектральные представления

$$\Omega = \int_{-\infty}^{+0} \gamma p(d\gamma), \quad (23a)$$

$$G_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+0} \frac{p(d\gamma)}{\alpha - \gamma}, \quad (23b)$$

где $p(d\gamma)$ — спектральная мера на $(-\infty, 0]$ со значениями в множестве операторов проектирования ($p(-\infty, 0] = 1$).

¹⁾ Это сокращенная запись для выражения «почти всюду относительно меры m ». — Прим. перев.

²⁾ Условия (22) — это и есть требование, налагаемое в случае предельных циклов Г. Вейля.

Пусть дано $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2]$ ($-\infty < \gamma_1 < \gamma_2 \leq 0$); тогда $p(\Gamma)$ — оператор Карлемана. Более подробно, пусть векторная функция $e = e(\gamma, \cdot) = (e_1(\gamma, \cdot), e_2(\gamma, \cdot))$ является решением задачи

$$(\mathcal{G}^* e)(\xi) = \gamma e(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \quad (24a)$$

$$e\left(\gamma, \frac{1}{2}\right) = (1, 0), \quad e^+\left(\gamma, \frac{1}{2}\right) = (0, 1), \quad (24b)$$

и пусть

$$e(\gamma, 0) = e(\gamma, +0), \quad 0 \in Q^*; \quad (25a)$$

$$e(\gamma, 1) = e(\gamma, 1-0), \quad 1 \in Q^*; \quad (25b)$$

тогда

$$p(\Gamma)h = \int_{Q^*} e(\Gamma, a, b) h(b) m(db); \quad (26a)$$

$$e(\Gamma, a, b) = \int_{\Gamma} e(\gamma, a) f(d\gamma) e(\gamma, b); \quad (26b)$$

$$\int_{Q^*} |e(\Gamma, a, b)|^2 m(db) < +\infty \text{ н. в. с. } (m). \quad (26c)$$

Здесь $f(d\gamma)$ — некоторая мера на $(-\infty, 0]$, принимающая в качестве значений симметричные неотрицательно определенные матрицы порядка 2×2 :

$$f(d\gamma) = \begin{pmatrix} f_{11}(d\gamma) & f_{12}(d\gamma) \\ f_{21}(d\gamma) & f_{22}(d\gamma) \end{pmatrix}; \quad (27a)$$

$$f_{11}(d\gamma) \geq 0, \quad f_{22}(d\gamma) \geq 0, \quad f_{12}(d\gamma) = f_{21}(d\gamma),$$

$$[f_{12}(d\gamma)]^2 \leq f_{11}(d\gamma) f_{22}(d\gamma), \quad (27b)$$

а $e f e$ означает скалярное произведение двумерных векторов e и $f e$.

Преобразование $\mathfrak{h} = \int_{Q^*} e h dm$ есть так называемое преобразование Фурье; оно удовлетворяет теореме Планшереля

$$\int_{-\infty}^{+0} \mathfrak{h} f(d\gamma) \mathfrak{h} = \|h\|_2^2. \quad (28)$$

Из (23b) вытекает спектральное разложение

$$G(a, b) = \int_{-\infty}^{+0} (\alpha - \gamma)^{-1} e(\gamma, a) f(d\gamma) e(\gamma, b), \quad (29a)$$

$$\alpha > 0, \quad (a, b) \in Q^* \times Q^*.$$

Обращая преобразование Лапласа, получаем из формулы (29a) ядро

$$p(t, a, b) = \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} e(\gamma, a) f(d\gamma) e(\gamma, b), \quad (29b)$$

$$(t, a, b) \in (0, +\infty) \times Q^* \times Q^*,$$

для которого выполняются соотношения (1), (2), (3) и (4). Доказательство формулы (3) основывается на оценках

$$\int_{-\infty}^{+0} (\alpha - \gamma)^{-1} f_{11}(d\gamma) = B^{-1} g_1\left(\frac{1}{2}\right) g_2\left(\frac{1}{2}\right) < +\infty; \quad (30a)$$

$$\int_{-\infty}^{+0} (\alpha - \gamma)^{-2} f_{22}(d\gamma) \leq (\alpha B)^{-1} g_1^+\left(\frac{1}{2}\right) \left| g_2^+\left(\frac{1}{2}\right) \right| < +\infty \quad (30b)$$

и

$$e_1(\gamma, \xi) + |e_2(\gamma, \xi)| < e^{\text{const} \cdot \sqrt{|\gamma|}} \quad (\gamma \downarrow -\infty) \text{ на любом замкнутом подинтервале из } Q^*. \quad (31)$$

Последняя оценка позволяет в формуле (29b) производить дифференцирование под знаком интеграла.

Пусть $0 < b < 1$. Обозначим через $p(t, \xi, \eta)$ ($\xi < \eta < b$) ядро (29b) для остановленной диффузии

$$[x(t \wedge e): t \geq 0, P_a: a \leq b], \quad c = m_b;$$

тогда $p(t, a, b-0) = 0$ ($a < b$) и

$$\frac{\partial}{\partial t} P_a \{m_b < t\} = -p_3^-(t, a, b), \quad t > 0, \quad a < b. \quad (32)$$

Отсюда получаем, что $u(t, a) \equiv P_a \{m_b < t\}$ — единственное решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, a) = \mathfrak{G}^* u(t, a), \quad t > 0, \quad a \in [0, b) \cap Q^*; \quad (33a)$$

$$u(+0, a) = 0, \quad a < b; \quad (33b)$$

$$u(t, +0) = 0, \quad t > 0, \quad E_0(e^{-m_{+0}}) = 0; \quad (34a)$$

$$u_2^+(t, +0) = 0, \quad t > 0, \quad E_0(e^{-m_{+0}}) = 1, \quad E_{+0}(e^{-m_0}) = 0; \quad (34b)$$

$$\lim_{a \uparrow b} u(t, a) = 1, \quad t > 0. \quad (34c)$$

Если 0 и 1 — точки входа или выхода, то (см. табл. 4.6.1) след $\text{tr } (G_\alpha) \equiv \int_{Q^*} G(\xi, \xi) m(d\xi)$ конечен, откуда следует, что оператор G_α вполне непрерывен и мера $f(d\gamma)$ сосредоточена на последовательности собственных значений

$$0 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \downarrow -\infty, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\gamma_n} > -\infty. \quad (35)$$

Если и $s(1) - s(0)$, и $m(0, 1)$ конечны, то

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \frac{-\gamma_n}{\pi^2 n^2} = \left[\int_0^1 \sqrt{s(db) m(db)} \right]^{-2}, \quad (36)$$

где $\int_0^1 \sqrt{s(db) m(db)}$ — интеграл Хеллингера $\inf \sum_{n \geq 1} \sqrt{s(Q_n) m(Q_n)}$ ($\bigcup_{n \geq 1} Q_n \equiv Q$) (см. Г. П. Маккин и Д. Б. Рэй [1]; классический случай см. Курант и Гильберт [1]).

С. Карлин и Дж. Макгрегор [1, 2, 4] развили аналогичную теорию для процесса гибели и размножения, описанного в задаче 4.2.2.

Задача 1. Вычислить преобразование Фурье для стандартного броуновского движения.

$$\{e_1(\gamma, \xi) = \cos \sqrt{2|\gamma|} \xi, \quad e_2(\gamma, \xi) = \frac{\sin \sqrt{2|\gamma|} \xi}{\sqrt{2|\gamma|}};$$

$$f_{11}(d\gamma) = \frac{d\gamma}{2\pi \sqrt{2|\gamma|}}, \quad f_{12} = f_{21} = 0, \quad f_{22}(d\gamma) = \frac{\sqrt{2|\gamma|} d\gamma}{2\pi} .]$$

Задача 2. Представить преобразование Фурье для бесселевского движения, связанного с оператором $\mathfrak{G}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{db^2} + \frac{d-1}{b} \frac{d}{db} \right)$ ($d \geq 2$), в виде

$$h = \int_{-\infty}^{+0} e_1(\gamma, \cdot) f_{11}(d\gamma) \int_0^{+\infty} e_1(\gamma, b) h(b) 2b^{d-1} db,$$

выбирая в качестве e_1 решение задачи

$$(\mathfrak{G}^* e_1)(b) = \gamma e_1(b) \quad (0 < b < +\infty), \quad e_1(0) = 1, \quad e_1^+(0) = 0.$$

Найти выражение для $p(t, a, b)$, используя формулу (29b) и работу А. Эрдеи [1: 186 (39)], и сравнить с формулой (2.7.4.):

$$\begin{aligned} |e_1(\gamma, b) &= 2^{d/2-1} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (V\overline{2|\gamma|}b)^{1-d/2} J_{d/2-1}(V\overline{2|\gamma|}b); \\ f_{11}(d\gamma) &= 2^{-d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)^{-2} |\gamma|^{d/2-1} d\gamma, \\ p(t, a, b) &= \frac{e^{-(b^2+a^2)/2t}}{2t(ab)^{d/2-1}} I_{d/2-1}\left(\frac{ab}{t}\right), \quad a, b > 0. \end{aligned}$$

Задача 3. Для консервативной несингулярной диффузии положим

$$p_0 \equiv 1, \quad p_1 \equiv s; \quad p_n(b) = \int_{1/2}^b s(d\xi) \int_{1/2+\theta}^{\xi} p_{n-2}(\eta) m(d\eta), \quad n \geq 2.$$

Задача состоит в том, чтобы показать, что $p(t, \xi, \eta)$ — аналитическая функция от η ($0 < \eta < 1$) в том смысле, что для любого $t > 0$ и любого $0 < \xi < 1$ функция $p(t, \xi, \eta)$ может быть разложена в степенной ряд $\sum_{n \geq 0} c_n p_n(\eta)$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \mathcal{G}^{\cdot n} p\left(t, \xi, \frac{1}{2}\right); \\ c_{2n+1} &= (\mathcal{G}^{\cdot n} p)_3^+\left(t, \xi, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

[Так как $e_1 = \sum_{n \geq 0} \gamma^n p_{2n}$, $e_2 = \sum_{n \geq 0} \gamma^n p_{2n-1}$ ($p_{-1} \equiv 0$) и для некоторой константы c

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} |\gamma|^n |e(\gamma, \xi) f(d\gamma)(p_{2n}(\eta), p_{2n-1}(\eta))| &\leq \\ &\leq \sum_{n \geq 0} \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} |\gamma|^n e^c V\overline{|\gamma|} 2 [f_{11}(d\gamma) + f_{22}(d\gamma)] c_n (n!)^{-2} < +\infty, \end{aligned}$$

то, применяя (29b), получаем

$$\begin{aligned} p(t, \xi, \eta) &= \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} e(\gamma, \xi) f(d\gamma) e(\gamma, \eta) = \\ &= \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} e(\gamma, \xi) f(d\gamma) \sum_{n \geq 0} \gamma^n (p_{2n}(\eta), p_{2n-1}(\eta)) = \\ &= \sum_{n \geq 0} p_{2n}(\eta) \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} \gamma^n e(\gamma, \xi) f(d\gamma) (1, 0) + \\ &\quad + \sum_{n \geq 0} p_{2n-1}(\eta) \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} \gamma^n e(\gamma, \xi) f(d\gamma) (0, 1). \end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} c_{2n} &\equiv \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} \gamma^n e(\gamma, \xi) f(d\gamma) (1, 0) = \\ &= \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} e(\gamma, \xi) f(d\gamma) \mathfrak{G}^{\cdot n} e\left(\gamma, \frac{1}{2}\right) = \mathfrak{G}^{\cdot n} p\left(t, \xi, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &\equiv \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} \gamma^n e(\gamma, \xi) f(d\gamma) (0, 1) = \\ &= \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} e(\gamma, \xi) f(d\gamma) (\mathfrak{G}^{\cdot n} e)^+ \left(\frac{1}{2}\right) = (\mathfrak{G}^{\cdot n} p)_3^+ \left(t, \xi, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Задача 4. Если $p(t, a, b) \leq p(t, a, a)$ для любых $(t, a, b) \in (0, +\infty) \times Q^+ \times Q^+$, то (после замены шкалы)

$$x(t) = \begin{cases} b(t), & t < e; \\ \infty, & t \geq e, \end{cases}$$

где b — стандартное броуновское движение, а e — независимый от него момент времени с показательным условным распределением $P^*\{e > t | B\} = e^{-\kappa t} (\kappa \geq 0)$.

$$[\text{Функция } \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} e(\gamma, a) f(d\gamma) e^+(\gamma, a) \text{ непрерывна справа}]$$

($0 < a < 1$) и потому

$$\begin{aligned} \lim_{b \downarrow a} \frac{p(t, b, b) - p(t, a, a)}{s(b) - s(a)} &= 2 \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} e(\gamma, a) f(d\gamma) e^+(\gamma, a) = \\ &= 2 \lim_{b \downarrow a} \frac{p(t, a, b) - p(t, a, a)}{s(b) - s(a)} \equiv 0, \quad 0 < a < 1, \end{aligned}$$

что доказывает, что $p(t, a, a) \equiv c_1(t)$ не зависит от a , $0 < a < 1$.

Поэтому функция $c_2(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} c_1 dt = B^{-1} g_1(a) g_2(a)$ также постоянна при $0 < a < 1$. Используя это для того, чтобы выразить g_1

и g_2 из соотношения $B = g_1^+ g_2 - g_1 g_2^+$, получаем $g_1 = \text{const} \cdot e^{c_3 s}$, $g_2 = \text{const} \cdot e^{-c_3 s}$ ($c_3 = (2c_2)^{-1}$). Из уравнения $\mathfrak{G}^* g_1 = \alpha g_1$ получаем $k(db) = c_4 s(db)$ и $m(db) = c_5 s(db)$, где $0 \leq c_4$ и $0 < c_5$ не зависят от α , причем $c_3(\alpha) = \sqrt{c_4 + c_5 \alpha}$. Далее, $s(0) = -\infty$. В самом деле,

если бы было $s(0) > -\infty$, то мы получили бы или

$$0 = \kappa(0) g_1(0) + (\mathfrak{G}^* g_1)(0) = [\kappa(0) + \alpha] g_1(0),$$

или

$$\begin{aligned} 0 &= k(0) g_1(0) - g_1^+(0) + m(0) (\mathfrak{G}^* g_1)(0) = \\ &= [k(0) - \sqrt{c_4 + c_5 \alpha} + \alpha m(0)] g_1(0), \end{aligned}$$

что противоречит тому, что $g_1(0) > 0$. Так же доказывается, что $s(1) = +\infty$; и теперь \mathfrak{G}^* заменой шкалы приводится к виду $\mathfrak{G}^* = D^2/2 - c_6$ ($Q = R^1$, $c_6 = c_4/c_5 \geq 0$).]

Задача 5. Используя спектральное разложение (29b) и уравнение Чепмена—Колмогорова (3), доказать, что

$$p(t, a, b) > 0, (t, a, b) \in (0, +\infty) \times Q^* \times Q^*.$$

$$\left[p(t, a, a) = \int_{-\infty}^{+0} e^{\gamma t} e(\gamma, a) f(d\gamma) e(\gamma, a) > 0 \quad (t > 0, 0 < a < 1), \right.$$

так как

$$e(\gamma, a) f(d\gamma) e(\gamma, a) \geq 0$$

и

$$\int_{-\infty}^{+0} (\alpha - \gamma)^{-1} e(\gamma, a) f(d\gamma) e(\gamma, a) = G(a, a) > 0.$$

Если даны $s > 0$ и $a, b \in Q^*$, такие, что $p(s, a, b) = 0$, то из неравенства $p(s-t, a, a) > 0$ и уравнения Чепмена—Колмогорова

$$p(s, a, b) = \int_{Q^*} p(s-t, a, c) p(t, c, b) m(dc) \quad (t < s)$$

вытекает, что $p(t, a, b) \equiv 0$ ($t < s$). Но $p(t) \equiv p(t, a, b)$ — преобразование Лапласа от некоторой меры и поэтому должно быть тождественно равно 0 при $t > 0$, что противоречит тому, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} p(t) dt = G(a, b) > 0.]$$

Задача 6 (по Карлину и Макгрегору [5]). Рассмотрим пространство точек $c^* \in (0, 1)^n$ ($n \geq 2$), таких, что $c_1 < c_2 < \dots$, и обозначим через $e(t, a^*, b^*)$ при $t > 0$ определитель

$$\begin{vmatrix} p(t, a_1, b_1) & p(t, a_1, b_2) & \dots & p(t, a_1, b_n) \\ p(t, a_2, b_1) & p(t, a_2, b_2) & \dots & p(t, a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(t, a_n, b_1) & p(t, a_n, b_2) & \dots & p(t, a_n, b_n) \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим также совместную траекторию $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots) \in [0, 1]^n$ n независимых частиц, начинающих движение из a^* . Пусть P_{a^*} — соответствующая вероятность, а m пусть будет момент пересечения $\sup \{t: x_1(s) < x_2(s) < \dots, s < t\}$. Если дано такое множество $B^* = B_1 \times B_2 \times \dots \subseteq (0, 1)^n$, что B_1 лежит левее B_2 , B_2 — левее B_3 , ..., то

$$P_{a^*} \{m > t, x(t) \in B^*\} = \int_{B^*} e(t, a^*, b^*) m(db^*),$$

где $m(db^*) = m(db_1) m(db_2) \dots$. Доказать это непосредственно используя следующее равенство:

$$\begin{aligned} a^* \{m > t, x(t) \in B^*\} &= \sum_{\sigma} (\sigma) P_{a^*} \{m > t, x(t) \in \sigma B^*\} = \\ &= \sum_{\sigma} (\sigma) (P_{a^*} \{x(t) \in \sigma B^*\} - P_{a^*} \{m < t, x(t) \in \sigma B^*\}) = \\ &= \int_{B^*} e(t, a^*, b^*) m(db^*) - \sum_{\sigma} (\sigma) P_{a^*} \{m < t, x(t) \in \sigma B^*\}. \end{aligned}$$

Здесь σ — перестановка чисел $1, 2, \dots, n$; $(\sigma) = \pm 1$ в зависимости от того, четна σ или нечетна; а $\sigma B^* = B_{\sigma 1} \times B_{\sigma 2} \times \dots$. Вывести отсюда, что $e(t, a^*, b^*) > 0$ при любом $t > 0$ и любом выборе a^* и b^* (еще об этом см. Карлин и Макгрегор [5]; оригинальный результат в этом направлении содержится у Дж. Поля [1]).

[Так как $P_{a^*} \{m > t, x(t) \in \sigma B^*\} = 0$, если только σ не тождественная перестановка, то равенство $P_{a^*} \{m > t, x(t) \in B^*\} = \int_{B^*} e m(db^*) - \sum_{\sigma} (\sigma) P_{a^*} \{m < t, x(t) \in \sigma B^*\}$ очевидно. Ясно также,

что совместное движение начинается заново в момент m . Но перестановка, которая меняет местами две из совпадающих частиц, нечетна и не оказывает влияния на будущее движение; поэтому

$$\sum_{\sigma} (\sigma) P_{a^*} \{m < t, x(t) \in \sigma B^*\} = 0,$$

и остается $P_{a^*} \{m > t, x(t) \in B^*\} = \int_{B^*} e m(db^*)$, что и нужно было доказать. Далее, ясно, что $e(t, a^*, b^*) \geq 0$. Применяя уравнение Чепмена—Колмогорова $e(t, a^*, b^*) = \int e(t-s, a^*, c^*) e(s, c^*, b^*) m(dc^*)$ к $a^* = b^*$ и используя то, что $e(t, a^*, b^*) = e(t, b^*, a^*)$, получаем, что $e(t, a^*, a^*) > 0$ при любом $t > 0$ (если это не так, то

$e(t/2, a^*, \dots) \equiv 0$ и $P_a \cdot \{m > t/2\} = 0$, что невозможно). Если даны t, a^*, b^* такие, что $e(t, a^*, b^*) = 0$, то, применяя еще раз уравнение Чепмена—Колмогорова, получаем $e(t-s, a^*, a^*) \cdot e(s, a^*, b^*) = 0$ ($s < t$), т. е. $e(s, a^*, b^*) = 0$ ($s < t$). Поэтому $e(s, a^*, b^*) \equiv 0$ ($s > 0$), как преобразование Лапласа от некоторой меры (со знаком). Но для $t > 0$ имеем $0 < e(t, \cdot, \cdot)$ вблизи диагонали $a^* = b^*$. С помощью леммы Гейне—Бореля выбираем цепочку c_1^*, c_2^*, \dots из $l < +\infty$ точек, ведущую из a^* в b^* , для которой $0 < e(t, c_1^*, c_2^*), e(t, c_2^*, c_3^*), \dots$. Применяя в последний раз уравнение Чепмена—Колмогорова, получаем $e(lt, a^*, b^*) > 0$, что противоречит тому, что $e(\cdot, a^*, b^*) \equiv 0$. Доказательство закончено.]

Задача 7. Проверить, что

$$tG(t^{-1}, \xi, \xi) \geq p(t, \xi, \xi), \quad t > 0.$$

[Функция $p(t, \xi, \xi)$ выпукла вниз по t , поэтому

$$\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} p(t, \xi, \xi) dt > p\left(\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t dt, \xi, \xi\right) = p(\alpha^{-1}, \xi, \xi).]$$

Задача 8. Диффузия D невозвратна тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} G(a, b) = \int_0^{+\infty} p(t, a, b) dt < +\infty, \quad a, b \in Q^*.$$

(Определение невозвратности см. в задаче 4.4.4.)

[Поскольку расстояние по шкале между двумя точками $a < b$ из Q^* конечно, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \lim_{\alpha \downarrow 0} G(\xi, \xi)^{-1} s(d\xi) &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_a^b \frac{B}{g_1 g_2} s(d\xi) = \\ &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_a^b \left(\frac{g_1^+}{g_1} - \frac{g_2^+}{g_2} \right) s(d\xi) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \ln \frac{g_1(b)}{g_1(a)} \frac{g_2(a)}{g_2(b)} = \\ &= -\ln [P_a \{m_b < +\infty\} P_b \{m_a < +\infty\}]. \end{aligned}$$

Далее используйте решение задачи 4.4.4 и тот факт, что график функции G имеет форму двускатной крыши, причем величина излома на ее ребре не превосходит $B^{-1} \cdot [g_1^+ g_2 - g_1 g_2^+] = 1$.

Задача 9. Вычислить $\lim_{\alpha \downarrow 0} G(a, b)$ в невозвратном случае.

$$[\lim_{\alpha \downarrow 0} G(a, b) = \lim_{\alpha \downarrow 0} G(b, a) = h_1(a) h_2(b), a \leq b;$$

$$0 < h_1 \in \uparrow, 0 < h_2 \in \downarrow, h_1^+ h_2 - h_1 h_2^+ \equiv 1;$$

$$(\mathfrak{G}^* h_1)(\xi) = 0 \quad (0 \leq \xi < 1),$$

$$(\mathfrak{G}^* h_2)(\xi) = 0 \quad (0 < \xi \leq 1).]$$

Задача 10. Вычислить в консервативном случае

$$E_\xi(m^n), 0 < a < \xi < b < 1, m = m_a \wedge m_b.$$

Использовать решение задачи 9.

[Рассмотрим (невозвратную) остановленную диффузию

$$[x(t \wedge m): t \geq 0, P_\xi(B): a \leq \xi \leq b]$$

с производящим оператором \mathfrak{G} и операторами Грина $G_\alpha f =$
 $= E. \left[\int_0^m e^{-\alpha t} f(x) dt \right]$. Функция $u = 1 - E. (e^{-\alpha m})$ является решением задачи

$$(\alpha - \mathfrak{G})u(\xi) = \alpha \quad (a < \xi < b), u(a+0) = u(b-0) = 0;$$

поэтому $u = G_\alpha 1$. Так как $G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta = 0$ ($\alpha, \beta > 0$), то

$$E. (m^n) = - \lim_{\alpha \downarrow 0} (-1)^n \frac{\partial^n u}{\partial \alpha^n} = \lim_{\alpha \downarrow 0} n! [-\alpha G_\alpha^{n+1} 1 + G_\alpha^n 1] = n! G_{+0}^n 1.$$

Здесь G_{+0} — оператор Грина, соответствующий функции Грина

$$\frac{[s(\xi) - s(a)][s(b) - s(\eta)]}{s(b) - s(a)}, a < \xi \leq \eta < b.]$$

Задача 11. Пусть дана возвратная несингулярная диффузия, и пусть e — такая неотрицательная мера, определенная на Q^* , что

$$\int e(da) P_\alpha \{x(t) \in B\} = e(B) \quad (t > 0, B \subseteq Q^*);$$

тогда e на Q^* пропорциональна m (другое решение и дополнительные сведения см. у Г. Маруяма и Х. Танака [1]; см. также § 8.2).

[Так как $\int e(da) p(t, a, b) m(db) = e(db)$ ($t > 0, db \subset Q^*$), то функция $f \equiv de/dm$ удовлетворяет уравнению $G_\alpha f = f/\alpha$. Но тогда $\mathfrak{G}^* f = 0$ на Q^* , что показывает, что $f^+ = \text{const}$. То, что $f = \text{const}$, следует из того, что $f \geq 0$, если $s(0) = -\infty$ и $s(1) = +\infty$; из того, что $f^+(0) = (\mathfrak{G}^* f)(0) m(0)$, если $s(0) > -\infty$; и из того, что $-f^-(1) = (\mathfrak{G}^* f)(1) m(1)$, если $s(1) < +\infty$ (см. задачу 4.6.6).]

Задача 12. Пусть дана консервативная несингулярная диффузия, для которой $P_0\{m_{+0}=0\}=1$, и пусть $p(t, b)$ — плотность распределения момента первого достижения $\frac{\partial}{\partial t} P_0\{m_b < t\}$ [см. (32), (33), (34)]. Если $0 < h(t) \in \uparrow(t > 0)$ и $\lim_{t \downarrow 0} P_0\{m_{h(t)} \leq t\} = 0$, то из условия $\int_{+0} p(t, h) dt < +\infty$ следует, что $P_0\{x(t) < h(t), t \downarrow 0\} = 1$ (см. частный случай в § 1.8). По всей вероятности из условия $\int_{+0} p(t, h) dt = +\infty$ следует, что $P_0\{x(t) \geq h(t) \text{ бесконечное число раз при } t \downarrow 0\} = 1$, но доказательство этого нам неизвестно.

4.12. Критерий Колмогорова

В этом параграфе мы выведем критерий Колмогорова для одномерного броуновского движения (см. § 1.8), пользуясь изящным методом, принадлежащим М. Мотоо [1].

Рассмотрим возвратную несингулярную диффузию на $Q = [0, +\infty)$ со шкалой $s(-\infty < s(0) < s(+\infty) = +\infty)$, мерой скорости $m(m(Q) < +\infty)$, траекториями $w: t \rightarrow x(t)$ и вероятностями $P_a(B)$. Пусть $e_1 < e_2 < \dots$ — последовательные моменты прихода в точку a через точку $b > a$.

Из условия $m(Q) < +\infty$ следует, что

$$\gamma = E_a(e_1) < +\infty. \quad (1)$$

Действительно, используя формулу (4.2.28) и задачу 4.5.1, получаем

$$\begin{aligned} E_a(e_1) &= E_a(m_b) + E_b(m_a) = \\ &= \int_a^b s[a \vee \xi, b] m(d\xi) + \int_a^b s(a, b \wedge \xi] m(d\xi) = \\ &= [s(b) - s(a)] m(Q) < +\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку отрезки траектории $x(t): e_{n-1} \leq t < e_n$ независимы и имеют одинаковые распределения, это верно и для разностей $e_n - e_{n-1}$ ($n \geq 2$). Применяя усиленный закон больших чисел, находим

$$P_a\left\{\lim_{n \uparrow +\infty} n^{-1}e_n = \gamma\right\} = 1; \quad (3a)$$

отсюда следует соотношение

$$P_a\left\{\frac{n}{2}\gamma < e_{n-1} < e_n < 2n\gamma, n \uparrow +\infty\right\} = 1. \quad (3b)$$

которым мы будем пользоваться.

Пусть дана функция $h = h(t)$, возрастающая до $+\infty$ вместе с t . Положим $r_n = \max \{x(t) : e_{n-1} \leq t < e_n\}$. Тогда из формул (3) получаем

$$\begin{aligned} & \{w: r_n > h(2n\gamma) \text{ бесконечное число раз}\} \subseteq \\ & \subseteq \{w: r_n > h(e_n) \text{ бесконечное число раз}\} \subseteq \\ & \subseteq \{w: x(t) > h(t) \text{ бесконечное число раз при } t \uparrow +\infty\} \subseteq \\ & \subseteq \{w: r_n > h(e_{n-1}) \text{ бесконечное число раз}\} \subseteq \\ & \subseteq \left\{w: r_n > h\left(\frac{n}{2}\gamma\right) \text{ бесконечное число раз}\right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя вероятностный смысл шкалы s , проверяем, что при $h(n\gamma) > b$

$$\begin{aligned} P_a \{r_n > h(n\gamma)\} &= P_b \{m_{h(n\gamma)} < m_a\} = \frac{s(b) - s(a)}{s(h(n\gamma)) - s(a)} \sim \\ &\sim \text{const} \cdot s[h(n\gamma)]^{-1}, \quad n \uparrow +\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как r_n независимы, то, применяя леммы Бореля—Кантелли, получаем альтернативу:

$$\begin{aligned} P_a \{x(t) > h(t) \text{ бесконечное число раз при } t \uparrow +\infty\} &= \\ &= 0 \text{ или } 1 \text{ в зависимости от того, сходится или расходится} \\ &\text{интеграл } \int_0^{+\infty} s(h)^{-1} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим теперь радиальную часть $\sqrt{x_1(t)^2 + \dots + x_d(t)^2}$: $t \geq 0$ стандартного d -мерного броуновского движения (бесселевское движение см. в § 2.7). Пусть R —его стандартное описание с траекториями $w: t \rightarrow r(t) \in [0, +\infty)$, σ -алгеброй B и вероятностями $P_\cdot(B)$. Покажем, что формулу (6) можно применить к движению $R^* \equiv [r^*(t) = e^{-t}r(e^t - 1)^2: t \geq 0, P_\cdot]$.

Пусть дан марковский момент m^* для движения R^* ; тогда $m = e^{m^*} - 1$ есть марковский момент для R . Введем σ -алгебру

$$\begin{aligned} B_{m^*+0}^* &= \{B^*: B^* \cap \{m^* < s\} \in B\{r^*(t), t \leq s\} \text{ при любом } s \geq 0\} = \\ &= B_{m+0} = \{B: B \cap \{m < s\} \in B\{r(t), t \leq s\} \text{ при любом } s \geq 0\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя тот факт, что при изменении масштаба $r(t) \rightarrow \sqrt{s}r(t/s)$ ($s > 0$) процесс $[r, P_a]$ переходит в $[r, P_{\sqrt{s}a}]$, получаем, что спра-

ведливы следующие равенства (здесь $s = e^{-m^*}$, $a = r(m)$):

$$\begin{aligned} P_{\cdot} \{r^*(t + m^*) \leq b \mid B_{m^*+0}\} &= \\ &= P_{\cdot} \{e^{-(t+m^*)} r(e^{m^*}(e^t - 1) + m)^2 \leq b \mid B_{m^*+0}\} = \\ &= P_a \{e^{-t} s r((e^t - 1)/s)^2 \leq b\} = P_{\sqrt{s}a} \{e^{-t} r(e^t - 1)^2 \leq b\} = \\ &= P_{\sqrt{r^*(m^*)}} \{r^*(t) \leq b\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Короче говоря, R^* — консервативная несингулярная диффузия.

Вычислим ее производящий оператор \mathfrak{G}^* . Если $p(t, a, b)$ — плотность бесселевского движения относительно меры скорости $2b^{d-1}db$ [см. (2.7.3) и (4)], то

$$\begin{aligned} P_a \{r^*(t) \in db\} &= p(e^t - 1, \sqrt{a}, e^{t/2} \sqrt{b}) e^{dt/2} b^{d/2-1} db = \\ &= p(1 - e^{-t}, e^{-t/2} \sqrt{a}, \sqrt{b}) b^{d/2-1} db, \\ (t, a, b) &\in (0, +\infty) \times [0, +\infty)^2. \quad (9) \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} - 2a \frac{\partial^2}{\partial a^2} - (d-a) \frac{\partial}{\partial a} \right] p(1 - e^{-t}, e^{-t/2} \sqrt{a}, \sqrt{b}) &= \\ &= e^{-t} \left[p_1 - \frac{1}{2} p_{22} - \frac{d-1}{2e^{-t/2} \sqrt{a}} p_2 \right] \equiv 0, \\ (t, a, b) &\in (0, +\infty)^3, \quad (10) \end{aligned}$$

и $P_0 \{r^*(t) > 0\} = 1$ при $t > 0$, то получается, что \mathfrak{G}^* — дифференциальный оператор, соответствующий шкале

$$s(b) - s(a) = \int_a^b \xi^{d/2} e^{\xi/2} d\xi, \quad a < b, \quad (11a)$$

и мере скорости

$$\begin{aligned} m[a, b] &= \frac{1}{2} \int_a^b \xi^{(d/2)-1} e^{-\xi/2} d\xi, \quad 0 < a < b; \\ m(0) &= 0; \end{aligned} \quad (11b)$$

причем 0 является границей — входом и

$$u^+(0) = 0, \quad u \in D(\mathfrak{G}^*). \quad (12)$$

Поскольку $s(+\infty) = +\infty$, а $m(Q) < +\infty$, формулу (6) можно применить к R^* . Если перевести (6) на язык бесселевского движения и учесть оценку $s(b) \sim 2b^{-(d/2)} e^{b/2} (b \uparrow +\infty)$, то получится, что

если $h(t) \uparrow +\infty$ вместе с t , а $a > 0$, то

$$\begin{aligned} P_a \{r(t) > \sqrt{t+1} h(t+1) \text{ бесконечное число раз при } t \uparrow +\infty\} = \\ = P_a \{r^*(t) > h(e^t)^2 \text{ бесконечное число раз при } t \uparrow +\infty\} = \\ = 0 \text{ или } 1 \text{ в зависимости от того, сходится или расходится} \\ \int_0^{+\infty} h(t)^d e^{-h(t)^2/2} \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (13)$$

Что касается интересующей нас вероятности, то

$$\begin{aligned} P_0 \{r(t) > \sqrt{t} h(t) \text{ бесконечное число раз при } t \uparrow +\infty\} = \\ = \int_0^{+\infty} P_0 \{r(1) \in d\xi\} P_\xi \{r(t) > \sqrt{t+1} h(t+1) \text{ бесконечное} \\ \text{число раз при } t \uparrow +\infty\} = 0 \text{ или } 1 \text{ в зависимости от того,} \\ \text{сходится или расходится} \int_0^{+\infty} h^d e^{-h^2/2} \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (14)$$

При $d=1$ это критерий Колмогорова; а при $d \geq 2$ — критерий Дворецкого — Эрдеша (см. А. Дворецкий и П. Эрдеш [1]).

Тем же методом получаем, что если $0 < h(t) \downarrow 0$ при $t \uparrow +\infty$, то

$P_0 \{r(t) < \sqrt{t} h(t) \text{ бесконечное число раз при } t \uparrow +\infty\} = 0 \text{ или } 1$
в зависимости от того, сходится или расходится

$$\int_0^{+\infty} |\ln h|^{-1} \frac{dt}{t} \quad (d=2); \quad \int_0^{+\infty} h^{d-2} \frac{dt}{t} \quad (d \geq 3). \quad (15)$$

Поскольку P_0 не меняется при преобразовании $x(t) \rightarrow tx(1/t)$, из формулы (15) следует, что если $0 < h(t) \downarrow 0$ при $t \downarrow 0$, то

$P_0 \{r(t) < \sqrt{t} h(t) \text{ бесконечное число раз при } t \downarrow 0\} = 0 \text{ или } 1$
в зависимости от того, сходится или расходится

$$\int_{+0} |\ln h|^{-1} \frac{dt}{t} \quad (d=2); \quad \int_{+0} h^{d-2} \frac{dt}{t} \quad (d \geq 3) \quad (16)$$

(для случая $d \geq 3$ см. А. Дворецкий и П. Эрдеш [1], а для $d=2$ см. Ф. Спитцер [1]; в задаче 7.11.2 мы дадим другой метод, приводящий к более грубому результату).

Задача 1. Дать полное доказательство формулы (15).

ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ И УБИВАНИЕ

5.1. Построение траекторий. Общий обзор

Пусть дана одномерная диффузия, сингулярная или несингулярная. У нас есть полное описание ее производящего оператора \mathfrak{G} . Оператор \mathfrak{G} совпадает на своей области определения с дифференциальным оператором \mathfrak{G}^* порядка не более 2, выраженным через *инварианты* (шкалу, меру скорости и т. д.) при помощи формул (4.1.8) [или (4.1.31)—(4.1.33)]; причем каждый инвариант имеет простой вероятностный смысл, выражаемый формулами (4.1.7) [или (4.1.22), (4.1.23b), (4.1.23c) и (4.1.26)].

Но оказывается, дело обстоит еще лучше, *а именно*: любому выбору инвариантов отвечает дифференциальный оператор, определяемый по формулам (4.1.8) [или (4.1.31)—(4.1.33)], а оператор \mathfrak{G}^* порождает несингулярную (или сингулярную) диффузию, причем первоначально заданные инварианты выражаются через эту диффузию по формулам (4.1.7) [или (4.1.22), (4.1.23b), (4.1.23c) и (4.1.26)]. Коротко говоря, *между дифференциальными операторами \mathfrak{G}^* и несингулярными или сингулярными диффузиями устанавливается взаимно однозначное соответствие*.

Доказательству этого факта посвящена вся эта глава, кроме настоящего параграфа, где дается сперва грубое изложение ведущих идей (замена времени, исчезновение, конструкция переноса) на ряде частных, но типичных примеров.

Начнем с простейшего случая. Пусть D —стандартное броуновское движение с траекториями $t \rightarrow x(t)$, а $\sigma > 0$ —постоянная. Тогда диффузии, связанной с оператором $\mathfrak{G}^*u = \sigma^2 u''/2$, можно дать нестандартное описание, в котором она будет рассматриваться как броуновское движение с измененным масштабом: $x^* = \sigma x$, а можно принять $x^*(t) = x(\sigma^2 t)$: $t \geq 0$; это приведет к тому же распределению.

Теперь предположим, что $0 < \sigma$ —непрерывная, но не постоянная функция.

При первом способе построения диффузии мы исходим из предположения, что x^* вблизи точки $x^* = \xi$ будет похоже на $\sigma(\xi)x$; т. е.

$$x^*(t) = a + \int_0^t \sigma[x^*(s)] dx, \quad a = x^*(0); \quad (1)$$

это идея работы К. Ито [2]. Но для того чтобы работать с общей несингулярной диффузией, лучше второй способ построения. Согласно ему, x^* — это стандартное броуновское движение, которое совершается в новом времени $t^* = t^*(t)$, причем это время растет, как $\sigma^2(\xi)t$, когда x^* находится вблизи ξ ; т. е.

$$dt^* = \sigma^2(x^*) dt \quad (2a)$$

или, что то же,

$$dt = \sigma^{-2}(x^*) dt^* = \sigma^{-2}[x(t^*)] dt^*. \quad (2b)$$

Формула (2b) означает, что t^* является обратной функцией f^{-1} от аддитивного функционала $f(t) = \int_0^t \sigma^{-2}[x(s)] ds$. Если заметить,

что $\int_0^t \sigma^{-2}(x) ds = \int t(t, \xi) m(d\xi)$, где t — стандартное броуновское локальное время, а $m(d\xi) = 2\sigma^{-2}(\xi) d\xi$ — мера скорости для \mathcal{G}^* , то отсюда уже один шаг до предположения, что (нестандартное) описание диффузии на $Q = R^1$, связанной с оператором

$$\mathcal{G}^*u = \frac{u^+(d\xi)}{m(d\xi)}, \quad (3)$$

задается формулой

$$x^*(t) = x(f^{-1}), \quad (4a)$$

где

$$f = \int t dm. \quad (4b)$$

(Доказательство см. в § 5.2.)

Так как замена времени $t \rightarrow f^{-1}$ зависит от броуновской траектории, ее называют *случайной заменой времени*. Эта идея появляется у Дж. Ханта [2 (2)]; намек на нее содержится в работе П. Леви [3: 276]. Возможность использования этой идеи была нам подсказана Г. Троттером, а Волконский [1] получил такие случайные замены времени, но не выразил f в виде интеграла от локальных времен. По поводу случайных замен времени см. также § 8.3.

В качестве другого поучительного примера приведем пример несингулярной диффузии на луче $[0, +\infty)$ с производящим оператором

$$\mathcal{G}^*u = \frac{u^+(d\xi)}{m(d\xi)}; \quad (5a)$$

$$m(0)(\mathcal{G}^*u)(0) = u^+(0). \quad (5b)$$

Здесь также можно применить метод замены времени с функционалом

$$f = \int_0^t t(t, \xi) m(d\xi). \quad (6)$$

Частный случай такой замены времени рассматривался в § 2.11 для броуновского движения с отражением.

Теперь объясним, как строится несингулярная диффузия с убыванием, связанная с оператором

$$\mathfrak{G}^* u = \frac{u^+(d\xi) - u(\xi) k(d\xi)}{m(d\xi)} \quad (7)$$

на $Q = R^1$. Предположим сначала, что k имеет постоянную плотность $\kappa \geq 0$ относительно m , так что $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G} - \kappa$, где \mathfrak{G} задается формулой (3). Тогда x^* — это движение x , которое мы убиваем (т. е. посылаем в дополнительное состояние ∞) после экспоненциального времени m_∞ с распределением

$$P. \{m_\infty > t \mid x\} = e^{-\kappa t}. \quad (8)$$

Это позволяет предположить, что если плотность κ непрерывна, но не постоянна, то вероятность того, что частица, совершающая движение D^* вдоль траектории движения D , не исчезнет до момента t , должна быть равна¹⁾

$$\bigcap_{s \leq t} [1 - \kappa[x(s)]] ds = e^{-\int_0^t \kappa[x(s)] ds}. \quad (9)$$

Из замены времени (4) можно вывести, что существуют локальные времена

$$t(t, a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{\text{mes} \{s: a \leq x(s) < b, s \leq t\}}{m[a, b]} \quad (10)$$

(см. § 5.4); поэтому выражение (9) можно переписать, используя интеграл от локального времени:

$$\int_0^t \kappa[x(s)] ds = \int t(t, \xi) k(d\xi). \quad (11)$$

Учитывая эту формулу, мы можем предположить, что для произвольной убывающей меры $k(db)$ движение D^* совпадает по распределению с движением D , подвергнутым уничтожению (посылке в ∞)

¹⁾ Под \bigcap понимается непрерывное произведение.

в момент m_∞ с условным распределением

$$P\{m_\infty > t \mid x\} = e^{-\int_0^t dk}. \quad (12)$$

Доказательству этого посвящен § 5.6. Читатель легко поверит, что между движением на луче $[0, +\infty)$ с производящим оператором (5) и движением, связанным с оператором

$$\mathfrak{G}^*u = \frac{u^+(d\xi) - u(\xi)k(d\xi)}{m(d\xi)}; \quad (13a)$$

$$m(0)(\mathfrak{G}^*u)(0) = u^+(0) - u(0)k(0), \quad (13b)$$

та же самая связь, за исключением того, что в формуле (12) используется интеграл от локального времени $\int_0^t dk$ (см. § 5.6;

простейший частный случай этого — броуновское движение с эластичным экраном, рассмотренное в § 2.3).

Приведем пример, в котором видны все основные черты консервативного случая. Пусть \mathfrak{G}^* — дифференциальный оператор

$$(\mathfrak{G}^*u)(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} u''(a), & a \in Q; \\ \lim_{b \downarrow a} \frac{u(b) - u(a)}{s_+(b) - s_+(a)}, & a \in [0, 1] \setminus Q; \\ 0, & a = 1, \end{cases} \quad (14)$$

где $Q = \bigcup_{n \geq 1} (l_n, r_n)$ — смежные интервалы стандартного канторова множества K , а s_+ — шкала переноса:

$$s_+(b) = \sum_{l_n \leq b} (r_n \wedge b - l_n) + s_+([0, b] \cap K), \quad (15)$$

причем подразумевается, что

$$u^+(l_n) = 0 \quad (n \geq 1); \quad (16a)$$

$$\mathfrak{G}^*u \in C[0, 1], \quad u \in D(\mathfrak{G}^*). \quad (16b)$$

Траекторию x^* можно построить из броуновских движений на лучах $[l_n, r_n)$ с отражением в l_n , если их составить конец к концу и замедлить прохождение траектории через канторово множество так, чтобы для траекторий, начинающихся в точке $0 \leq a \leq 1$, было

$$s_+([a, b] \cap K) = \text{mes}\{s: x^*(s) \in K, s \leq t\}, \quad b = x^*(t), \quad t \leq m_1^*. \quad (17)$$

Проще всего сделать это так: взять броуновское движение x на $[0, +\infty)$ с отражением в 0 и остановкой в 1 и произвести замену

времени $t \rightarrow \bar{t}^{-1}$, где

$$\bar{f}(t) = \sum_{a < r_n} \text{mes} \{s: l_n < x(s) < r_n, s \leq t \wedge m_{r_n}\} + s_+([a, b) \cap K),$$

$$a = x(0), b = a \vee x(t), m_{r_n} = \min \{t: x(t) = r_n\}. \quad (18)$$

Доказательство этого будет дано в § 5.10 и задачах 5.10.1 и 5.10.2; см. также § 5.11 по поводу того, как устраивается уничтожение на точках переноса.

Чтобы получить модель с траекториями для оператора $\mathcal{G}^* = D^2/2 + \kappa$ ($\kappa > 0$), вместо уничтожения вводится созидание; эта модель развивается в § 5.12—5.15.

5.2. Замены времени. $Q = R^1$

Пусть дано стандартное броуновское движение на $Q = R^1$ со шкалой $s(db) = db$ и локальными временами $t = t(t, b)$; пусть $m(db)$ — какая-то мера скорости на R^1 . Докажем, что если \bar{f}^{-1} — обратная функция к

$$\bar{f}(t) = \bar{f}(t, w) = \int_{R^1} t(t, b) m(db), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

то $[x(\bar{f}^{-1}), P.]$ — (нестандартное) описание консервативной диффузии с той же шкалой, что у броуновского движения, и мерой скорости m , т. е. с производящим оператором

$$\mathcal{G}^* u = \frac{u^+(db)}{m(db)}. \quad (2)$$

Поскольку $t(t, b)$ принадлежит $C([0, +\infty) \times R^1)$ и обращается в 0 вне интервала

$$\min_{s \leq t} x(s) < b < \max_{s \leq t} x(s) \quad (t > 0),$$

имеем

$$\bar{f}(t \pm 0) = \bar{f}(t) < +\infty, \quad t \geq 0; \quad (3a)$$

в частности,

$$\bar{f}(+0) = 0. \quad (3b)$$

Так как $t(t_2, b) > t(t_1, b)$ ($t_2 > t_1$) на множестве точек b , мера скорости которого положительна, и $t(+\infty, \cdot) \equiv +\infty$ (см. задачу 2.8.7), то

$$\bar{f}(t_2) > \bar{f}(t_1) \quad (4a)$$

и

$$\bar{f}(+\infty) \equiv +\infty. \quad (4b)$$

Отсюда следует, что функция f^{-1} обладает теми же свойствами; в частности, траектория $x(f^{-1})$ непрерывна.

Теперь пусть $w: t \rightarrow x^*(t)$, B_i^* , B^* и $P_a(B^*) = P_a\{x(f^{-1}) \in B^*\}$ — траектории, σ -алгебры и вероятности, дающие стандартное описание движения $D^* = [x(f^{-1}), P.]$; пусть $w^{-1}: t \rightarrow x^{-1}(t)$ обозначает траекторию $x(f^{-1})$. Докажем простое марковское свойство для D^* .

Пусть дано множество $B^* \in B_i^*$ с характеристической функцией $e^*(w^*)$; тогда функция $e(w) \equiv e^*(w^{-1})$ измерима относительно $B_{f^{-1}(t)+0}$.

Согласно лемме Гальмарино (см. § 3.2), достаточно показать, что если

$$f^{-1}(t, u) < s; \quad (5a)$$

$$x(\theta, u) = x(\theta, v), \quad \theta \leq s, \quad (5b)$$

то

$$e(u) = e(v). \quad (6)$$

Но если $\theta \leq t$, то из (5a) следует, что $f^{-1}(\theta, u) \leq s$, а из (5b) — что $f^{-1}(\theta, u) = f^{-1}(\theta, v)$, так как $f^{-1}(\theta)$ — марковский момент. Отсюда получаем

$$x(\theta, u^{-1}) = x(f^{-1}(\theta, u), u) = x(f^{-1}(\theta, v), v) = x(\theta, v^{-1}), \quad \theta \leq t. \quad (7)$$

Это равенство вместе с тем фактом, что $e^*(w^*)$ — характеристическая функция множества из B_i^* , позволяет нам заключить, что

$$e(u) = e^*(u^{-1}) = e^*(v^{-1}) = e(v), \quad (8)$$

что и требовалось доказать.

Далее, отсюда вытекает, что если B^* , e^* и e обозначают то же, что и выше, то

$$\begin{aligned} P: \{B^*, x^*(t+s) \in db\} &= E. \{e^*(w^{-1}), x^{-1}(t+s) \in db\} = \\ &= E. \{e(w), x(f^{-1}(t+s)) \in db\} = E. \{e(w), x(m + f^{-1}(s, w_m^+)) \in db\} = \\ &= E. \{e(w), P. \{x[f^{-1}(s, w_m^+), w_m^+] \in db \mid B_{m+0}\}\} = \\ &= E. \{e(w), P_{x(m)} \{x[f^{-1}(s)] \in db\}\} = \\ &= E. \{e^*(w^{-1}), P_{x^{-1}(t)} \{x^*(s) \in db\}\} = E: \{B^*, P_{x^*(t)} \{x^*(s) \in db\}\}. \end{aligned} \quad (9)$$

(Здесь $m = f^{-1}(t)$.) Этим простое марковское свойство доказано.

Что касается строгого марковского свойства, то теперь достаточно (см. § 3.6) показать, что операторы Грина

$$G_\alpha f = E: \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x^*) dt \right] = E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x^{-1}) dt \right] \quad (10)$$

отображают $C(R^1)$ в себя (другое доказательство содержится в задачах 2 и 3 ниже).

Пусть $a < b$; если $f \in C(R^1)$, $u = G_a^* f$ и $m = m_b$, то

$$f^{-1}(t + f(m)) = m + f^{-1}(t, \omega_m^+); \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u(a) &= E_a \left[\int_0^{f(m)} e^{-\alpha t} f(x^{-1}) dt \right] + \\ &+ E_a \left[e^{-\alpha f(m)} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f[x(f^{-1}(t, \omega_m^+), \omega_m^+)] dt \right] = \\ &= E_a \left[\int_0^{f(m)} e^{-\alpha t} f(x^{-1}) dt \right] + E_a [e^{-\alpha f(m)}] u(b). \end{aligned} \quad (12)$$

Полагая в формуле (12) $b \downarrow a$, находим, что из равенства $P_* \{ \lim_{b \downarrow a} f(m) = f(+0) = 0 \} = 1$ вытекает $u(a+0) = u(a)$. Доказательство равенства $u(a-0) = u(a)$ аналогично.

Итак, показано, что $D^* = [x(f^{-1}), P_*]$ — консервативная диффузия. Используя

$$m_b^*(\omega^{-1}) = \min \{ t: x(f^{-1}) = b \} = f(m_b), \quad (13a)$$

а также

$$\begin{aligned} E_\xi [t(m_a \wedge m_b, \eta)] &= G(\xi, \eta), \quad a < \xi, \quad \eta < b; \\ G(\xi, \eta) &= G(\eta, \xi) = \frac{(\xi - a)(b - \eta)}{b - a}, \quad \xi \leq \eta, \end{aligned} \quad (13b)$$

(см. задачу 1), вычисляем выходные вероятности и средние времена выхода

$$\begin{aligned} p_{ba}^*(\xi) &= P_\xi^* \{ m_b^* < m_a^* \} = P_\xi \{ f(m_b) < f(m_a) \} = \\ &= P_\xi \{ m_b < m_a \} = \frac{\xi - a}{b - a}, \quad a < \xi < b; \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} e_{ab}^*(\xi) &= E_\xi^* (m_a^* \wedge m_b^*) = E_\xi [f(m_a) \wedge f(m_b)] = \\ &= E_\xi [f(m_a \wedge m_b)] = E_\xi \left[\int_a^b t(m_a < m_b, \eta) m(d\eta) \right] = \\ &= \int_a^b G(\xi, \eta) m(d\eta), \quad a < \xi < b. \end{aligned} \quad (14b)$$

Отсюда получается, что шкала этого движения является положительным кратным шкалы броуновского движения, а его мера скорости — обратным кратным m , что и требовалось доказать.

Задача 1. Используя формулу для стандартного броуновского локального времени t

$$E_{\xi} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (dt, \eta) \right] = \frac{e^{-\sqrt{2\alpha} |\xi - \eta|}}{2 \sqrt{2\alpha}}, \quad \alpha > 0,$$

дать прямое доказательство соотношений (13b).

[Пусть $m = m_a \wedge m_b$. Имеем

$$\begin{aligned} E_{\xi} [t(m_a \wedge m_b, \eta)] &= \lim_{\alpha \downarrow 0} E_{\xi} \left[\int_0^m e^{-\alpha t} (dt, \eta) \right] = \\ &= \lim_{\alpha \downarrow 0} E_{\xi} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (dt, \eta) - e^{-\alpha m} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (dt, \eta, \omega_m^+) \right] = \\ &= \lim_{\alpha \downarrow 0} E_{\xi} \left[\frac{e^{-\sqrt{2\alpha} |\xi - \eta|} - e^{-\alpha m} e^{-\sqrt{2\alpha} |x(m) - \eta|}}{2 \sqrt{2\alpha}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} E_{\xi} [|x(m) - \eta| - |\xi - \eta|] = \\ &= \frac{1}{2} \left[|a - \eta| \frac{b - \xi}{b - a} + |b - \eta| \frac{\xi - a}{b - a} - |\xi - \eta| \right] = G(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Задача 2. Доказать, что если $m^*(w^*)$ — марковский момент для стандартного описания движения $x(f^{-1})$, то $m(w) = f^{-1}(m^*(w^{-1}), w)$ — марковский момент для стандартного броуновского движения; и если $B^* \in \mathbf{B}_{m^*, +0}$, т. е. $B^* \cap \{m^* < t\} \in \mathbf{B}_t^*$ ($t \geq 0$), то $B \equiv \{w: w^{-1} \in B^*\} \in \mathbf{B}_{m, +0}$, т. е. $B \cap \{m < t\} \in \mathbf{B}_t$ ($t \geq 0$). (Использовать теорему Гальмарино; см. § 3.2.)

Задача 3. Дать прямое доказательство строго марковского свойства движения $x(f^{-1})$ при помощи его стандартного описания, результата задачи 2 и метода, использованного при выводе соотношений (9).

5.3. Замены времени. $Q = [0, +\infty)$

Пусть дана мера скорости $m(db)$ на отрезке $Q \subseteq R^1$ и стандартные броуновские локальные времена t . В § 5.1 утверждалось, что если f^{-1} — обратная функция к $f = \int t dm$, то замена времени $t \rightarrow f^{-1}$ переводит стандартное броуновское движение в (нестандартное) описание диффузии D^* с той же шкалой, что у броуновского движения, и мерой скорости m , т. е. с производящим оператором

$$\mathfrak{G}^* = \frac{u^+(db)}{m(db)}. \quad (1)$$

Мы проверили случай $Q = R^1$; здесь будут рассмотрены случаи

$$Q = [0, +\infty), \quad \int_{+0}^1 \xi \, dm = +\infty; \quad (2a)$$

$$Q = [0, +\infty), \quad m(0, 1) = +\infty, \quad \int_{+0}^1 \xi \, dm < +\infty; \quad (2b)$$

$$Q = [0, +\infty) \quad m(0, 1) < +\infty; \quad (2c)$$

случай $Q = [0, 1]$ оставляется читателю. В случае (2a) граница 0 не является ни *выходом*, ни *входом*. В случае (2b) 0 есть *выход*, но не *вход*. В случае (2c) 0 — и *выход*, и *вход*, и нужно различать две возможности в соответствии с тем,

$$(\mathfrak{G}'u)(0) \equiv 0 \quad (3a)$$

или

$$m(0)(\mathfrak{G}'u)(0) = u^+(0), \quad 0 \leq m(0) < +\infty. \quad (3b)$$

Наше утверждение состоит в следующем. Положим по определению

$$m(0) = +\infty \text{ в случае (3a);} \quad (4)$$

$$\bar{f}(t) = \int_{+0}^t \bar{t}(t, \xi) m(d\xi) \text{ в случаях (2a) и (2b);} \quad (5a)$$

$$\bar{f}(t) = \int_{-0}^t \bar{t}(t, \xi) m(d\xi) \text{ в случае (2c) = (3),} \quad (5b)$$

причем будем считать $0 \cdot (+\infty) = 0$. Если

$$\bar{f}^{-1}(t) \equiv \max \{s: \bar{f}(s) = t\}, \quad (6)$$

то движение $[x(\bar{f}^{-1}), P_a: a \geq 0]$ является (нестандартным) описанием диффузии D^* с производящим оператором \mathfrak{G}' .

Пусть дана броуновская траектория, начинающаяся в луче $[0, +\infty)$. Посмотрим, как устроено $\bar{f} = \int_0^{+\infty} \bar{t} \, dm$.

Как мы увидим,

$P_t \{\bar{f}(m_0) < +\infty\} = 0$ или 1 в зависимости от того, расходится

$$\text{или сходится интеграл } \int_0^1 \xi \, dm \quad (l > 0), \quad (7a)$$

и

$P_l \{f(m_1) < +\infty\} = 0$ или 1 в зависимости от того, $m[0, 1) = +\infty$ или $m[0, 1) < +\infty$ ($1 > l \geq 0$). (7b)

Если предположить, что это доказано, то основные свойства f и $f^{-1}(t)$ можно описать следующим образом:

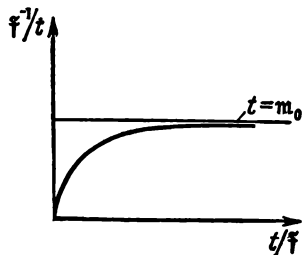
в случае (2a) f непрерывно ($t < m_0$), $f(t_1) < f(t_2)$ ($t_1 < t_2 < m_0$), $f(m_0) = +\infty$; f^{-1} непрерывно ($t \geq 0$), $f(f^{-1}) = t$ ($t \geq 0$), $f^{-1} < m_0$ ($t \geq 0$) и $f^{-1}(+\infty) = m_0$ (см. рис. 1);

в случаях (2b) и (3a) — то же самое, но здесь

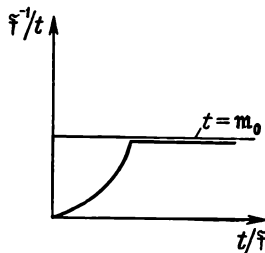
$$\begin{aligned} f(m_0) < +\infty, \quad f(m_0 + 0) &= +\infty; \quad f(f^{-1}) = t \wedge f(m_0), \\ f^{-1}(t) < m_0 (t < f(m_0)) \quad \text{и} \quad f^{-1}(t) &= m_0 (t > f(m_0)) \end{aligned}$$

(см. рис. 2);

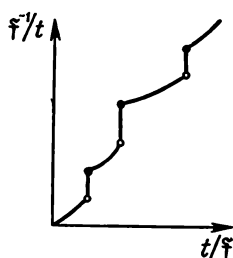
в случае (3b) f непрерывно ($t \geq 0$), $f(t_1) < f(t_2)$ ($t_1 < t_2$) в пределах каждой броуновской экскурсии $x(t): t \in \mathcal{Z}_n^+ (\cup_{n \geq 1} \mathcal{Z}_n^+ \equiv \{t: x_t > 0\})$



Р и с. 1.



Р и с. 2.



Р и с. 3.

в сторону полупрямой $(0, +\infty)$; f постоянно в пределах каждой экскурсии $x(t): t \in \mathcal{Z}_n^- (\cup_{n \geq 1} \mathcal{Z}_n^- \equiv \{t: x_t < 0\})$ в сторону $(-\infty, 0)$; $f^{-1}(t) = f^{-1}(t+0) < +\infty$ ($t \geq 0$), $f(f^{-1}) = t$ ($t \geq 0$) и $x(f^{-1})$ непрерывно (см. рис. 3).

Докажем утверждение (7a).

Пусть дана броуновская траектория, начинающаяся в точке $l > \varepsilon > 0$. Тогда $m_\varepsilon^* = f(m_\varepsilon)$ имеет такое же распределение, как момент первого достижения точки ε для диффузии на R^1 с той же шкалой, что у броуновского движения, и мерой скорости $m^* = m$ на $[\varepsilon, +\infty)$ (см. § 5.2). Поэтому $E_l[e^{-\alpha m_\varepsilon^*}] = g_2(l)/g_2(\varepsilon)$, где g_2 — убывающее решение уравнения $g^+(d\xi)/m(d\xi) = \alpha g(\xi)$ ($\xi > 0$).

А так как

$$g_2(+0) = +\infty \text{ или } < +\infty \text{ в зависимости от того,}$$

$$\int_0^1 \xi \, dm = +\infty \text{ или } < +\infty, \quad (8)$$

то $P_t \{f(m_0) = +\infty\} = 1$, если $\int_0^1 \xi \, dm = +\infty$, и $P_t \{f(m_0) < +\infty\} = 1$, если

$$E_t \left[\int_0^t t(m_0, \xi) \, dm \right] = \int_0^1 \xi \, dm < +\infty.$$

Справедливость утверждения (7b) сразу же вытекает из того, что при $t > m_0$ имеем $t(t, \cdot) > 0$ в окрестности 0.

Пусть $t \geq 0$; из соотношения

$$\{w: f^{-1}(t) < s\} = \{w: t < f(s)\}, \quad s \geq 0, \quad (9)$$

вытекает, что $m = f^{-1}(t)$ — марковский момент. Кроме того,

$$f^{-1}(t+s) = m + f^{-1}(s, w_m^+). \quad (10)$$

Действительно, в условиях (2b) и (3a), если $t > f(m_0) (< +\infty)$, то

$$f^{-1}(t+s) = m_0 = f^{-1}(t) = m \quad (11a)$$

(см. рис. 2), а

$$f^{-1}(s, w_m^+) = f^{-1}(s, w_{m_0}^+) \equiv 0. \quad (11b)$$

Во всех остальных случаях

$$f(f^{-1}(t)) = t; \quad (12a)$$

$$f(s+m) = f(m) + f(s, w_m^+) = t + f(s, w_m^+) \quad (12b)$$

(см. рис. 1 и 3) и потому

$$f^{-1}(t+s) = \max \{ \theta: f(\theta) \leq t+s \} = m + \max \{ \theta: f(\theta+m) \leq t+s \} =$$

$$= m + \max \{ \theta: f(\theta, w_m^+) \leq s \} = m + f^{-1}(s, w_m^+), \quad (13)$$

что и требовалось доказать.

После этого мы можем установить, что движение $[x(f^{-1}), P.]$ — консервативная несингулярная диффузия на $[0, +\infty)$ и ее (локальный) производящий оператор \mathcal{G}^* можно вычислить на $(0, +\infty)$ точно так же, как в § 5.2. Новым является только вычисление производящего оператора в 0, для которого достаточно заметить,

что во всех случаях, кроме (3b), выполнено $P_0 \{f^{-1} = x(f^{-1}) \equiv 0\} = 1$; а в случае (3b), применяя формулу Дынкина

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}^* u)(0) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_0(m^*)^{-1} [u(\varepsilon) - u(0)], \\ m^* &= \max \{t: x(f^{-1}) = \varepsilon\}, \end{aligned} \quad (14)$$

и соотношение

$$\begin{aligned} E_0(m^*) &= E_0(f(m_\varepsilon)) = \int_{-0}^{\varepsilon} E_0[t(m_\varepsilon, b)] dm = \\ &= \int_{-0}^{\varepsilon} (\varepsilon - b) dm = \int_0^{\varepsilon} m[0, b] db \quad \begin{cases} \sim \varepsilon m(0) & \text{при } m(0) > 0; \\ = o(\varepsilon) & \text{при } m(0) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

получаем то, что ожидали:

$$(\mathcal{G}^* u)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_0(m^*)^{-1} [u(\varepsilon) - u(0)] = \frac{u^+(0)}{m(0)}, \quad m(0) > 0; \quad (16a)$$

$$u^+(0) = 0, \quad m(0) = 0. \quad (16b)$$

5.4. Локальные времена

Рассмотрим нестандартное описание

$$D^* = [x^* = x(f^{-1}), P], \quad f = \int_Q t dm,$$

общей консервативной несингулярной диффузии на $Q = R^1$ (или $[0, +\infty)$, или $[0, 1]$), со шкалой $s(b) - s(a) = b - a$ через стандартное броуновское движение с траекториями $w: t \rightarrow x(t)$, локальными временами t и вероятностями $P_a(B)$.

У диффузии D^* в каждой точке отрезка Q , не являющейся ловушкой, есть свое *локальное время*:

$$t^*(t, b) = \frac{\text{mes} \{s: x^*(s) \in db, s \leq t\}}{m(db)}; \quad (1a)$$

$$t^*(t, b) = t(f^{-1}(t), b). \quad (1b)$$

Действительно, пусть $f \in C(Q)$ и t меньше, чем момент достижения множества ловушек движением D^* , т. е. $f^{-1}(t)$ меньше, чем момент $f^{-1}(+\infty)$ достижения множества ловушек стандартным

броуновским движением. Тогда

$$\begin{aligned}
 \int_0^t f(x^*(s)) ds &= \int_0^t f(x(\tau^{-1})) ds = \int_0^{\tau^{-1}(t)} f(x(s)) f(ds) = \\
 &= \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k2^{-n} < \tau^{-1}(t)} f(x(k2^{-n})) f[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}) = \\
 &= \lim_{n \uparrow +\infty} \int_Q \sum_{k2^{-n} < \tau^{-1}(t)} f(x(k2^{-n})) t[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}), b) m(db) = \\
 &= \int_Q \int_0^{\tau^{-1}(t)} f(x(s)) t(ds, b) m(db) = \int_Q t(\tau^{-1}(t), b) f(b) m(db), \quad (2)
 \end{aligned}$$

поскольку $t(ds, b)$ не меняется вне множества моментов пребывания $\{s: x(s) = b\}$. Рассматривая первоначальный интеграл как

$$\int_Q \text{mes} \{s: x^*(s) \in db, s \leq t\} f(b),$$

выводим отсюда формулы (1).

Через t^* можно выразить переходные плотности $p^*(t, a, b)$, рассмотренные в § 4.11:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_a[t^*(t, b)] = p^*(t, a, b), \quad (t, a, b) \in (0, +\infty) \times Q^* \times Q^*. \quad (3)$$

Сейчас мы это докажем.

Пусть даны точки $a < b$ из Q^* ; тогда

$$\begin{aligned}
 \gamma &\equiv E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^*(dt, a) \right] = \\
 &= E_a \left[\int_0^{m_b^*} e^{-\alpha t} t^*(dt, a) \right] + E_a(e^{-\alpha m_b^*}) E_b(e^{-\alpha m_a^*}) \gamma. \quad (4a)
 \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\gamma = \frac{E_a \left[\int_0^{m_b^*} e^{-\alpha t} t^*(dt, a) \right]}{1 - E_a(e^{-\alpha m_b^*}) E_b(e^{-\alpha m_a^*})}. \quad (4b)$$

Вводя функцию Грина

$$G^* = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} p^* dt = B^{-1} g_1 g_2, \quad B = g_1^* g_2 - g_1 g_2^*,$$

и полагая $b \downarrow a$, находим, что

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{b \downarrow a} \frac{g_1(b) g_2(a) (b-a)^{-1} E_a \left[\int_0^{m_b^*} e^{-\alpha t^*} (dt, a) \right]}{g_2(b) \frac{g_1(b) - g_1(a)}{b-a} - g_1(b) \frac{g_2(b) - g_2(a)}{b-a}} = \\ &= B^{-1} g_1(a) g_2(a) \lim_{b \downarrow a} (b-a)^{-1} E_a \left[\int_0^{m_b^*} e^{-\alpha t^*} (dt, a) \right] = \\ &= B^{-1} g_1 g_2 = G^*(a, a), \quad (5) \end{aligned}$$

так как (см. задачу 2.8.3)

$$\begin{aligned} E_a \left[\int_0^{m_b^*} (1 - e^{-\alpha t^*}) t^* (dt, a) \right] &\leq E_a [(1 - e^{-\alpha m_b^*}) t^* (m_b^*, a)] \leq \\ &\leq \sqrt{E_a [(1 - e^{-\alpha m_b^*})^2]} \sqrt{E_a [t^* (m_b^*, a)^2]} = \\ &= o(E_a [t^* (m_b^*, a)^2]^{1/2}) = o(b-a) \quad (6a) \end{aligned}$$

и

$$E_a [t^* (m_b^*, a)] = E_a [t (m_b, a)] = b-a. \quad (6b)$$

Но тогда

$$\begin{aligned} E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^*} t^* (dt, b) \right] &= E_a (e^{-\alpha m_b^*}) E_b \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^*} (dt, b) \right] = \\ &= E_a (e^{-\alpha m_b^*}) G^*(b, b) = G^*(a, b). \quad (7) \end{aligned}$$

Обращая преобразование Лапласа и дифференцируя, получаем отсюда сразу формулу (3).

5.5. Подчинение и цепное правило

Пусть дана консервативная несингулярная диффузия D с интервалом состояний Q , траекториями $w: t \rightarrow x(t)$ и вероятностями $P_*(B)$. Тогда другая консервативная несингулярная диффузия D^* называется *подчиненной диффузией* D , если

ее интервал состояний Q^* является частью интервала Q ; (1a)

у этой диффузии та же (естественная) шкала; (1b)

если $l^* = \inf Q^*$ — точка переноса для диффузии D^* , то или

$l = \inf Q$ — точка переноса для D , или $-\infty = l < l^*$; (2a)

если $r^* = \sup Q^*$ — точка переноса для D^* , то или

$r = \sup Q$ — точка переноса для D , или $+\infty = r > r^*$. (2b)

Диффузия D^* подчинена D , если существует замена времени $t \rightarrow \bar{f}^{-1}$, отображающая D на D^* . Заметим, что если точка $l > -\infty$ не является ни входом, ни выходом, то

$$0 > P_a \{ \lim_{t \uparrow +\infty} x(t) = l \}, \quad l < a < r \quad (3)$$

(см. задачу 4.6.7), и никакая замена времени не может этого изменить и заставить процесс $x(\bar{f}^{-1})$ вести себя так, как если бы точка $l^* (> l)$ была точкой переноса.

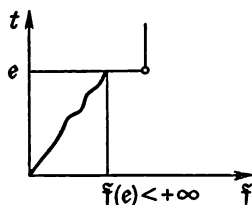


Рис. 1а.

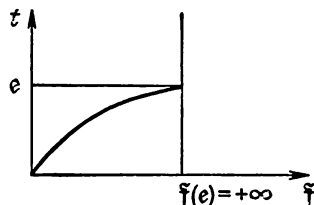


Рис. 1б.

С другой стороны, пусть диффузия D^* подчинена D . Тогда если m^* — мера скорости для D^* , а e — момент достижения траекторией $w: t \rightarrow x(t)$ множества ловушек диффузии D^* , то замена времени $t \rightarrow \bar{f}^{-1}$, где

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} \int_0^t dm^*, & t \leq e; \\ +\infty, & t > e, \end{cases} \quad (4)$$

отображает D на D^* , т. е.

$$P_a^*(B^*) = P_a \{ x(\bar{f}^{-1}) \in B^* \}, \quad a \in Q^*, \quad B^* \in \mathcal{B}^*. \quad (5)$$

Мы докажем это в частном случае

$$Q = [l, +\infty), \quad l \geq -\infty;$$

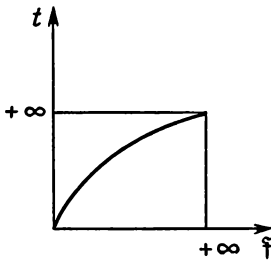
$$Q^* = [l^*, +\infty), \quad l^* \geq -\infty;$$

$$s[a, b) = s^*[a, b) = b - a, \quad b < a.$$

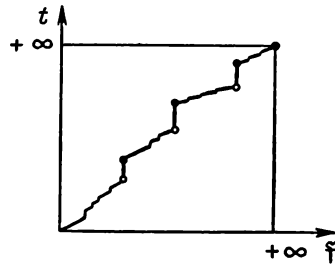
Пусть $l^* > -\infty$, и пусть дана траектория $w: t \rightarrow x(t)$, начинающаяся в точке $x(0) \geq l$. Тогда если l^* — ловушка для D^* , то $e < +\infty$, а \bar{f} имеет такой вид, как на рис. 1а или 1б, в зависимости от того, является точка l^* выходом или нет. Если же l^* — точка переноса для D^* , то точка $l = -\infty$ или $l > -\infty$ является точкой переноса для D . В этом случае \bar{f} имеет такой вид, как на рис. 2а или 2б, в зависимости от того, $l = l^*$ или $l < l^*$.

В обоих случаях совпадение процесса $x(\bar{f}^{-1})$ с D^* устанавливается так же, как в § 5.3.

Что же касается случая $l^* = -\infty$, то при $x(0) > -\infty$ график \bar{f} имеет такой вид, как на рис. 2а. То же верно, если $x(0) = l^* = -\infty$ и эта точка является точкой переноса для D^* , потому что тогда $P_{-\infty}\{m_0 < +\infty\} = 1$ и $E_{-\infty}[\bar{f}(m_0)] = \int_{-\infty}^{-0} |\xi| dm < +\infty$. Если же $x(0) = l^* = -\infty$ и эта точка является ловушкой для D^* , то $\bar{f}(+0) \equiv +\infty$, $x(\bar{f}^{-1}) \equiv -\infty$. Доказательство закончено.



Р и с. 2а.



Р и с. 2б.

Пусть даны две консервативные несингулярные диффузии D_{\pm} , подчиненные D , причем D_- подчинена D_+ . Составим для каждой из них временную шкалу по формуле (4):

$$\bar{f}_{\pm}(t) = \begin{cases} \int_0^t dm_{\pm}, & t \leq e_{\pm}; \\ +\infty, & t > e_{\pm}. \end{cases} \quad (6a)$$

Процесс $x(\bar{f}_{+}^{-1})$ совпадает по распределению с D_+ . Рассмотрим локальные времена $t_+ = t(\bar{f}_{+}^{-1})$ для этой диффузии и положим

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} \int_0^t t_+ dm_-, & t \leq e; \\ +\infty, & t > e, \end{cases} \quad (6b)$$

где e — момент достижения процессом $x(\bar{f}_{+}^{-1})$ ловушек диффузии D_- .

Получаем, что процессы $x(\bar{f}_{-}^{-1})$ и $x[\bar{f}_{+}^{-1}(\bar{f}^{-1})]$ совпадают по распределению с D_- . Это наводит на мысль о том, что имеет место *цепное правило*

$$\bar{f}_{+}^{-1}(\bar{f}^{-1}) \equiv \bar{f}_{-}^{-1}, \quad x(0) \in Q^-. \quad (7)$$

Сейчас мы его выведем.

Поскольку $\theta \leq f^{-1}(t)$ означает то же, что $f(\theta) \leq t$, имеем

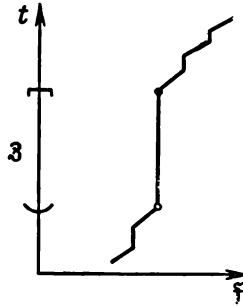
$$f_+^{-1}[f^{-1}(t)] = \max \{s: f_+(s) \leq f^{-1}(t)\} = \max \{s: f[f_+(s)] \leq t\}, \quad (8)$$

и потому достаточно доказать, что $f(f_+) = f_-$.

Пусть $t > 0$; тогда $f_+^{-1}[f_+(t)] = t$, если только f_+ не постоянно на каком-нибудь полуинтервале

$$\mathfrak{J} = (t_1, t_2] \quad (t_1 \leq t < t_2)$$

(см. рис. 3). Такой интервал соответствует экскурсии траектории в $R^1 \setminus Q_+$ или прибытию траектории в момент $t = t_1$ в точку,



Р и с. 3.

являющуюся ловушкой для D_+ . Из отношения подчинения вытекает, что f_- также постоянно на \mathfrak{J} , откуда

$$f_-[f_+^{-1}(f_+(t))] = f_-(t). \quad (9)$$

Учитывая (9), получаем из (6b), что

$$f[f_+(t)] = \begin{cases} f_-[f_+^{-1}(f_+(t))] = f_-(t), & f_+(t) \leq e; \\ +\infty, & f_+(t) > e. \end{cases} \quad (10)$$

Остается доказать, что

$$f_-(t) = +\infty, \text{ если } f_+(t) > e. \quad (11)$$

Но так как $f_+^{-1}(e) \geq e_-$, то $e \geq f_+(e_-)$. Поэтому из $f_+(t) > e$ следует $t > e_-$, откуда получаем $f_-(t) = +\infty$, что нам и было нужно.

5.6. Моменты убывания

Рассмотрим несингулярный дифференциальный оператор

$$(\mathcal{G}^*u)(b) = \frac{u^+(db) - u(b)k(db)}{m(db)},$$

$$u^+(a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{u(b) - u(a)}{b - a}, \quad 0 < b < +\infty, \quad (1)$$

где k и m конечны на замкнутых подинтервалах луча $[0, +\infty)$, причем либо

$$\begin{aligned} (\mathfrak{G}^* u)(0) m(0) &= u^+(0) - u(0) k(0), \\ 0 &\leq k(0), \quad m(0) < +\infty, \end{aligned} \quad (2a)$$

либо

$$(\mathfrak{G}^* u)(0) = \kappa u(0), \quad 0 \leq \kappa < +\infty. \quad (2b)$$

Покажем, каким образом строится соответствующая диффузия. Метод, которым мы пользуемся, можно также применить к случаю самого общего несингулярного оператора, который рассматривался в § 4.7.

Идея состоит в том, чтобы ввести несингулярную консервативную диффузию \mathbf{D} с производящим оператором

$$(\mathfrak{G}u)(b) = \frac{u^+(db)}{m(db)}, \quad 0 < b < +\infty; \quad (3)$$

$$(\mathfrak{G}u)(0) m(0) = u^+(0) \text{ в случае (2a);} \quad (4a)$$

$$(\mathfrak{G}u)(0) = 0 \text{ в случае (2b),} \quad (4b)$$

с траекториями $w: t \rightarrow x(t) \in [0, +\infty)$, σ -алгебрами \mathbf{B} , вероятностями $P_a(B)$ и локальными временами

$$t(t, b) = \frac{\text{mes}\{s: x(s) \in db, s \leq t\}}{m(db)}, \quad b > 0; \quad (5a)$$

$$t(t, 0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\text{mes}\{s: x(s) < \varepsilon, s \leq t\}}{m[0, \varepsilon)} \text{ в случае (2a);} \quad (5b)$$

затем присоединить к его траектории добавочную координату $0 \leq m_\infty \leq +\infty$ и распространить P_\cdot на эту новую координату в соответствии с правилом

$$P_\cdot \{m_\infty > t \mid \mathbf{B}\} = e^{-\mathfrak{f}(t)}, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где

$$\mathfrak{f}(t) = \int_{-0}^{+\infty} t(t, b) k(db) \text{ в случае (2a);} \quad (7a)$$

$$\mathfrak{f}(t) = \int_{+0}^{+\infty} t(t, b) k(db) + \kappa \text{mes}\{s: x(s) = 0, s \leq t\} \text{ в случае (2b).} \quad (7b)$$

После этого, если ввести новые траектории

$$w^\circ: t \rightarrow x^\circ(t) = \begin{cases} x(t), & t < m_\infty; \\ \infty, & t \geq m_\infty, \end{cases} \quad (8)$$

останется только доказать, что $D^* = [x^0, P_0]$ — некоторое (нестандартное) описание диффузии с производящим оператором \mathcal{G}^* .

Описанная в § 2.3 конструкция броуновского движения с эластичным экраном является частным случаем этого способа построения.

Чтобы доказать, что D^* обладает простым марковским свойством, рассмотрим траектории $w: t \rightarrow x^*(t)$, момент убивания $m_\infty = \min \{t: x^* = \infty\}$, σ -алгебры B и вероятности $P_a^*(B^*) \equiv P_a \{w^0 \in B^*\}$, составляющие стандартное описание D^* .

Пусть $s \geq 0$ и $db \subset [0, +\infty)$; тогда

$$\begin{aligned} P_a^*(B^*, x^*(t+s) \in db) &= P_a^*(B^*, x^*(t+s) \in db, m_\infty > t+s) = \\ &= P_a\{B, x(t+s) \in db, m_\infty > t+s\} = \\ &= E_a\{B, x(t+s) \in db, P_a\{m_\infty > t+s | B\}\} = \\ &= E_a\{B, x(t+s) \in db, e^{-t(t+s)}\} = E_a\{B, e^{-t(t)}, x(s, w_t^*) \in db, e^{-t(s, w_t^*)}\} = \\ &= E_a\{B, e^{-t(t)} E_{x(t)}\{x(s) \in db, e^{-t(s)}\}\} = \\ &= E_a\{B, m_\infty > t, P_{x(t)}\{x(s) \in db, m_\infty > s\}\} = \\ &= E_a^*(B^*, P_{x^*(t)}\{x^*(s) \in db\}). \quad (9) \end{aligned}$$

При выводе последнего равенства используется то, что $P_\infty^*\{x^*(s) \in \{0, +\infty)\} = 0$. Доказательство закончено.

Так как операторы Грина

$$\begin{aligned} G_a^* f &= E^* \left[\int_0^{m_\infty} e^{-\alpha t} f(x^*) dt \right] = E. \left[\int_0^{m_\infty} e^{-\alpha t} f(x) dt \right] = \\ &= E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-t} dt \int_0^s e^{-\alpha t} f(x) dt \right] = E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x) dt \int_t^{+\infty} e^{-t} dt \right] = \\ &= E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-t} f(x) dt \right] \quad (10) \end{aligned}$$

отображают $C(R^1)$ в себя (что доказывается таким же методом, как формула (5.2.14)), то D^* есть (несингулярная) диффузия, и остается вычислить ее шкалу s^* , убывающую меру k^* , меру скорости m^* и коэффициент убивания κ , используя вероятностные формулы § 4.4.

Пусть $0 \leq a < b < +\infty$. При $a < \xi < b$ вероятность первого достижения

$$\begin{aligned} p_{ba}^*(\xi) &= P_\xi^*\{m_b^* < m_a^*\} = P_\xi\{m_b < m_a \wedge m_\infty\} = \\ &= E_\xi\{m_b < m_a, e^{-t(m_b)}\} \quad (11) \end{aligned}$$

непрерывна. Замечая, что

$$t(m, \eta), \quad m = m_a \wedge m_b, \quad a < \eta < b,$$

не меняется при заменах времени, выводим из соотношения

$$E_{\xi}[t(m, \eta)] = G(\xi, \eta), \quad a < \xi, \quad \eta < b,$$

$$G(\xi, \eta) = G(\eta, \xi) = \frac{(\xi - a)(b - \eta)}{b - a}, \quad \xi \leq \eta$$

(см. задачу 5.2.1), что

$$\begin{aligned} \int_a^b G(\xi, \eta) p_{ba}^*(\eta) k(d\eta) &= E_{\xi} \left[\int_a^b \left(\int_0^m p_{ba}^*(x_t) t(dt, \eta) \right) k(d\eta) \right] = \\ &= E_{\xi} \left[\int_0^m p_{ba}^*(x_t) t(dt) \right] = \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} E_{\xi} \left[\sum_{l2^{-n} \leq m} p_{ba}^*(x_{l2^{-n}}) t[(l-1)2^{-n}, l2^{-n}] \right] = \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{l \geq 1} E_{\xi} \{ l2^{-n} < m, t[(l-1)2^{-n}, l2^{-n}], \\ E_{x(l2^{-n})} \{ m_b < m_a, e^{-t(m)} \} \} &= \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{l \geq 1} E_{\xi} \{ l2^{-n} < m, t[(l-1)2^{-n}, l2^{-n}], \\ m_b(w_{l2^{-n}}^+) < m_a(w_{l2^{-n}}^+), e^{-t(m(w_{l2^{-n}}^+, w_{l2^{-n}}^+))} \} &= \\ = \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{l \geq 1} E_{\xi} \{ m_b < m_a, e^{-t(m)}, l2^{-n} < m, \\ e^{t(l2^{-n})} t[(l-1)2^{-n}, l2^{-n}] \} &= \\ = E_{\xi} \left\{ m_b < m_a, e^{-t(m)} \int_0^m e^{-t(t)} t(dt) \right\} &= \\ = E_{\xi} \{ m_b < m_a, 1 - e^{-t(m)} \} &= \frac{\xi - a}{b - a} - p_{ba}^*(\xi). \quad (12) \end{aligned}$$

Это означает, что

$$p_{ba}^+(d\xi) = p_{ba}^*(\xi) k(d\xi), \quad a < \xi < b. \quad (13a)$$

Аналогично доказывается, что функция $p_{ab}^*(\xi) = P_{\xi} \{ m_a^* < m_b^* \}$ удовлетворяет уравнению

$$p_{ab}^+(d\xi) = p_{ab}^*(\xi) k(d\xi), \quad a < \xi < b. \quad (13b)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что функция

$$0 < p_{ba}^+(\xi) p_{ab}^*(\xi) - p_{ab}^+(\xi) p_{ba}^*(\xi) \text{ постоянна при } a < \xi < b. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь среднее время выхода, определенное при $a < \xi < b$:

$$\begin{aligned} e_{ab}(\xi) &= E_{\xi}(m_a \wedge m_b \wedge m_{\infty}) = E_{\xi}(m_a \wedge m_b \wedge m_{\infty}) = \\ &= E_{\xi}\{m, m < m_{\infty}\} + E_{\xi}\{m_{\infty}, m_{\infty} < m\} = \\ &= E_{\xi}\left[me^{-I(m)} + \int_0^m te^{-I} d\mathfrak{f}\right] = E_{\xi}\left[me^{-I(m)} - te^{-I}\Big|_0^m + \int_0^m e^{-I} dt\right] = \\ &= E_{\xi}\left[\int_0^m e^{-I} dt\right] \quad (15) \end{aligned}$$

(здесь $m = m_a \wedge m_b$). Эта функция непрерывна. С помощью таких же выкладок, как в (12), находим, что

$$\begin{aligned} \int_a^b G(\xi, \eta) e_{ab}(\eta) k(d\eta) &= E_{\xi}\left[\int_0^m e_{ab}(x_t) \mathfrak{f}(dt)\right] = \\ &= E_{\xi}\left[\int_0^m \mathfrak{f}(dt) \int_0^{m(w_t^+)} e^{-I(s, w_t^+)} ds\right] = E_{\xi}\left[\int_0^m e^{-I} ds \int_0^s e^{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f}\right] = \\ &= E_{\xi}\left[\int_0^m (1 - e^{-I}) ds\right] = e_{ab}(\xi) - e_{ab}(\xi), \quad (16) \end{aligned}$$

где $e_{ab}(\xi) = E_{\xi}(m_a \wedge m_b)$. Это означает, что

$$-[e_{ab}^+(d\xi) - e_{ab}(\xi)k(d\xi)] = -e_{ab}^+(d\xi) = m(d\xi), \quad a < \xi < b. \quad (17)$$

Согласно формуле (14),

$$s^*(d\xi) = \text{const} \cdot [p_{ba}^*(d\xi) p_{ab}(\xi) - p_{ab}^*(d\xi) p_{ba}(\xi)] = \text{const} \cdot s(d\xi). \quad (18)$$

Если положить константу равной 1, то из (13) следует, что $k^* = k$, а из (17), — что $m^* = m$ на $(0, +\infty)$.

Остается вычислить $k(0)$ и $m(0)$ в случае (2a) и κ в случае (2b). Но в случае (2b)

$$P_0\{m_{\infty} > t\} = P_0\{m_{\infty} > t\} = E_0[e^{-\kappa I(t, 0)}] = e^{-\kappa t}, \quad (19)$$

что и требуется доказать; а в случае (2a) вероятность достижения

$$p_b(\xi) = P_{\xi}\{m_b < +\infty\}, \quad 0 \leq \xi < b, \quad (20a)$$

и среднее время выхода

$$e_b(\xi) = E_{\xi}(m_b \wedge m_{\infty}), \quad 0 < \xi < b, \quad (20b)$$

можно выразить через функцию Грина

$$E_{\xi}[t(m_b, \eta)] = G(\xi, \eta) = G(\eta, \xi) = 1 - \frac{\eta}{b}, \quad 0 \leq \xi \leq \eta < b,$$

совершенно так же, как в (12) и (16). Получаем

$$\int_{[0, b)} G(\xi, \eta) p_b^*(\eta) k(d\eta) = 1 - p_b^*(\xi); \quad (21a)$$

$$\int_{[0, b)} G(\xi, \eta) e_b^*(\eta) k(d\eta) = e_b^*(\xi) - e_b^*(\xi), \quad (21b)$$

т. е.

$$k^*(0) = \frac{p_b^{*+}(0)}{p_b^*(0)} = k(0); \quad (22a)$$

$$m^*(0) = -[e_b^{*+}(0) - e_b^*(0)k(0)] = -e_b^+(0) = m(0), \quad (22b)$$

что нам и было нужно.

Очевидно, что движение D^* имеет локальные времена

$$t^*(t, b, w^*) = \frac{\text{mes}\{s: x^*(s) \in db, s \leq t\}}{m(db)}; \quad (23a)$$

$$t^*(t, b, w^*) = t(t \wedge m_\infty, b, w). \quad (23b)$$

Задача 1. Проверить формулу

$$p^*(t, a, b) = \frac{\partial}{\partial t} E_a[t^*(t, b)], \quad (t, a, b) \in (0, +\infty) \times Q^* \times Q^*,$$

$$Q^* = \begin{cases} [0, +\infty) & \text{в случае (2a);} \\ (0, +\infty) & \text{в случае (2b).} \end{cases}$$

(Консервативный случай см. в § 5.4; по поводу $p^*(t, a, b)$ см. § 4.11.)

[Пусть $\alpha > 0$, $(a, b) \in Q^* \times Q^*$. Положим $f(t) = \alpha \int t dm + f$; тогда

$$\begin{aligned} E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^*(dt, b) \right] &= E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-f(t)t} t^*(dt, b) \right] = \\ &= E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-t} t^*(f^{-1}(dt), b) \right]. \end{aligned}$$

Используя задачу 5.2.1 и применяя к заменам времени, рассмотренным в § 5.4, цепное правило, отождествляем это выражение

с функцией Грина для D^* :

$$G^*(a, b) = B^{-1}g_1(a)g_2(b) \quad (a \leq b);$$

$$g^+(d\xi) = g(\xi) [\alpha m(d\xi) + k(d\xi)], \quad \xi > 0, \quad g = g_1, g_2;$$

$$g_1^+(0) = g_1(0) [\alpha m(0) + k(0)] \text{ в случае (2a);}$$

$$g_1(0) = 0 \text{ в случае (2b);}$$

далее используйте

$$G^* = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} p^* dt.]$$

Задача 2. Установить, что $P^*: \{m_\infty \in dt, x^*(m_\infty - 0) \in db\}$ на $(0, +\infty) \times Q^* \times Q^*$ выражается в виде $p^*(t, a, b) dt k(db)$. Использовать формулу задачи 1.

[Пусть даны $\alpha > 0$, $a \in Q^*$ и функция $f \in C[0, +\infty)$, обращающаяся в 0 в точке 0; тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \int_0^{+\infty} p^*(t, a, b) f dk &= \int_0^{+\infty} E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (dt, b) \right] f dk = \\ &= E_a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\frac{1}{2}t} (dt) f(x_t) \right] = E_a [e^{-\alpha m_\infty} f(x^*(m_\infty - 0))]. \end{aligned}$$

Теперь нужно обратить преобразование Лапласа.]

Задача 3. Придать точный смысл утверждению

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} m(db) P_b^* \{m_\infty \leq t\} = k(db), \quad b > 0.$$

[Пусть $0 < a < b < c$; обозначим через I полуоткрытый интервал $(a, b]$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_I m(d\xi) P_\xi^* \{m_\infty \leq t, x^*(m_\infty - 0) = 0\} &\leq \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} P_a \{m_0 \leq t\} m(I) = 0 \text{ в случае (2b);} \\ \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_I m(d\xi) P_\xi^* \{m_\infty \leq t, x^*(m_\infty - 0) \geq c\} &\leq \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} P_b \{m_c \leq t\} m(I) = 0; \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_I m(d\xi) P_{\xi}^{\bullet} \{m_{\infty} \leq t\} &= \\
 &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_I m(d\xi) P_{\xi}^{\bullet} \{m_{\infty} \leq t, 0 < x^*(m_{\infty} - 0) < c\} = \\
 &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_I m(d\xi) \int_0^t ds \int_{+0}^c p^*(s, \xi, \eta) k(d\eta) = \\
 &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_0^t ds k(d\eta) P_{\eta}^{\bullet} \{x^*(s) \in I\} = k(I),
 \end{aligned}$$

если ни a , ни b не являются точками разрыва функции k .]

Задача 4. Рассмотрим несингулярную диффузию D^{\bullet} на R^1 с производящим оператором

$$\mathcal{G}^{\bullet} u = \frac{u^+(db) - u(b)k(db)}{m(db)},$$

$$u^+(a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{u(b) - u(a)}{b - a},$$

траекториями w^{\bullet} , моментом убывания m_{∞}^{\bullet} и вероятностями $P_a^{\bullet}(B^{\bullet})$. Введем составное движение

$$x(t) \equiv x_n^{\bullet}(t - m_{n-1}^{\bullet} - \dots - m_1^{\bullet}),$$

$$m_1^{\bullet} + \dots + m_{n-1}^{\bullet} \leq t < m_1^{\bullet} + \dots + m_n^{\bullet},$$

где $m_1^{\bullet} + \dots + m_{n-1}^{\bullet} = 0$ при $n = 0$, а движение $x_{n+1}^{\bullet}(t): t < m_{n+1}^{\bullet}$ при условии, что фиксировано $x(t): t < m_1^{\bullet} + \dots + m_n^{\bullet}$, совпадает по распределению с движением $x^{\bullet}(t): t < m_{\infty}^{\bullet}$, начинающимся в точке $l_n = x_n^{\bullet}(m_n - 0)$ (см. рис. 1).

Задача состоит в том, чтобы доказать, что

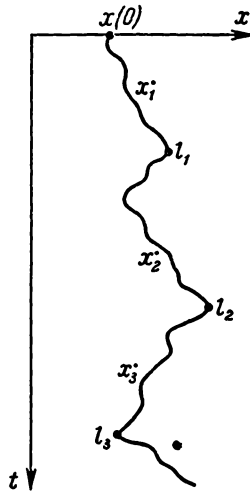
$$P^{\bullet} \{m_1^{\bullet} + m_2^{\bullet} + \dots + m_n^{\bullet} \uparrow + \infty\} \equiv 1,$$

и установить, что составное движение совпадает с консервативной диффузией с производящим оператором $\mathcal{G}u = u^+(db)/m(db)$.

[Рассмотрим консервативное движение с производящим оператором \mathcal{G} , траекториями $w: t \rightarrow x(t)$, локальными временами t и вероятностями $P_a(B)$ и уьем его в момент m_{∞} с условным распределением $P^{\bullet} \{m_{\infty} > t | B\} = e^{-\mathbf{k}(t)}$ ($\mathbf{k} = \int t dk$). Мы получим некоторое (нестандартное) описание движения D^{\bullet} . С помощью

этой модели легко убедиться в том, что

$$P: \{m_1 + m_2 + \dots + m_n \in dt, \quad l_n \in dl\} = \\ = E. \left\{ e^{-\mathfrak{f}(t)} \frac{\mathfrak{f}(t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathfrak{f}(dt), \quad x(t) \in dl \right\}, \quad n \geq 1.$$



Р и с. 1.

Действительно, для $n=1$ эта формула очевидна; предполагая, что она верна для $n-1$, находим, что

$$E: \{m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq t, \quad f(l_n)\} = \\ = E. \left[\int_0^t e^{-\mathfrak{f}(s)} \frac{\mathfrak{f}(s)^{n-2}}{(n-2)!} \mathfrak{f}(ds) E_{x(s)} \left[\int_0^{t-s} e^{-\mathfrak{f}(\theta)} f(x_\theta) \mathfrak{f}(d\theta) \right] \right] = \\ = E. \left[\int_0^t e^{-\mathfrak{f}(s)} \frac{\mathfrak{f}(s)^{n-2}}{(n-2)!} \mathfrak{f}(ds) \int_s^t e^{-\mathfrak{f}(\theta-s, w_s^+)} f(x_\theta) \mathfrak{f}(d\theta) \right] = \\ = E. \left[\int_0^t \frac{\mathfrak{f}(s)^{n-2}}{(n-2)!} \mathfrak{f}(ds) \int_s^t e^{-\mathfrak{f}(\theta)} f(x_\theta) \mathfrak{f}(d\theta) \right] = \\ = E. \left[\int_0^t e^{-\mathfrak{f}(\theta)} \frac{\mathfrak{f}(\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f(x_\theta) \mathfrak{f}(d\theta) \right].$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \uparrow +\infty} P: \{m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq t\} &= \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} E. \left[\int_0^t e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt \right] = 0. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается только заметить, что консервативная диффузия начинается заново в момент m_∞ .]

5.7. Броуновские движения Феллера

Рассмотрим некоторые частные случаи результатов § 5.3 и 5.6.

Пусть дано броуновское движение с отражением на $[0, +\infty)$ с траекториями $w: t \rightarrow x(t)$, локальным временем $t(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \times \times \text{mes} \{s: x(s) \leq \varepsilon, s \leq t\}$ и вероятностями $P_\alpha(B)$. Пусть \mathcal{G}^* — оператор, равный половине второй производной, применяемый к функциям u из $C^2[0, +\infty)$, удовлетворяющим условиям

$$p_1 u(0) - p_2 u^+(0) + p_3 (\mathcal{G}^* u)(0) = 0, \quad (1)$$

$$0 \leq p_1, p_2, p_3,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Если $p_2 = 0$, то

$$x^*(t) = \begin{cases} x(t), & t < m_0 = \min \{t: x(t) = 0\}; \\ 0, & m_0 \leq t < m_\infty; \\ \infty, & t \geq m_\infty, \end{cases} \quad (2)$$

$$P. \{m_\infty > m_0 + t \mid B\} = e^{-(p_1/p_3)t},$$

— нестандартное описание движения, связанного с \mathcal{G}^* . Если же $p_2 > 0$, то одно из возможных описаний этого движения следующее:

$$x^*(t) = \begin{cases} x(\tilde{t}^{-1}(t)), & t < m_\infty; \\ \infty, & t \geq m_\infty; \end{cases} \quad (3)$$

$$\tilde{t} = t + \frac{p_3}{p_2} t(t);$$

$$P. \{m_\infty > t \mid B\} = e^{-(p_1/p_2)t(\tilde{t}^{-1}(t))}.$$

Если $p_3 = 0 < p_1$, то x^* — броуновское движение с эластичным экраном, описанное в § 2.3.

Рассмотрим случай $p_1 = 0 < p_3$. Пусть $\mathcal{Z} = \{t: x(t) = 0\}$. Так как $\tilde{t}(t_2) - \tilde{t}(t_1) > t_2 - t_1$ при $(t_1, t_2) \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$, то временная шкала \tilde{t}^{-1}

вне $\mathcal{Z}^* = f(\mathcal{Z})$ отсчитывает естественное время, а на \mathcal{Z}^* течет замедленно; т. е. $x^* = x(f^{-1})$ вне \mathcal{Z} выглядит как броуновское движение с отражением, но задерживается слишком долго у экрана, как бы немного приликая в этой точке.

В. Феллер [4,9] обнаружил, что условия (1) являются наиболее общими (локальными) граничными условиями, которые можно наложить на сужение оператора $D^2/2$ на луч $[0, +\infty)$; до него никто не отмечал возможность ввести в рассмотрение условия, включающие $(\mathcal{G}^*u)(0)$.

Феллер изучил случай, когда траектории разрешается скакать с границы обратно в $(0, +\infty)$. В этом случае \mathcal{G}^* имеет вид $D^2/2$, причем этот оператор применяется к функциям u из $C^2[0, +\infty)$, удовлетворяющим условиям

$$p_1 u(0) - p_2 u^+(0) + p_3 (\mathcal{G}^* u)(0) = \int_0^{+\infty} [u(l) - u(0)] p(dl),$$

$$0 \leq p_1, p_2, p_3, p(dl), \quad (4)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \int_0^{+\infty} l \wedge 1 p(dl) = 1.$$

Когда траектория выходит из 0, она ведет себя подобно одно-стороннему процессу с независимыми приращениями с производящим оператором

$$p_2 u^+(0) + \int_0^{+\infty} [u(l) - u(0)] p(dl). \quad (5)$$

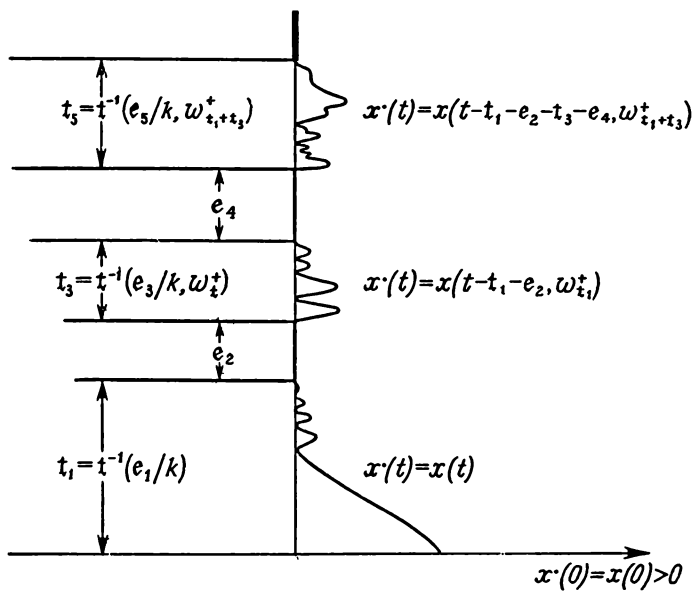
Объяснение формулы (5) см. в § 7.20; полная картина траекторий, связанных с \mathcal{G}^* , содержится в работе К. Ито и Г. П. Маккина [2]. Аналогичные результаты для устойчивых процессов получил С. Ватанабе [1].

5.8. Пример Икеда

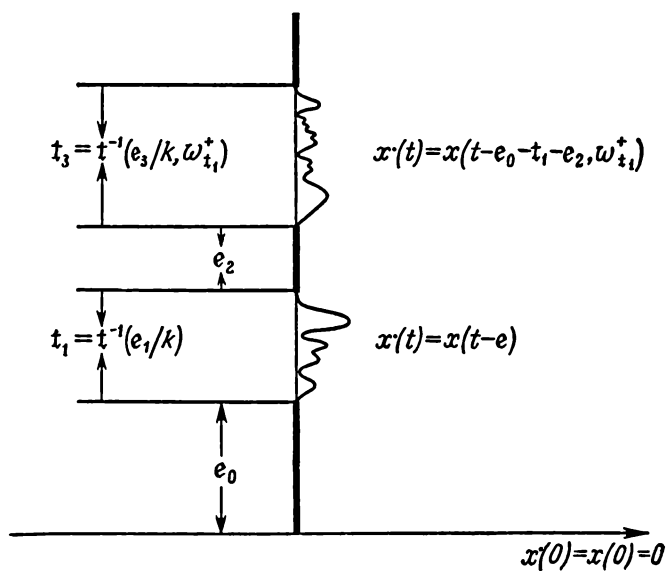
Н. Икеда указал нам интересный пример движения, обладающего простым марковским свойством, с непрерывными траекториями, которое не является диффузией (простейший такой пример см. в § 4.1).

Рассмотрим броуновское движение с отражением с траекториями $w: t \rightarrow x(t)$, локальным временем $t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \text{mes} \{s: x(s) \leq \varepsilon, s \leq t\}$ и вероятностями $P_\alpha(B)$. Пусть $e_n (n \geq 0)$ — независимые промежутки времени с показательным условным распределением

$$P\{e_n > t | B\} = e^{-t}, \quad n \geq 1. \quad (1)$$



Р и с. 1а.

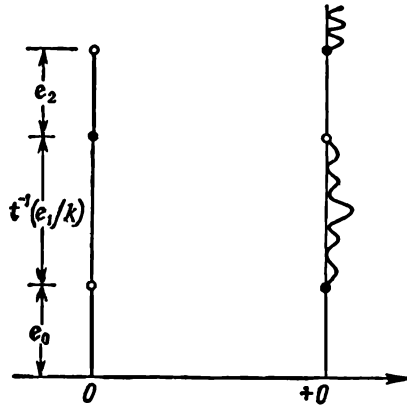


Р и с 1б.

Обозначим через $t^{-1}(t)$ обратную функцию $t^{-1}(t) = \min \{s: t(s) = t\}$ и пусть k — некоторое положительное число. Определим новые траектории x^* в соответствии с рис. 1 и заметим, что так как

$$P_+ \{t_1 > t \mid B\} = P_+ \{e_1 > kt(t) \mid B\} = e^{-kt(t)}, \quad (2)$$

то экскурсии, чередующиеся с жирными интервалами, на которых $x^* \equiv 0$, являются независимыми экземплярами броуновского движения с эластичным экраном, соответствующего условию $u^+(0) = ku(0)$.



Р и с. 2.

Процесс $D^* = [x^*, P_+]$ является просто марковским, потому что $P_+ \{x(t) = 0\} \equiv 0$ ($t > 0$); он не может быть строго марковским, так как $E_0(e^{-mt_0})$ не равно ни 0, ни 1 [см. формулу (3.3.3а)].

Для $f \in B[0, +\infty)$ функция $G_\alpha f \equiv E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right]$ принад-

лежит $D \equiv B[0, +\infty) \cap C(0, +\infty) \cap \{u: \text{существует } u(+0)\}^1$. Используя очевидное соотношение $G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta)G_\alpha G_\beta = 0$ ($\alpha, \beta > 0$), легко получить, что оператор G_α взаимно однозначно отображает D в себя, и так же, как в § 3.7, можно ввести производящий оператор $\mathfrak{G}^*: D(\mathfrak{G}^*) \equiv G_1 D \rightarrow D$. Этот оператор подобен производящему оператору броуновского движения с эластичным экраном. Действительно, $D(\mathfrak{G}^*)$ — это класс функций $u \in D \cap C^2(0, +\infty)$,

¹⁾ $B[0, +\infty)$ — класс всех ограниченных измеримых по Борелю функций, определенных на $[0, +\infty)$.

для которых

$$u^+(+0) = [u(+0) - u(0)]k; \quad (3a)$$

$$\text{существует } u''(+0) \quad (3b)$$

и оператор определяется формулами

$$\mathfrak{G}^* = \frac{1}{2} D^2 \text{ на } (0, +\infty); \quad (4a)$$

$$(\mathfrak{G}^* u)(0) = u(+0) - u(0). \quad (4b)$$

Д. Б. Рэй [3] обнаружил, что фазовое пространство движения с *простым марковским свойством* можно расщепить так, чтобы заставить траекторию начинаться заново в *любой* марковский момент. Для настоящего случая это расщепление показано на рис. 2.

Задача 1. Провести подробное вычисление оператора \mathfrak{G}^* .

Задача 2. Проверить, что если выбросить начальный жирный отрезок на рис. 1b, то движение, определяемое рис. 1, не будет даже просто марковским.

5.9. Замены времени должны производиться при помощи интегралов от локальных времен

Пусть дано стандартное броуновское движение с локальными временами t ; требуется доказать, что замены времени $t \rightarrow f^{-1}$, $f = \int t dm$, введенные в § 5.2, не могли быть никакими другими. Точнее, если замена $t \rightarrow \tau^{-1}(t)$ переводит стандартное броуновское движение в консервативную диффузию с броуновской шкалой и с мерой скорости m на R^1 и если, так же как в случае $\tau = \int t dm$,

$$\tau(t) = \tau(s) + \tau(t-s, \omega_s^+), \quad t \geq s; \quad (1)$$

$$\{a \leq \tau(t) < b\} \in \mathbf{B}_t, \quad t \geq 0; \quad (2)$$

$$0 \leq \tau(t \pm 0) = \tau(t) < +\infty; \quad (3a)$$

$$\tau(+0) = 0, \quad (3b)$$

то с точностью до множества траекторий с нулевой вероятностью

$$\tau(t) = f(t) = \int t dm, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Аналогичный результат верен для замен времени, рассматриваемых в § 5.3.

Для доказательства рассмотрим *аддитивный функционал* от траектории стандартного броуновского движения, удовлетворяю-

щий условиям (1), (2), (3), и введем траектории

$$x^\circ = \begin{cases} x(t), & t < m_\infty; \\ \infty, & t \geq m_\infty, \end{cases} \quad (5)$$

где m_∞ имеет условное распределение

$$P_\cdot \{m_\infty > t \mid B\} = e^{-r(t)}, \quad t \geq 0. \quad (6a)$$

Движение $[x^\circ, P_\cdot]$ является диффузией, как читатель легко докажет, пользуясь методом § 5.6. Поэтому его можно представить как консервативную диффузию с локальными временами t^* , убывающую в момент m_∞ с условным распределением

$$P: \{m_\infty > t \mid B^*\} = e^{-r^*(t)}, \quad r^* = \int t^* dk, \quad dk \geq 0. \quad (6b)$$

Так как $[x(t): t < m_\infty, m_\infty]$ имеет те же распределения, что $[x^*(t): t < m_\infty, m_\infty]$, то x и x^* тоже совпадают по распределению, т. е. x^* — стандартное броуновское движение (см. задачу 5.6.4).

Теперь мы можем отождествить x и x^* . Выбирая $t \geq 0$, $A \in B_t$ и используя соотношение (2), выводим, что

$$E_\cdot [A, e^{-r(t)}] = P_\cdot \{A, m_\infty > t\} = P_\cdot \{A, m_\infty > t\} \equiv E_\cdot [A, e^{-r^*(t)}], \quad (10a)$$

откуда в силу (3a)

$$P_\cdot \left\{ r(t) = r^*(t) = \int t dk, \quad t \geq 0 \right\} \equiv 1. \quad (10b)$$

Теперь предположим, что замена времени $t \rightarrow r^{-1}$ переводит стандартное броуновское движение в консервативную диффузию на R^1 с мерой скорости m .

Так как $x(r^{-1})$ должно быть непрерывно, то $r(t_1) < r(t_2)$ ($t_1 < t_2$). Так же как в § 5.2, вычисляем среднее время выхода:

$$\begin{aligned} e_{ab}(\xi) &= E_\xi [\min \{t: x(r^{-1}) \notin (a, b)\}] = E_\xi [r(m_a \wedge m_b)] = \\ &= \int_a^b E_\xi [t(m_a \wedge m_b, \eta)] k(d\eta) = \int_a^b G(\xi, \eta) k(d\eta), \quad a < \xi < b; \\ G(\xi, \eta) &= G(\eta, \xi) = \frac{(\xi - a)(b - \eta)}{b - a}, \quad \xi \leq \eta. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда вытекает, что $k = m$; короче говоря, $r = \int t dm$, как и утверждалось.

5.10. Точки переноса

Рассмотрим непересекающиеся подинтервалы $Q_n = [l_n, r_n)$ отрезка $Q = [0, 1]$, с которыми связаны шкалы $s = s_n$ и меры скорости $m = m_n$. Пусть $K_+ = Q \setminus \bigcup_{n \geq 1} (l_n, r_n)$, и пусть s_+ — шкала переноса, удовле-

творяющая условиям

$$0 < s_+[a, b) = s_+(b) - s_+(a), \quad a < b; \quad (1a)$$

$$s_+[l_n, b) = \int_{l_n}^b m[l_n, \xi] s(d\xi), \quad l_n \leq b < r_n; \quad (1b)$$

$$s_+[0, 1) < +\infty. \quad (1c)$$

Пусть $D(\mathfrak{G}^*)$ — класс таких функций $u \in C(Q)$, что для некоторого $u^* \in C(Q)$

$$\int_{[a, b)} u^* m(d\xi) = u^+(b) - u^+(a), \quad l_n < a < b < r_n; \quad (2a)$$

$$u^*(l_n) m(l_n) = u^+(l_n); \quad (2b)$$

$$\int_{[a, b) \cap K_+} u^* s_+(d\xi) = \int_{[a, b) \cap K_+} u(d\xi), \quad a < b; \quad (3)$$

$$u^*(1) \equiv 0, \quad (4)$$

и пусть \mathfrak{G}^* — дифференциальный оператор $u \rightarrow u^*$.

Предположим, что на Q задана такая консервативная сингулярная диффузия с производящим оператором \mathfrak{G} , что

$$E_0(m_1) < +\infty; \quad (5a)$$

$$P_1\{m_{1-0} \wedge m_\infty = +\infty\} = 1, \quad (5b)$$

причем l_n ($n \geq 1$) — изолированные справа точки переноса, r_n — наименьшая точка переноса, превосходящая l_n , а p_{ab} и e_1 — выходные вероятности и среднее время выхода $P_1\{m_b < m_a\}$ и $E_1(m_1)$. Тогда оператор \mathfrak{G} можно представить как дифференциальный оператор \mathfrak{G}^* , если положить

$$s(d\xi) = \text{const} \cdot p_{ba}(d\xi), \quad l_n < a < \xi < b < r_n; \quad (6)$$

$$m(d\xi) = -e_1^+(d\xi), \quad l_n < \xi < r_n; \quad (7a)$$

$$m(l_n) = -e_1^+(l_n); \quad (7b)$$

$$s_+(d\xi) = -e_1(d\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (8)$$

(см. § 4.8 и 4.9).

В то же время, как мы сейчас докажем, любой такой дифференциальный оператор \mathfrak{G}^* является производящим оператором некоторой консервативной сингулярной диффузии, для которой $E_0(m_1) < +\infty$ и $P_1\{m_{1-0} \wedge m_\infty = +\infty\} = 1$. Это показывает, что, как было предположено в § 5.1, имеется взаимно однозначное соответствие между дифференциальными операторами \mathfrak{G}^* и консервативными сингулярными диффузиями, для которых $E_0(m_1) < +\infty$ и $P_1\{m_{1-0} \wedge m_\infty = +\infty\} = 1$.

На Q_n оператор \mathcal{G}^* совпадает с производящим оператором некоторой консервативной несингулярной диффузии, останавливающейся в точке r_n , с траекториями $t \rightarrow x_n(t)$, вероятностями $P_a^n(B)$ ($l_n \leq a < r_n$) и такой, что функция $e_{r_n} = E_{r_n}^n(m_{r_n})$ удовлетворяет условию

$$e_{r_n}(l_n) = \int_{Q_n} [s(r_n) - s(\xi)] m(d\xi) = \int_{Q_n} m(l_n, \xi) s(d\xi) = s_+(Q_n) < +\infty \quad (9)$$

(см. § 5.2, 5.3). На интервале точек переноса $[a, b] \subset K_+$ оператор \mathcal{G}^* является производящим оператором движения переноса со скоростью $+1$ в шкале переноса

$$x(s_+[a, \xi]) = \xi, \quad a \leq \xi < b. \quad (10)$$

Идея состоит в том, чтобы сцепить эти движения конец к концу, причем небольшая неопределенность, возникающая, когда частица пересекает ∂K_+ , разрешается таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\text{mes}\{s: x(s) \in K_+ \cap [0, 1], s \leq t\} = s_+([a, b] \cap K_+), \quad a = x(0), \quad b = x(t). \quad (11)$$

Пусть дана точка $0 \leq a \leq 1$. Выберем траектории

$$w_n: t \rightarrow x_n(t), \quad n \geq 1,$$

подчиняющиеся распределению

$$P = \times_{n \geq 1} P_{l_n}^n$$

(\times означает прямое произведение).

Положим

$$t_a(b) = \sum_{r_n \in (a, b]} [m_{r_n}(w_n) - m_{l_n \vee a}(w_n)] + s_+([a, b] \cap K_+), \quad a < b \leq 1. \quad (12)$$

Пользуясь тем, что¹⁾

$$E(t_a(b)) \leq E(t_0(1)) = \sum_{n \geq 1} E_{l_n}^n(m_{r_n}) + s_+(K_+) = s_+[0, 1] < +\infty, \quad a < b, \quad (13)$$

введем непрерывную траекторию

$$x_a(t) = \begin{cases} x_n(t), & t < t_a(r_n), \quad l_n \leq a = x_n(0) < r_n; \\ x_n(t - t_a(l_n)), & t_a(l_n) \leq t < t_a(r_n), \quad a \leq l_n; \\ b, & t = t_a(b), \quad a \leq b < 1; \\ 1, & t \geq t_a(1), \end{cases} \quad (14)$$

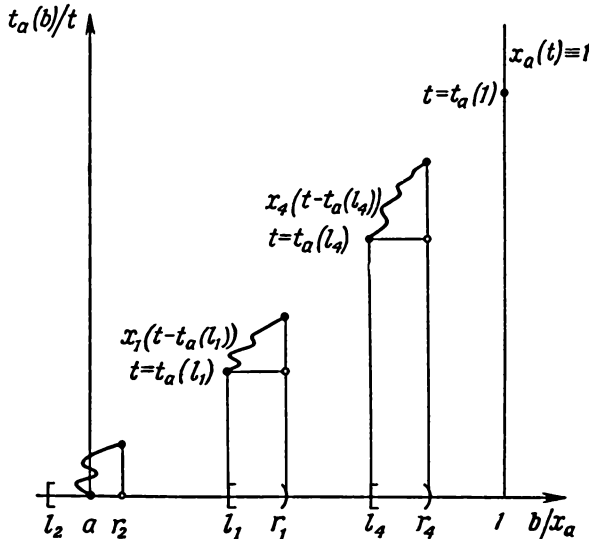
¹⁾ E — математическое ожидание, соответствующее вероятности P .

такую, как на рис. 1. Докажем, что движение D^* с вероятностями $P_a^*(B^*) \equiv P(x_a \in B^*)$ ($0 \leq a \leq 1$) обладает простым марковским свойством, т. е. что

$$P\{x_a(t+s) \in A \mid x_a(\theta): \theta \leq s\} = P\{x_b(t) \in A\}, \quad (15)$$

$$b = x_a(s).$$

Пусть $a < b$; тогда процесс x_a начинается заново в момент первого достижения $m_{ab} = \min\{t: x_a(t) = b\}$, т. е. $x_a(t + m_{ab}) =$



Р и с. 1.

$= x_b(t)$ ($t \geq 0$). Используя очевидное соотношение

$$\lim_{b \downarrow a} E(e^{-m_{ab}}) = \lim_{a \uparrow b} E(e^{-m_{ab}}) = 1, \quad (16)$$

выводим из этого таким же способом, как в § 3.6, что операторы Грина

$$(G_a^* f)(a) = E \left[\int_0^{+\infty} e^{-at} f(x_a) dt \right]$$

переводят $C(Q)$ в себя.

Выберем $s > 0$ и $B \in \mathcal{B}\{x_a(\theta): \theta \leq s\} \equiv \mathcal{B}_{as}$. Пусть

$$m = m_{ab}, \quad b = ([2^n x_a(s)] + 1) 2^{-n}; \quad (17)$$

тогда из того, что $x_a(s) \in J_+ \equiv K_+ \cap [0, 1) \setminus \bigcup_{n \geq 1} I_n$, вытекает, что

$$m > s; \quad (18a)$$

$$\lim_{n \uparrow +\infty} m = s. \quad (18b)$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} E \left\{ B, x_a(s) \in J_+, \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_a(t+s)) dt \right\} = \\ = \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k \leq 2^n} E \{ B, x_a(s) \in [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}) \cap J_+, \\ b = k2^{-n}, s < m_{ab}, \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_a(t+m_{ab})) dt \} = \\ = \lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{k \leq 2^n} E \{ B, x_a(s) \in [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}) \cap J_+, \\ b = k2^{-n}, s < m_{ab}, (G_\alpha f)(b) \} = \\ = E \{ B, x_a(s) \in J_+, b = k \cdot 2^{-n}, (G_\alpha f)(x_a(s)) \}. \end{aligned} \quad (19)$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} P \{ x_a(t+s) \in A \mid B_{as} \} &= P \{ x_b(t) \in A \}, \\ b = x_a(s) \in J_+ &\equiv K_+ \cap [0, 1) \setminus \bigcup_{n \geq 1} I_n. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь остается проверить равенство (15) в случае $x_a(s) = 1$ и в случае $x_a(s) \in Q_n$.

Но если $x_a(s) = 1$, то

$$P \{ x_a(t+s) = 1 \mid B_{as} \} = 1 = P \{ x_1(t) = 1 \}; \quad (21)$$

если же $b = x_a(s) \in Q_n$, то *условные распределения относительно B_{as} процесса*

$$x_a(t+s) = \begin{cases} x_n(t+s-t_a(l_n \vee a)), & t < t_a(r_n) - s; \\ x_{r_n}(t - [t_a(r_n) - s]), & t \geq t_a(r_n) - s, \end{cases} \quad (22)$$

совпадают с распределениями x_b . Это легко проверить, учитывая, что $t_a(l_n \vee a)$ и $x_a(t): t \leq t_a(l_n \vee a)$ не зависят от $x_{r_n}(t) (t \geq 0)$ и что процесс $x_n(t) (t \geq 0)$ начинается заново в моменты $s - t_a(l_n \vee a)$, и пользуясь рис. 1.

Поскольку оператор Грина движения D^* переводит $C(Q)$ в себя, D^* является диффузией. Чтобы установить, что ее производящий оператор совпадает с дифференциальным оператором \mathcal{G}^* , достаточно

заметить, что

$$P_{\xi}^{\dagger} \{m_b < m_a\} = P \{m_{\xi b} < m_{\xi a}\} = \frac{s(\xi) - s(a)}{s(b) - s(a)}, \quad (23a)$$

$$l_n < a < \xi < b < r_n;$$

$$\begin{aligned} E_{\xi}^{\dagger}(m_1) &= E(t_{\xi}(1)) = \sum_{\xi < r_n} E_{\xi \vee l_n}^n(m_{r_n}) + s_+([\xi, 1) \cap K_+) = \\ &= s_+[\xi, 1), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \end{aligned} \quad (23b)$$

и использовать формулы (6), (7) и (8).

Если в K_+ не содержится ни одного интервала, а $\sum_{n \geq 1} s(Q_n) < +\infty$, то можно применить другой метод. Прежде всего изменим шкалы так, чтобы было

$$\sum_{n \geq 1} s_+(Q_n \cap d\xi) = d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (24)$$

Пусть x — броуновское движение с отражением в 0 и консервативной ловушкой в точке 1, с локальными временами t . Пусть f^{-1} — обратная функция для

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{a < r_n} \int_{Q_n} t(t \wedge m_{r_n}, \xi) m(d\xi) + s_+([a, b) \cap K_+), \\ a &= x(0), \quad b = a \vee x(t), \quad m_{r_n} = \min \{t: x(t) = r_n\}; \end{aligned} \quad (25)$$

тогда $x^* = x(f^{-1})$ — некоторое (нестандартное) описание нужного движения. В частном случае, когда

$$m(d\xi) = 2 d\xi; \quad (26a)$$

$$s_+(K_+) = 0; \quad (26b)$$

$$f(t) = \sum_{x(0) < r_n} \text{mes} \{s: x(s) \in Q_n, s \leq t \wedge m_{r_n}\}, \quad (26c)$$

замена времени сдвигает жирные участки кривой на рис. 2 вниз по оси времени настолько, чтобы получилась непрерывная траектория (частный случай этого см. в § 2.11).

Задача 1. Дать столь же полное обоснование замены времени $t \rightarrow f^{-1}$, как в § 5.2 и 5.3.

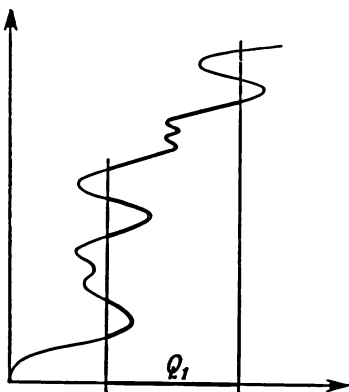
Задача 2. Рассмотрим $x^* = x(f^{-1})$ в частном случае (26), взяв за K_+ стандартное канторово множество

$$[0, 1] \setminus (1/3, 2/3) \setminus (1/9, 2/9) \setminus (7/9, 8/9) \setminus \dots$$

Задача состоит в том, чтобы вычислить шкалу переноса и $E_0 [e^{-\alpha \min \{t: x^*(t)=1\}}]$.

$$[s_+ [0, \xi] = \sum_{l_n \leq \xi} (r_n \wedge \xi - l_n)^2, \quad 0 \leq \xi \leq 1;$$

$$E_0 [e^{-\alpha \min \{t: x^*(t)=1\}}] = \prod_{n \geq 1} (\operatorname{ch} 3^{-n} \sqrt{2\alpha})^{-2^{n-1}}.]$$



Р и с. 2.

5.11. Точки переноса с убыванием

Рассмотрим, как в § 5.10, неперекрывающиеся подинтервалы $Q_n = [l_n, r_n) \subset Q = [0, 1]$, причем на каждом из них заданы шкала $s = s_n$, убывающая мера $k = k_n$ и мера скорости $m = m_n$. Пусть s_+ — такая шкала переноса, что

$$0 < s_+ [a, b] \equiv s_+ (b) - s_+ (a), \quad a < b; \quad (1a)$$

$$s_+ [l_n, b] = \int_{l_n}^b p(\xi)^{-1} s(d\xi) \int_{l_n-0}^{\xi} p(\eta) m(d\eta), \quad l_n < b < r_n; \quad (1b)$$

$$p^+(d\xi) = p(\xi) k(d\xi), \quad l_n < \xi < r_n, \quad p^+(l_n) = p(l_n) k(l_n), \quad p(r_n-0) = 1;$$

$$s_+ [0, 1] < +\infty; \quad (1c)$$

пусть k_+ — мера, убывающая при переносе, такая, что

$$\text{ее скачки по величине не превосходят } 1; \quad (2a)$$

$$k_+ [l_n, b] = \int_{l_n}^b p(\xi)^{-1} s(d\xi) \int_{l_n-0}^{\xi} p(\eta) k(d\eta), \quad l_n < b < r_n; \quad (2b)$$

$$k_+ [0, 1] < +\infty. \quad (2c)$$

Рассмотрим класс D функций $u \in B(Q)$, удовлетворяющих условиям

$$u(a \pm 0) = u(a), \quad a \in \bigcup_n (l_n, r_n); \quad (3a)$$

$$u(a + 0) = u(a), \quad a \in K_+ \cap [0, 1], \quad (3b)$$

и пусть $D(\mathfrak{G}^*)$ — класс таких функций $u \in D$, что для какого-то $u^* \in D$

$$\int_{[a, b)} u^* m(d\xi) = u^+(b) - u^+(a) - \int_{[a, b)} u k(d\xi), \quad l_n < a < b < r_n; \quad (4a)$$

$$u^*(l_n) m(l_n) = u^+(l_n) - u(l_n) k(l_n); \quad (4b)$$

$$\int_{[a, b) \cap K_+} u^* s_+(d\xi) = \int_{[a, b) \cap K_+} u(d\xi) - \int_{[a, b) \cap K_+} u k_+(d\xi), \quad a < b; \quad (5a)$$

$$u(1 - 0) = [1 - k_+(1)] u(1); \quad (5b)$$

$$u^*(1) = 0. \quad (6)$$

Определим \mathfrak{G}^* как дифференциальный оператор $u \rightarrow u^*$.

Предположим, что дана такая сингулярная неконсервативная диффузия на отрезке $Q = [0, 1]$, что

$$E_0(m_1 \wedge m_\infty) < +\infty; \quad (7a)$$

$$P_1\{m_{1-0} \wedge m_\infty = +\infty\} = 1. \quad (7b)$$

Производящий оператор \mathfrak{G} этой диффузии можно представить в виде \mathfrak{G}^* , если рассмотреть вероятности первого достижения и среднее время выхода

$$p_{ab}(\xi) = P_\xi\{m_a < m_b\}, \quad a < \xi < b; \quad (8a)$$

$$p_b(\xi) = P_\xi\{m_b < +\infty\}, \quad \xi < b; \quad (8b)$$

$$e_1(\xi) = E_\xi(m_1 \wedge m_\infty) \quad (8c)$$

положить

$$s(d\xi) = \text{const} \cdot [p_{ba}(d\xi) p_{ab}(\xi) - p_{ab}(d\xi) p_{ba}(\xi)], \quad (9a)$$

$$l_n < \xi < r_n;$$

$$k(d\xi) = \frac{p_{ab}^+(d\xi)}{p_{ab}(\xi)} = \frac{p_{ba}^+(d\xi)}{p_{ba}(\xi)}, \quad l_n < \xi < r_n; \quad (9b)$$

$$k(l_n) = \frac{p_{ab}^+(l_n)}{p_{ab}(l_n)} = \frac{p_{ba}^+(l_n)}{p_{ba}(l_n)};$$

$$m(d\xi) = -[e_1^+(d\xi) - e_1(\xi) k(d\xi)], \quad l_n < \xi \leq r_n; \quad (9c)$$

$$m(l_n) = -[e_1^+(l_n) - e_1(l_n) k(l_n)];$$

$$k_+(d\xi) = \frac{p_1(d\xi)}{p_1(\xi)}, \quad 0 < \xi \leq 1; \quad (10a)$$

$$s_+(d\xi) = -[e_1(d\xi) - e_1(\xi) k_+(d\xi)], \quad 0 < \xi \leq 1 \quad (10b)$$

(см. § 4.8 и 4.9).

Так же как в § 5.10, наша цель заключается в том, чтобы доказать, что *каждый дифференциальный оператор \mathfrak{G}^* является производящим оператором некоторой диффузии, удовлетворяющей условиям $E_0(m_1 \wedge m_\infty) < +\infty$ и $P_1\{m_{1-0} \wedge m_\infty = +\infty\} = 1$; этим будет завершено выполнение программы, предложенной в § 5.1.*

Для доказательства рассмотрим измененный дифференциальный оператор \mathfrak{G} , получающийся из \mathfrak{G}^* , если опустить обе убывающих меры. В соответствии с результатами § 5.10 введем траектории $w: t \rightarrow x(t)$, σ -алгебры \mathbf{B} , вероятности $P_a(B)$ и локальные времена

$$t(t, b) = \frac{\text{mes}\{s: x(s) \in db, s \leq t\}}{m(db)}, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

$$l_n \leq b < r_n, \quad n \geq 1,$$

относящиеся к стандартному описанию соответствующего (консервативного) движения.

Затем распространим $P_*(B)$ на $\mathbf{B} \times \mathbf{B}[0, +\infty]$ в соответствии с правилом

$$P_*(\{m_\infty > t \mid \mathbf{B}\}) = e(t), \quad t \geq 0; \quad (12a)$$

$$e(t) = e^{-\sum_{a < r_n} \int_{l_n \vee a, r_n}^{t(t, \xi)} k(d\xi)} \cap_{(a, b] \cap K_+} [1 - k_+(d\xi)], \quad (12b)$$

$$a = x(0), \quad b = x(t).$$

Здесь, как и в § 4.8, $\cap_{(a, b] \cap K_+} [1 - k_+(d\xi)]$ является символическим обозначением для $e^{-j_+((a, b] \cap K_+)} (1 - \kappa_1)(1 - \kappa_2) \dots$, где j_+ — непрерывная часть функции k_+ , а числа $0 < \kappa_i \leq 1$ — скачки $k_+(d\xi)$ ($a < \xi \leq b$). Введем новые траектории

$$x^*(t) = \begin{cases} x(t), & t < m_\infty; \\ \infty, & t \geq m_\infty, \end{cases} \quad (13)$$

и докажем, что $\mathbf{D}^* = [x^*, P_*]$ является (нестандартным) описанием искомого движения.

Нетрудно проверить, используя метод § 5.6 и очевидное правило умножения

$$e(t) = e(s)e(t-s, w_s^*), \quad t \geq s \geq 0, \quad (14)$$

что \mathbf{D}^* обладает простым марковским свойством. Кроме того, используя формулу (14) и проделывая такие же выкладки, как в (5.2.14), получаем, что операторы Грина

$$\begin{aligned} G_\alpha f &= E_* \left[\int_0^{m_\infty} e^{-\alpha t} f(x) dt \right] = E_* \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_*(\{m_\infty > t \mid \mathbf{B}\}) f(x) dt \right] = \\ &= E_* \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e(t) f(x) dt \right] \quad (15) \end{aligned}$$

переводят $B(Q)$ в D , а это показывает, что D^* — диффузия. Остается вычислить инварианты этой диффузии: s^* , k^* , m^* , s_+^* , k_+^* .

Но из § 5.6 и соотношений (12) видно, что на Q_n имеем $s^* = s$, $k^* = k$ и $m^* = m$; поэтому внутри Q_n также $s_+^* = s_+$ и $k_+^* = k_+$. Положим $m_1^* = \min \{t: x^*(t) = 1\}$. Так как

$$\begin{aligned} p_1^*(a) &= P_a \{m_1^* < +\infty\} = P_a \{m_1 < m_\infty\} = E_a(e(m_1)) = \\ &= E_a \left[e^{-\sum_{a < r_n} \int_{l_n \vee a, r_n}^{\cdot} t(m_{r_n}, \xi) k(d\xi)} \right] \cdot \bigcap_{(a, 1] \cap K_+} [1 - k_+(db)] = \\ &= \prod_{a < r_n} E_a \left[e^{-\int_{l_n \vee a, r_n}^{\cdot} t(m_{r_n}, \xi) k(d\xi)} \right] \cdot \bigcap_{(a, 1] \cap K_+} [1 - k_+(db)] = \\ &= \prod_{a < r_n} P_a \{m_{l_n \vee a} < +\infty\} E_{l_n \vee a} \left[e^{-\int_{l_n \vee a, r_n}^{\cdot} t(m_{r_n}, \xi) k(d\xi)} \right] \times \\ &\times \bigcap_{(a, 1] \cap K_+} [1 - k_+(db)]^1 = \prod_{a < r_n} p_{r_n}^*(l_n \vee a) \cdot \bigcap_{(a, 1] \cap K_+} [1 - k_+(db)] = \\ &= \prod_{a < r_n} e^{-k+[l_n \vee a, r_n)} \cdot \bigcap_{(a, 1] \cap K_+} [1 - k_+(db)]^2 = \bigcap_{(a, 1]} [1 - k_+(db)], \quad (16) \end{aligned}$$

то

$$k_+^*(da) = \frac{p_1^*(da)}{p_1^*(a)} = k_+(da), \quad 0 < a \leq 1. \quad (17)$$

Что же касается s_+^* , то

$$\begin{aligned} e_1^*(a) &= E_a(m_1^* \wedge m_\infty) = E_a(m_1 \wedge m_\infty) = \\ &= E_a[E_a\{m_\infty, m_\infty < m_1 | B\}] + E_a[m_1 P_a\{m_\infty > m_1 | B\}] = \\ &= E_a \left[- \int_0^{m_1} -t \, de + m_1 e(m_1) \right] = E_a \left[\int_0^{m_1} e \, dt \right] = \\ &= \sum_{a < r_n} E_a \left[\int_{m_{l_n \vee a}}^{m_{r_n}} e \, dt \right] + E_a \left[\int_{[a, 1] \cap (K_+ \setminus \bigcup_{n \geq 1} l_n)} e(m_b) \, dm_b \right] = \end{aligned}$$

$$1) P_a \{m_{l_n \vee a} < +\infty\} = 1.$$

$$E_{l_n \vee a} \left[e^{-\int_{l_n \vee a, r_n}^{\cdot} t(m_{r_n}, \xi) k(d\xi)} \right] = P_{l_n \vee a} \{m_{r_n} < m_\infty\} = p_{r_n}^*(l_n \vee a).$$

2) $e^{-k+[a, b)} = P_a^* \{m_b^* < +\infty\}$ на каждом интервале несингулярности; см. формулу (4.8.14) и сноску 2 на стр. 176.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a < r_n} E_a \left[e(m_{l_n \vee a}) E_{l_n \vee a} \left(\int_0^{m_{r_n}} e \, dt \right) \right] + \\
&\quad + E_a \left[\int_{[a, 1) \cap K_+} e(m_b) s_+(db) \right]^1 = \\
&= \sum_{a < r_n} P_a \{m_{l_n \vee a} < +\infty\} E_{l_n \vee a}(m_{r_n}^*) + \int_{[a, 1) \cap K_+} E_a[e(m_b)] s_+(db) = \\
&= \sum_{a < r_n} p_{l_n \vee a}^*(a) \int_{l_n \vee a}^{r_n} p_b^*(l_n \vee a) s_+(db) + \int_{[a, 1) \cap K_+} p_b^*(a) s_+(db)^2 = \\
&= \sum_{a < r_n} \int_{l_n \vee a}^{r_n} p_b^*(a) s_+(db) + \int_{[a, 1) \cap K_+} p_b^*(a) s_+(db) = \int_a^1 p_b^*(a) s_+(db); \quad (18)
\end{aligned}$$

отсюда

$$s_+^*(da) = -[e_1^*(da) - k_+^*(da) e_1^*(a)] = s_+(da), \quad 0 \leq a < 1, \quad (19)$$

что и требовалось доказать.

5.12. Процессы с созданием массы

Здесь мы опишем некоторую модель создания массы, которую применим к рассмотрению нелинейного параболического уравнения (другой подход к созданию массы см. у Дж. Ханта [2(3)]).

Пусть дан интеграл $\mathfrak{f}(t) = \int t(t, \xi) k(d\xi)$ от стандартных броуновских локальных времен по неотрицательной мере $k(d\xi)$ на R^1 ($k(R^1) > 0$). Рассмотрим ливень частиц, изображенный на рис. 1, где $w_{k/2^n}$ для любого $k = 1, 3, \dots, 2^n - 1$ и любого $n \geq 1$ есть стандартная броуновская траектория, начинающаяся в указанной точке разветвления; $m_{k/2^n} \leq +\infty$ подчинено условному распределению

$$P. \{m_{k/2^n} > t \mid w_{k/2^n}\} = e^{-\mathfrak{f}(t+0, w_{k/2^n})} (t \geq 0);$$

и при условии, что фиксирована точка разветвления, $w_{k/2^n}$ и $m_{k/2^n}$ не зависят от траектории до разветвления, а также от всех подливней, ответвившихся до момента разветвления.

¹⁾ $dm_b = s_+(db)$ на $[a, 1) \cap K_+$; см. (5.10.12) и (5.10.14).

²⁾ $p^*(a) = P_a \{m_b^* < +\infty\}$ и см. (4.8.18).

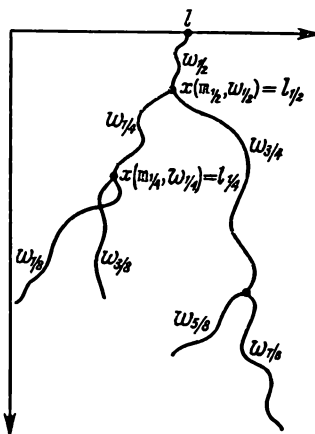
Пусть $e_n = 0$ или 1 ($n \geq 1$); тогда траектория

$$\begin{aligned} w: t \rightarrow x(t - t_{0, e_1 \dots e_{n-2} + 2^{-n+1}}, w_{0, e_1 \dots e_{n-1} + 2^{-n}}), \\ t_{0, e_1 \dots e_{n-2} + 2^{-n+1}} \leq t < t_{0, e_1 \dots e_{n-1} + 2^{-n}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$t_{0, e_1 \dots e_{n-1} + 2^{-n}} \equiv \begin{cases} \sum_{m \leq n} t_{0, e_1 \dots e_{m-1} + 2^{-m}} & (n \geq 1); \\ 0 & (n = 0), \end{cases} \quad (2)$$

является траекторией стандартного броуновского движения, а моменты разветвления $t_{0, e_1 \dots e_{n-1} + 2^{-n}}$: $n \geq 1$ являются моментами



Р и с. 1.

скачков пуассоновского процесса p , подчиненного условному распределению

$$P. \{p(t) = j | w\} = \frac{e^{-t} t^j}{j!}, \quad j \geq 0, \quad t = t(t+0, w). \quad (3)$$

Доказательства этих фактов предоставляем читателю (см. задачу 5.6.4).

Кроме того, можно утверждать, что ливень частиц обладает строгим марковским свойством в следующем смысле. Если m — марковский момент (т. е. если характеристическая функция множества $\{m < t\}$ является функцией от части ливня, относящейся к моментам времени $s \leq t$), и если до момента m были созданы $n < +\infty$ частиц, то ливень частиц, который будет после этого момента, совпадает по распределению с суперпозицией n независимых ливней, берущих начало в тех точках, в которых эти n частиц были в момент $t = m$.

Приведем более богатую возможностями модель, позволяющую сочетать создание и уничтожение массы. Пусть даны такие меры $0 \leq k_n(dl)$ ($0 \leq n \neq 1$), что мера $k = \sum_{0 \leq n \neq 1} k_n$ конечна на всех компактах. Выберем стандартную броуновскую траекторию w_1 , момент разветвления m_1 и целое число n_1 , подчиняющиеся условному распределению

$$P. \{m \in dt, n_1 = n | w = w_1\} = e^{-t(t+0)} f_n(dt), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$0 \leq n \neq 1.$$

Если $n_1 = 0$, прекратим процесс; в противном случае выберем n_1 независимых стандартных броуновских траекторий w_2 , начинающихся в точке $l_1 = x(m_1, w_1)$; каждой из этих траекторий поставим в соответствие независимые моменты разветвления m_2 и целые числа n_2 , для которых распределение $P. \{m \in dt, n_2 = n | w = w_2\}$ задается формулой (4), и т. д.

В дальнейшем слова *простое создание* будут относиться к первой модели, *создание и уничтожение* — ко второй.

Задача 1. Вычислить производящий оператор для процесса создания и уничтожения в частном случае, когда $k_m(d\xi) = 2c_m d\xi$ ($0 \leq m \neq 1$). Рассмотреть процесс создания и уничтожения как марковское движение на пространстве Q , состоящем из точек

$$l^n: l = (l_1, l_2, \dots, l_d), \quad l_1 < l_2 < \dots < l_d, \quad n = (n_1, n_2, \dots, n_d),$$

$$1 \leq n_1, n_2, \dots, n_d.$$

Здесь l означает *положения*, занимаемые частицами, а n — *число* частиц в этих точках.

[Пусть дана такая функция $u: Q \rightarrow R^1$, что $u(l^n) \in C^2(R^d)$ как функция от (l_1, l_2, \dots, l_d) при всех d и n . Тогда

$$(\mathcal{G}u)(l^n) = \frac{1}{2} \Delta u(l^n) + \sum_{\substack{i \leq d \\ 0 \leq m \neq 1}} c_i n_i [u(l^{n+(m-1)e_i}) - u(l^n)],$$

где Δ есть d -мерный оператор Лапласа, а $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ и т. д.]

5.13. Параболическое уравнение

Рассмотрим модель, изображенную на рис. 5.12.1 (простое создание) с $k(dl) = 2|l|^\gamma dl$ ($\gamma > 0$).

Пусть $(t, a, b) \in (0, +\infty) \times R^2$. Если $\#(t, db)$ — число частиц,

принадлежащих db в момент t , то

$$\begin{aligned} E_a [\#(t, db)] &= \sum_{n \geq 0} \sum_{e_1, e_2, \dots, e_n} P_a \{t_{0, e_1 \dots e_{n-1} + 2^{-n}} \leq t < \\ &< t_{0, e_1 \dots e_n + 2^{-n-1}}, x(t - t_{0, e_1 \dots e_{n-1} + 2^{-n}}, w_{0, e_1 \dots e_n + 2^{-n-1}}) \in db\} = \\ &= \sum_{n \geq 0} 2^n E_a \left\{ e^{-t \frac{t^n}{n!}}, x(t) \in db \right\} = \\ &= E_a \{e^t, x(t) \in db\} \equiv e(t, a, b) db. \quad (1) \end{aligned}$$

Функция $e(t, a, b)$ является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{G}^* u, \quad \mathfrak{G}^* = \frac{D^2}{2} + |l|^\gamma,$$

в следующем смысле. Если $0 \leq f \in C(R^1)$ и если задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{G}^* u; \quad (2a)$$

$$u(+0, \cdot) = f \quad (2b)$$

имеет неотрицательное решение u при $t < t_1$, то $u \equiv \int e f(t < t_1)$.

Доказательству этого посвящена вся оставшаяся часть параграфа.

Пусть дано $n \geq 1$; спектральное разложение § 4.11 можно применить к ядру $e^{-tn^\gamma} \cdot e^n(t, a, b)$:

$$e^n(t, a, b) db = E_a \left\{ e^{\int_0^t |x(s)|^\gamma ds}, m_{-n} \wedge m_{+n} > t, x(t) \in db \right\}; \quad (3)$$

$$t > 0, \quad |a|, |b| < n.$$

Это разложение позволяет установить, что¹⁾

$$\frac{\partial e^n}{\partial t} = \mathfrak{G}^* e^n; \quad (4a)$$

$$\lim_{a \downarrow -n} e^n(t, a, b) = \lim_{a \uparrow +n} e^n(t, a, b) = 0, \quad t > 0, \quad |b| < n; \quad (4b)$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{|b-a| < \delta} e^n(t, a, b) db = 1, \quad \delta > 0; \quad (4c)$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{|b-a| > \delta} e^n(t, a, b) db = 0, \quad \delta > 0. \quad (4d)$$

Короче говоря, e^n — это фундаментальное решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{G}^* u, \quad |b| < n; \quad (5a)$$

$$u(t, \pm n) = 0, \quad t > 0. \quad (5b)$$

1) \mathfrak{G}^* применяется по a или по b .

Теперь рассмотрим решение $v < +\infty$ задачи (2) при $t < t_1$; если $|a| < n$, то

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{|b| < n} e^n(t-s, a, b) v(s, b) db = -\frac{1}{2} e^n v|_{-n}^n \geq 0. \quad (6)$$

Так как $e^n \uparrow e(n \uparrow +\infty)$, то отсюда следует, что

$$v \geq \int_{|b| < n} e^n f db \uparrow u \equiv \int e f db, \quad (7)$$

$$n \uparrow +\infty, \quad t < t_1.$$

Функцию u можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(t, b) &= E_a \left[e^{\int_0^t |x(s)|^\gamma ds} f(x_t) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, a, b) f db + E_a \left[\int_0^t e^{\int_{-s}^t |x(\theta)|^\gamma d\theta} |x(t-s)|^\gamma ds f(x_t) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, a, b) f(b) db + \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s, a, b) |b|^\gamma u(b) db. \end{aligned} \quad (8)$$

Как легко проверить прямым дифференцированием, эта функция является решением задачи (2) до тех пор, пока не обращается в $+\infty$. Сопоставляя это с соотношением (7), получаем, что u — наименьшее решение задачи (2).

При $\gamma > 2$ имеем $e(t, a, b) \equiv +\infty$ ($t > 0$). Действительно, броуновские движения с закрепленным концом

$$[x(s) : s \leq t, P_{ab}(B) \equiv P_a\{B | x(t) = b\}], \quad (9a)$$

$$\left[a + x(s) + (b-a) \frac{s}{t} : s \leq t, P_{00} \right] \quad (9b)$$

имеют одинаковые распределения. Поэтому

$$\begin{aligned} e(2t, a, b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(t, a, \xi) e(t, \xi, b) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_0 \left\{ \exp \left(\int_0^t \left| a + x(s) + (\xi - a) \frac{s}{t} \right|^\gamma ds \right) | x(t) = 0 \right\} \times \\ &\quad \times g(t, a, \xi) e(t, \xi, b) d\xi \geq \\ &\geq \text{const} \cdot E_0 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(\int_0^t \left| a + x(s) + (\xi - a) \frac{s}{t} \right|^\gamma ds - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{const} \cdot \xi^2 \right) d\xi | x(t) = 0 \right\} \equiv +\infty, \end{aligned} \quad (10)$$

так как интеграл под знаком математического ожидания расхо-
дится. Отсюда вытекает, в частности, что t_1 не может быть
положительно, за исключением случая $f = u \equiv 0$.

С другой стороны, при $\gamma < 2$ имеем $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t, a, b) db < +\infty$ ($t > 0$), поскольку

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e(t, a, b) db &= E_a \left[e^{\int_0^t |x(s)|^\gamma ds} \right] = E_0 \left[e^{\int_0^t |a+x(s)|^\gamma ds} \right] \leq \\ &\leq 2E_0 \left[e^{t(|a| + \max_{s \leq t} x(s))^\gamma} \right] = 4 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-b^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} e^{(|a|+b)^\gamma} db < +\infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Если же $\gamma = 2$, то

$e(t, a, b) < +\infty$ или $= +\infty$ в зависимости от того, $t < \pi/\sqrt{2}$
или нет; (12a)

$\int_{-\infty}^{+\infty} e(t, a, b) db < +\infty$ или $= +\infty$ в зависимости от того,
 $t < \pi/2\sqrt{2}$ или нет (12b)

(см. ниже задачу 1). Поэтому остается доказать, что если $\gamma \leq 2$ и v — решение задачи (2) при $t < t_1$, то $v \equiv u$ ($t < t_1$). Метод, который здесь используется, восходит к А. Тихонову [1].

Пусть дано такое решение v ; тогда $w \equiv v - u$ является неотрицательным решением задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathfrak{G}^* w; \quad (13a)$$

$$w(+0, \cdot) = 0. \quad (13b)$$

При этом

$$\begin{aligned} z(t, a) \equiv \int_0^t \left[w(s, a) + 2 \int_0^a db \int_0^b |c|^\gamma w(s, c) dc \right] ds + \\ + \int_0^t \left[w(s, -a) + 2 \int_0^{-a} db \int_0^b |c|^\gamma w(s, c) \right] dc \end{aligned} \quad (14)$$

является четной функцией от a и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &\geq w(t, -a) + w(t, a) = \int_0^t [\mathfrak{G}^* w(t, -a) + \mathfrak{G}^* w(t, a)] ds = \\ &= \frac{1}{2} z_{22} \geq 0, \quad t < t_1; \end{aligned} \quad (15a)$$

$$z \geq 0; \quad (15b)$$

$$z(+0, \cdot) \equiv 0. \quad (15c)$$

Применяя формулу (6) к w , получаем

$$w(t, a) = \int_0^t \left(-\frac{1}{2} e_3^n w \Big|_{-n}^n \right) ds, \quad |a| < n, \quad t < t_1. \quad (16)$$

Так как имеет место оценка

$$\mp e_3^n(t, a, \pm n) \leq e^{tn\gamma} \frac{4n}{t} g(t, a, \pm n) < \\ < \text{const} \cdot e^{tn\gamma} e^{-n^2/3t}, \quad |a| < n, \quad (17)$$

которую читатель легко проверит, используя формулу (3), то отсюда следует, что

$$w(t, a) < \text{const} \cdot e^{tn\gamma} e^{-n^2/3t} \int_0^t [w(s, -n) + w(s, +n)] ds < \\ < \text{const} \cdot e^{tn\gamma} e^{-n^2/3t} z(t, n). \quad (18)$$

Далее, так как

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{-n}^n g(t-s, a, b) z(s, b) db = \\ = \left(-\frac{1}{2} g_3 z + \frac{1}{2} g z_2 \right) \Big|_{-n}^n + \int_{-n}^n \left(-\frac{1}{2} z_{22} + z_1 \right) g db \geq 0, \quad (19)$$

то

$$z(t, a) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s, a, b) z(s, b) db. \quad (20)$$

Поскольку $0 \leq z$ [см. (15)], имеем

$$z\left(\frac{t_1}{2}, 0\right) \geq \int_n^{2n} g\left(\frac{t_1}{6}, 0, b\right) z\left(\frac{t_1}{3}, b\right) db > \\ > \text{const} \cdot e^{-12n^2/t_1} z\left(\frac{t_1}{3}, n\right). \quad (21)$$

Возвращаясь с этой оценкой к формуле (18), получаем, что при $|a| < n$ и $t < t_1/3$

$$w(t, a) < \text{const} \cdot e^{tn\gamma} e^{-n^2/3t} e^{12n^2/t_1}. \quad (22)$$

Это выражение стремится к 0 при $n \uparrow +\infty$, если только $t + 12/t_1 < 1/3t$. Иначе говоря, $w \equiv 0$ при малых t . Переходя к все большим значениям t , доказываем, что $w \equiv 0$ ($t < t_1$).

Задача 1 (по Г. Троттеру; см. также Р. С. Камерон и У. Т. Мартин [1]). Доказать, что если $\gamma = 2$, $\theta = \sqrt{2} \cdot t$, то

$$e(t, a, b) = \begin{cases} \frac{e^{-\operatorname{ctg} \theta [a^2 - 2ab \sec \theta + b^2]/\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{2} \sin \theta}, & t < \frac{\pi}{\sqrt{2}}; \\ +\infty, & t \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(t, a, b) db = \begin{cases} \sqrt{\sec \theta} e^{-a^2 \operatorname{tg} \theta / \sqrt{2}}, & t < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \\ +\infty, & t \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

[Функция $e(t, a, b) \equiv e^{-\operatorname{ctg} \theta} \dots$ удовлетворяет уравнению (2); поэтому она должна быть его фундаментальным решением. Другой метод состоит в том, чтобы выразить фундаментальное решение

$$e_\alpha(t, a, b) db = E_\alpha \left\{ e^{-\alpha \int_0^t x(s)^2 ds}, x(s) \in db \right\}, \quad \alpha > 0,$$

через собственные значения $\gamma_n = -\sqrt{2\alpha}(n + 1/2)$ и собственные функции $f_n = e^{-\sqrt{2\alpha}b^2/2} H_n(\sqrt{2\alpha}b)$ оператора $\mathfrak{G} = D^2/2 - \alpha b^2$:

$$\begin{aligned} e_\alpha(t, a, b) &= \sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{2\alpha}(n+1/2)t} e^{-\sqrt{2\alpha}((a^2+b^2)/2)} \frac{H_n(\sqrt{2\alpha}a) H_n(\sqrt{2\alpha}b)}{\sqrt{\pi} 2^n n! / \sqrt{2\alpha}} = \\ &= \frac{e^{-(\sqrt{2\alpha}/2) \operatorname{cth} \sqrt{2\alpha} t [a^2 - 2ab \operatorname{sech} \sqrt{2\alpha} t + b^2]}}{\sqrt{2\pi \operatorname{sh} \sqrt{2\alpha} t / \sqrt{2\alpha}}} \end{aligned}$$

(см. А. Эрдейи [1 (2): 194 (22)]) и затем продолжить это решение в комплексной плоскости по обе стороны от полупрямой $\alpha > 0$ до точки $\alpha = -1$.]

5.14. Взрывы

Рассмотрим модель, изображенную на рис. 5.12.1 (простое создание). Обозначим через e момент взрыва $\sup \{t: \#(t, R^1) < +\infty\}$. Покажем, что вероятность $P.\{e = +\infty\}$ постоянна: $P.\{e = +\infty\} \equiv 0$ или $P.\{e = +\infty\} \equiv 1$.

Пусть $a < b$; обозначим через w некоторую (стандартную броуновскую) ветвь всего ливня частиц, начинающегося в точке a ,

а через m — момент первого достижения ею точки b . Тогда подливень, происходящий от ω_m^+ , является копией (с теми же распределениями) целого ливня частиц, начинающегося в точке b . Отсюда вытекает, что $P_a\{e = +\infty\} \leq P_b\{e = +\infty\}$. Закон 0—1, состоящий в том, что $P\{e = +\infty\} = 0$ или 1, сразу же вытекает из соотношения

$$P\{e = +\infty\} = E.[P_{l_{1/2}}\{e = +\infty\}^2], \quad l_{1/2} = x(m_{1/2}, \omega_{1/2}). \quad (1)$$

Вычислим $P\{e = +\infty\}$ для некоторых частных случаев. Если при каком-то $n \geq 1$

$$t_{0, e_1 e_2 \dots e_{n-1} + 2^{-n}} \equiv \sum_{m \leq n} m_{0, e_1 e_2 \dots e_{m-1} + 2^{-m}} > t$$

для всех $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$, то $\#(t, R^1) \leq 2^{n-1}$, и поэтому

$$\begin{aligned} P\{\#(t, R^1) > 2^{n-1}\} &\leq \sum_{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}=0,1} P\{t_{0, e_1 e_2 \dots e_{n-1} + 2^{-n}} \leq t\} = \\ &= 2^{n-1} P\{t_{2^{-n}} \leq t\} = 2^{n-1} E\left[e^{-t} \sum_{m \geq n} \frac{t^m}{m!}\right] = \\ &= 2^{n-1} E\left[\frac{t^n}{(n-1)!} \int_0^1 s^{n-1} e^{-st} ds\right] = \\ &= \frac{1}{2} E\left[e^t \frac{(2t)^n}{(n-1)!} \int_0^1 s^{n-1} e^{-(s+1)t} ds\right]^1 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} E\left[(e^t) \frac{(2n/e)^n}{(n-1)!} \int_0^1 \frac{s^{n-1}}{(s+1)^n} ds\right] = \\ &= \frac{1}{2} E\left[(e^t) \frac{(2n/e)^n}{(n-1)!} \int_0^{1/2} \frac{t^{n-1}}{1-t} dt\right] \leq E\left[(e^t) \frac{(n/e)^n}{n!}\right] \sim \frac{E\left[(e^t)\right]}{\sqrt{2\pi n}} \quad (2) \end{aligned}$$

(здесь $t = t(t+0)$). Учитывая марковское свойство ливня частиц, выводим из этой оценки, что если $E[e^{t(t+0)}] < +\infty$ при каком-то t , то

$$\begin{aligned} 1 = P\{\#(t, R^1) < +\infty\} &= P\{\#(2t, R^1) < +\infty\} = \\ &= P\{\#(3t, R^1) < +\infty\} = \dots, \end{aligned}$$

а это означает, что $P\{e = +\infty\} \equiv 1$.

1) Здесь используется неравенство $t^n e^{-(1+s)t} \leq [n/e(1+s)]^n$.

Теперь рассмотрим случай

$$\mathfrak{f}(t) = 2 \int_{R^1} t(t, l) |l|^\gamma dl = \int_0^t |x(s)|^\gamma ds.$$

Докажем, что

$P.\{e = +\infty\} = 1$ или 0 в зависимости от того, $\gamma \leq 2$ или $\gamma > 2$. (3)

При $\gamma \leq 2$ имеем

$$E_a[e^{\mathfrak{f}(t)}] < E_a \left[e^{t(1 + \max_{s \leq t} |x(s)|)^2} \right] \leq 2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{t[1 + (|a|+b)^2]} \frac{e^{-b^2/2t}}{\sqrt{\pi t}} db < < +\infty, \quad t < 1/\sqrt{2}, \quad (4)$$

откуда вытекает $P.\{e = +\infty\} \equiv 1$.

Чтобы доказать, что $P.\{e < +\infty\} \equiv 1$ при $\gamma > 2$, рассмотрим огибающую $e_+(t)$ — наименьшее из тех l , для которых вплоть до момента t ливень частиц находится левее l . Выберем такое β из $(1/2, 1]$, что $(1-\beta)\gamma > 2\beta > 1$, и выберем α между 1 и 2β . Положим по определению

$$l_n = \begin{cases} 0 & (n=0); \\ \sum_{l \leq m \leq n} m^{-\beta} & (n \geq 1). \end{cases}$$

Заметим, что событие

$$B_+ = \{e_+ (2 \sum_{2 \leq m < n} m^{-\alpha}) \geq l_n (n \geq 1)\}$$

и вытекающее из него событие $\{e_+ (2 \sum_{n \geq 2} n^{-\alpha}) = +\infty\}$ могут произойти только если $\nexists (2 \sum_{n \geq 2} n^{-\alpha}, R^1) = +\infty$, т. е. только если $e \leq 2 \sum_{n \geq 2} n^{-\alpha} < +\infty$ ¹⁾.

Наша задача теперь состоит в том, чтобы найти такое событие $B_- \subset B_+$, для которого мы сможем доказать, что $P_1(B_-) > 0$, и из этого, пользуясь законом 0—1 для $P.\{e < +\infty\}$, вывести, что $P.\{e < +\infty\} \equiv 1$.

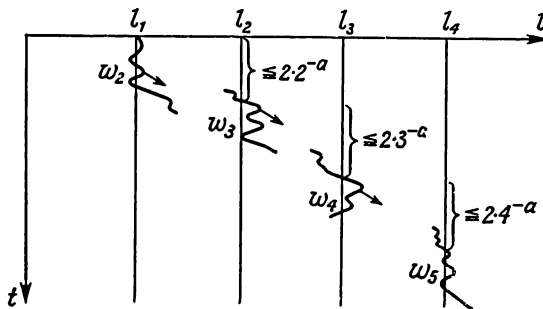
¹⁾ $e < +\infty$ тогда и только тогда, когда ливень частиц неограничен при $t=e$; это можно представить себе следующим образом: «фронт грозы» движется к $\pm\infty$, и дождь частиц становится все сильнее и сильнее по мере этого продвижения.

Для этой цели рассмотрим отдельную броуновскую траекторию w_n , начинающуюся в точке $l_{n-1} = \sum_{1 \leq m < n} m^{-\beta}$ ($n \geq 2$). Пусть от нее ответвляются новые броуновские траектории в моменты скачков пуассоновского процесса p с (условным) распределением

$$P_{l_{n-1}}\{p(t) = j | \mathbf{B}\} = e^{-\mathbf{I}(t)} \frac{\mathbf{I}(t)^j}{j!}, \quad j \geq 0.$$

Пусть j_n — число таких траекторий, ответвившихся до момента $n^{-\alpha} \wedge m(l_{n-2}, w_n)^1$.

Заметим, что вероятность того, что ни одна из ответвившихся траекторий не достигнет l_n до момента $2n^{-\alpha}$, меньше, чем



Р и с. 1.

$E_{l_{n-1}}[P_0\{m((n-1)^{-\beta} + n^{-\beta}) > n^{-\alpha}\}^{j_n}]$. Пусть B_- — событие, состоящее в том, что одна из j_2 траекторий, ответвляющихся от w_2 до момента $2^{-\alpha} \wedge m(l_0, w_2)$, достигнет l_2 до момента $2 \cdot 2^{-\alpha}$ и какая-то из j_3 траекторий, которые ответвляются от $w_3 = (w_2^*)_{m(l_2, w_2^*)}^+$ до момента $3^{-\alpha} \wedge m(l_1, w_3)$, достигнет l_3 до момента $2 \cdot 3^{-\alpha}$ (здесь w_2^* — траектория, которая достигнет l_2 первой); а если w_3^* — та из них, которая достигнет l_3 первой, то одна из j_4 траекторий, ответвляющихся от $w_4 = (w_3^*)_{m(l_3, w_3^*)}^+$ до момента $4^{-\alpha} \wedge m(l_2, w_4)$, достигнет l_4 до момента $2 \cdot 4^{-\alpha}$ и т. д., как показано на рис. 1, изображающем часть первоначального ливня частиц, начинающегося в точке $l_1 = 1$.

Далее, $B_+ \supset B_-$, и вероятность

$$P_1(B_+) \geq P_1(B_-) \geq (1 - E_{l_1}[P_0\{m(1^{-\beta} + 2^{-\beta}) > 2^{-\alpha}\}^{j_2}]) \times \\ \times (1 - E_{l_2}[P_0\{m(2^{-\beta} + 3^{-\beta}) > 3^{-\alpha}\}^{j_3}]) \times \dots \quad (5)$$

¹⁾ $m(l) = m(l, w)$ — момент первого достижения l , т. е. $\min\{t: x(t) = l\}$.

положительна, если

$$E_{l_1} [P_0 \{m(1-\beta + 2^{-\beta}) > 2^{-\alpha}\}^{j_2}] + \\ + E_{l_2} [P_0 \{m(2^{-\beta} + 3^{-\beta}) > 3^{-\alpha}\}^{j_3}] + \dots < +\infty. \quad (6)$$

Но поскольку $\alpha < 2\beta$, имеем

$$P_0 \{m((n-1)^{-\beta} + n^{-\beta}) > n^{-\alpha}\} = \\ = \int_{n^{-\alpha}[(n-1)^{-\beta} + n^{-\beta}]^{-2}}^{+\infty} \frac{e^{-1/2t}}{\sqrt{2\pi t^3}} dt < \frac{1}{2} \quad (7)$$

при $n \uparrow +\infty$; а так как $(1-\beta)\gamma > 2\beta > \alpha$, то

$$\sum_{n \geq 3} E_{l_{n-1}} [2^{-jn}] = \\ = \sum_{n \geq 3} E_{l_{n-1}} \left[\sum_{m \geq 0} 2^{-m} e^{-t(n^{-\alpha} \wedge m(l_{n-2}))} \frac{[t(n^{-\alpha} \wedge m(l_{n-2}))]^m}{m!} \right] = \\ = \sum_{n \geq 3} E_{l_{n-1}} [e^{-t(n^{-\alpha} \wedge m(l_{n-2}))/2}] < \\ < \sum_{n \geq 3} E_{l_{n-1}} [e^{-(n^{-\alpha} \wedge m(l_{n-2}))l_n^{\gamma/2-2/2}}] < \\ < \sum_{n \geq 3} e^{-n^{-\alpha}l_n^{\gamma/2-2/2}} + \sum_{n \geq 3} E_{l_{n-1}} [e^{-m(l_{n-2})l_n^{\gamma/2-2/2}}] < \\ < \sum_{n \geq 3} e^{-n^{-\alpha}l_n^{\gamma/2-2/2}} + \sum_{n \geq 3} e^{-l_n^{\gamma/2}(n-1)^{-\beta}} = \\ = \sum_{n \geq 3} e^{-n^{-\alpha}(\sum_{i \leq n-2} i^{-\beta})^{\gamma/2}} + \sum_{n \geq 3} e^{-(n-1)^{-\beta}(\sum_{i \leq n-2} i^{-\beta})^{\gamma/2}} \leq \\ \leq \sum_{n \geq 1} e^{-n^{(1-\beta)\gamma-\alpha/2}} + \sum_{n \geq 1} e^{-n^{(1-\beta)\gamma/2-\beta}} < +\infty. \quad (8)$$

Из этого, в сочетании с формулой (6), получаем $P_1(B_-) > 0$, и доказательство закончено.

5.15. Нелинейное параболическое уравнение

Пусть дано неотрицательное число γ , и пусть $u = u(t, l)$ — решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} + u(1-u)|l|^{\gamma}, \quad t > 0, \quad l \in R^1; \quad (1a)$$

$$0 \leq u \leq 1; \quad (1b)$$

$$u(+0, \cdot) = 0. \quad (1c)$$

При $\gamma \leq 2$ единственным решением является $u \equiv 0$, а при $\gamma > 2$ есть еще одно решение $u = P_{\{e < t\}}$, где e — момент взрыва в модели, рассмотренной в § 5.14 с $\mathfrak{k} = \int_0^t |x|^\gamma ds$. Это второе решение удовлетворяет условиям

$$0 < u < 1 \quad (t > 0); \quad (2a)$$

$$u \uparrow 1 \quad (t \uparrow + \infty). \quad (2b)$$

Ниже мы дадим набросок доказательства этих утверждений. Аналогичную задачу рассматривали А. Колмогоров, И. Петровский и Н. Пискунов [1].

Приведем простое доказательство (принадлежащее Н. Левинсону) того, что $u \equiv 0$ при $\gamma \leq 2$. Положим по определению $v = ue^{-2t(1+l^2)}$; тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial l^2} + \frac{\partial}{\partial l} [4tlv] + [-2t + 8t^2l^2 + (1-u)|l|^\gamma - 2(1+l^2)]. \quad (3)$$

Так как последняя скобка не больше 0 при $t \leq 1/3$, то

$$\begin{aligned} \int_{-n}^n v \, dl &\leq \left(\int_{-n-1}^{-n} da \int_n^{n+1} db \right) \int_a^b v \, dl \leq \\ &\leq \int_0^t ds \left(\int_n^{n+1} - \int_{-n-1}^{-n} \right) \left[\frac{1}{2} v_2(s, l) + 4slv(s, l) \right] dl \leq \\ &\leq \int_0^t ds \cdot 2e^{-2n^2s} < n^{-2} \downarrow 0 \quad (n \uparrow + \infty). \end{aligned} \quad (4)$$

Но это означает, что $u \equiv 0$ ($t \leq 1/3$); переходя к все большим t , доказываем, что это верно при всех значениях t .

Пусть теперь $\gamma > 2$. Положим $u = P_{\{e < t\}}$, $v = (1-u)^2 |l|^\gamma$. Имеем

$$\begin{aligned} 1 - u &= P_{\{e \geq t\}} = \\ &= P_{\{m_{1/2} \geq t\}} + E. \left[\int_0^t P_{\{m_{1/2} \in ds | w_{1/2}\}} P_{x(s)} \{e \geq t - s\}^2 \right] = \\ &= E. [e^{-\mathfrak{k}(t)}] + E. \left[\int_0^t e^{-\mathfrak{k}(s)} [1 - u(t-s, x(s))]^2 d\mathfrak{k} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E. [e^{-\mathfrak{f}(t)}] + \int_0^t ds E. [e^{-\mathfrak{f}(s)} v(t-s, x(s))] = \\
&= e^{t\mathfrak{G}^*} 1 + \int_0^t ds e^{s\mathfrak{G}^*} v(t-s, \cdot), \quad (5)
\end{aligned}$$

где $\mathfrak{G}^* = D^2/2 - |l|^\gamma$. Отсюда заключаем, что u является решением уравнения (1а):

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial u}{\partial t} &= \mathfrak{G}^* e^{t\mathfrak{G}^*} 1 + \int_0^t ds e^{s\mathfrak{G}^*} \frac{\partial}{\partial t} v(t-s, \cdot) = \\
&= \mathfrak{G}^* e^{t\mathfrak{G}^*} 1 - \int_0^t ds e^{s\mathfrak{G}^*} \frac{\partial}{\partial s} v(t-s, \cdot) = \\
&= \mathfrak{G}^* (1-u) - \int_0^t ds \frac{\partial}{\partial s} [e^{s\mathfrak{G}^*} v(t-s, \cdot)] = \mathfrak{G}^* (1-u) + v. \quad (6)
\end{aligned}$$

Так как $u = P. \{e < t\} \leq P. \{m_{1/2} < t\}$, то $u(+0, \cdot) = 0$, и из этой же оценки вытекает, что $u < 1$ ($t \geq 0$). Далее, $u > 0$ ($t > 0$). Действительно, если $u(t, l) = 0$ в какой-нибудь точке $(t, l) \in (0, +\infty) \times R^1$, то из уравнения (6) следует, что $u \equiv 0$ вплоть до момента t , а отсюда выводится, что $u \equiv 0$. Но это противоречит доказанному в § 5.14 соотношению $\lim_{t \uparrow +\infty} u = P. \{e < +\infty\} \equiv 1$.

Таким образом, утверждения (1) и (2) доказаны.

Задача 1. Рассмотрим момент взрыва e для второй модели § 5.12 (создание и уничтожение) с $k_n(dl) = 2c_n dl$, $0 \leq c_n$ ($0 \leq n \neq 1$), $\sum_{n \neq 1} c_n = 1$. Пусть $c(\theta) = \sum_{n \neq 1} c_n \theta^n$. Проверить, что $u = P. \{e < t\}$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} + [1 - u - c(1-u)]; \\
u(+0, \cdot) &= 0, \quad 0 \leq u < 1.
\end{aligned}$$

Задача 2. Доказать, что если \mathfrak{f} — момент вымирания, то функция $u = P. \{\mathfrak{f} < t\}$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} + [c(u) - u]; \\
u(+0, \cdot) &= 0, \quad 0 \leq u < 1.
\end{aligned}$$

Задача 3. Вывести из результата задачи 2 или доказать непосредственно, что вероятность $u = P. \{\mathfrak{f} < +\infty\}$ того, что

в конце концов все частицы исчезнут, является решением уравнения

$$\frac{1}{2} u'' + [c(u) - u] = 0.$$

Задача 4. Доказать, что если $0 < c_0 \sum_{n \geq 2} c_n$, то любое решение уравнения задачи 3 — это константа $u \equiv \theta$, где $0 < \theta \leq 1$ — корень уравнения $c(\theta) = \theta$ ($\theta = 1$ является корнем этого уравнения; второй корень появляется, если $\sum_{n \geq 2} nc_n > 1$).

[Если $\sum_{n \geq 2} nc_n \leq 1$, то $c(\theta) = c_0 + \sum_{n \geq 2} c_n \theta^n < 1$ и $c'(\theta) = \sum_{n \geq 2} nc_n \theta^{n-1} < 1$ ($\theta < 1$); поэтому $\theta = 1$ — единственный корень уравнения $c(\theta) = \theta$, а из неравенства $u''/2 = u - c(u) \leq 0$ вытекает, что $u (\leq 1)$ — константа ($= 1$). Если же $\sum_{n \geq 2} nc_n > 1$, то $c'(\theta) > 1$ вблизи $\theta = 1$, а $c(1) = 1$, так что уравнение $\theta = c(\theta)$ имеет второй корень $\theta < 1$. Но и в этом случае u — константа ($= 1$ или θ). Действительно, если в какой-то точке $l \in R^1$ будет $1 > u(l) > \theta$ и $u'(l) \geq 0$, то $u''(l) > 0$. Поэтому

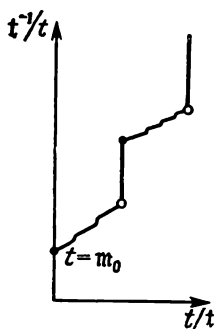
$$\theta < u(\xi), \quad 0 < u'(\xi), \quad 0 < u''(\xi) \quad (\xi > l),$$

что противоречит тому, что $u \leq 1$. Такое же противоречие получается, если $u'(l) \leq 0$. Также невозможно и $u < \theta$.]

ЛОКАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА И ВРЕМЕНА, ОБРАТНЫЕ К НИМ

6.1. Локальные времена и времена, обратные к ним

Займемся исследованием тонкой структуры локального времени $t(t) = t(t, 0)$ и его обратной функции $t^{-1}(t)$ для возвратной несингулярной диффузии D^1 на интервале Q , содержащем 0 в качестве внутренней точки или левого конца; причем во втором случае в 0 выполняется граничное условие $-u^+(0) + m(0)(\mathcal{G}u)(0) = 0$. Некоторые из приводимых ниже утверждений верны также и для невозвратной диффузии (в особенности см. § 6.3, 6.5, 6.6); внести необходимые изменения в доказательства предоставляется читателю.



Р и с. 1.

Оказывается, что, так же как и в случае стандартного броуновского движения, t^{-1} является процессом с *независимыми приращениями*, *однородным по времени* (см. § 6.2); и частично сохраняется связь между этим процессом и смежными интервалами множества $\mathcal{Z} = \{t: x(t) = 0\}$ (см. § 6.3). Так же как и раньше, t можно интерпретировать как меру Хаусдорфа (см. § 6.5b), а выражение для t через число пересечений сверху вниз, введенное в § 2.4, остается без изменений (см. § 6.5a). В § 6.6 и 6.7 t^{-1} используется для вычисления размерности Хаусдорфа—Безиковича множества \mathcal{Z} .

Выбросим из пространства траекторий множество меры нуль, так, чтобы следующие условия выполнялись всюду:

$$t \in C[0, +\infty); \quad (1)$$

$$m_0 = \min \{t: x(t) = 0\} < +\infty; \quad (2)$$

$$t(+\infty) = \lim_{t \uparrow +\infty} t(t) = +\infty; \quad (3)$$

$$t(t_2) > t(t_1), \quad (t_1, t_2) \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset; \quad (4)$$

$$t(t_2) = t(t_1) + t(t_2 - t_1, w_{t_1}^+), \quad t_2 > t_1 \geq 0. \quad (5)$$

¹⁾ Относительно возвратной диффузии см. задачу 4.6.6.

Определим время, обратное к локальному, как

$$t^{-1}(t) = \max \{s: t(s) = t\}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Заметим, что имеют место следующие простые факты, которые мы в дальнейшем будем использовать:

$$t^{-1} \in \uparrow, \quad (7a)$$

$$t^{-1}(t+0) = t^{-1}(t); \quad (7b)$$

$$t^{-1}(0) = m_0; \quad (7c)$$

$$t^{-1}(+\infty) = \lim_{t \uparrow +\infty} t^{-1}(t) = +\infty; \quad (7d)$$

область значений функции t^{-1} совпадает с множеством точек $t \in \mathfrak{J}$, не изолированных справа. (7e)

t^{-1} можно расщепить на 4 части:

$$t^{-1}(t) = m_0 + tm(0) + t_-^{-1}(t) + t_+^{-1}(t), \quad (8)$$

где

$$t_-^{-1}(t) = \text{mes} \{s: x(s) < 0, \quad m_0 \leq s \leq t^{-1}(t)\} \quad (9a)$$

и

$$t_+^{-1}(t) = \text{mes} \{s: x(s) > 0, \quad m_0 \leq s \leq t^{-1}(t)\} \quad (9b)$$

— процессы с независимыми приращениями, независимые друг от друга и от m_0 .

Пусть дано $t > 0$; из равенства (5) ясно, что

$$\begin{aligned} t^{-1}(t) &= \max \{s_1: t(s_1) = t\} = \\ &= \max \{s_1: s_1 = m_0 + s_2, \quad t(m_0) + t(s_2, w_{m_0}^+) = t\} = \\ &= m_0 + \max \{s_2: t(s_2, w_{m_0}^+) = t\} = m_0 + t^{-1}(t, w_{m_0}^+). \end{aligned} \quad (10)$$

Поэтому m_0 не зависит от

$$t_{\pm}^{-1}(t) = \text{mes} \{s: x(s, w_{m_0}^+) \geq 0, \quad s \leq t^{-1}(t, w_{m_0}^+)\}, \quad (11)$$

и разложение (8) получается из

$$\begin{aligned} t^{-1}(t) - m_0 - t_-^{-1}(t) - t_+^{-1}(t) &= \\ &= \text{mes} \{s: x(s, w_{m_0}^+) = 0, \quad s \leq t^{-1}(t, w_{m_0}^+)\} = \\ &= t(t^{-1}(t, w_{m_0}^+))m(0) = tm(0). \end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы доказать, что t_{\pm}^{-1} имеют независимые приращения, рассмотрим два момента времени $t_2 \geq t_1 > 0$. Пусть $m = t^{-1}(t_1)$; используя формулу (5) и соотношение

$$t(m) = t_1, \quad (13)$$

убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} t^{-1}(t_2) &= \max \{s_1: t(s_1) = t_2\} = \\ &= \max \{s_1: s_1 = m + s_2, t(m) + t(s_2, w_m^+) = t_2\} = \\ &= m + \max \{s_2: t(s_2, w_m^+) = t_2 - t_1\} = m + t^{-1}(t_2 - t_1, w_m^+). \end{aligned} \quad (14)$$

Воспользуемся формулой (14) и тем, что $m_0(w_m^+) = 0$; получим

$$\begin{aligned} t_{\pm}^{-1}(t_2) &= \text{mes} \{s: x(s, w_m^+) \geq 0, m_0 \leq s \leq m\} + \\ &+ \text{mes} \{s: x(s, w_m^+) \geq 0, m \leq s \leq m + t^{-1}(t_2 - t_1, w_m^+)\} = \\ &= t_{\pm}^{-1}(t_1) + \text{mes} \{s: x(s, w_m^+) \geq 0, s < t^{-1}(t_2 - t_1, w_m^+)\} = \\ &= t_{\pm}^{-1}(t_1) + t_{\pm}^{-1}(t_2 - t_1, w_m^+). \end{aligned} \quad (15)$$

Но m — марковский момент, так как

$$\{\omega: m < s\} = \{\omega: t_1 < t(s)\} \in B_s, \quad s \geq 0. \quad (16)$$

Из соотношения

$$B \{f(t): t \leq t_1\} \subset B_{m+0}, \quad f = t^{-1}, t_+^{-1}, t_+^{-1} - t_-^{-1}, \quad (17)$$

вытекает, что при $t_2 \geq t_1$

$$\begin{aligned} P \{f(t_2) - f(t_1) \leq s \mid B_{m+0}\} &= P \{f(t, w_m^+) \leq s \mid B_{m+0}\} = \\ &= P_{x(m)} \{f(t) \leq s\} = P_0 \{f(t) \leq s\} \end{aligned} \quad (18)$$

(здесь $t = t_2 - t_1$). Это показывает, что t^{-1} , t_+^{-1} и $t_+^{-1} - t_-^{-1}$ имеют независимые приращения. Чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что, согласно (9), t_-^{-1} и t_+^{-1} являются суммами скачков, а значит, они независимы как суммы отрицательных (t_-^{-1}) и положительных (t_+^{-1}) скачков процесса с независимыми приращениями $t_+^{-1} - t_-^{-1}$.

Задача 1. Доказать результаты этого параграфа по-другому, используя замены времени.

[Пусть дано стандартное броуновское движение с естественной шкалой; рассмотрим для него локальные времена t и пусть t^{-1} — время, обратное к локальному времени в 0. Тогда

$$\int t(t^{-1}(t), \xi) m(d\xi), \quad \int_0^{-0} t(t^{-1}(t), \xi) m(d\xi)$$

и

$$\int_{+0} t(t^{-1}(t), \xi) m(d\xi)$$

имеют те же распределения, что времена t^{-1} и t_{\pm}^{-1} , обратные к локальным, для диффузии D^* с мерой скорости m . Теперь с помощью задачи 2.8.4 проверьте независимость приращений и независимость t_{\pm}^{-1} друг от друга и от m .]

6.2. Меры Леви

Докажем следующие формулы Леви:

$$E_0(e^{-\alpha t_{-}^{-1}(t)}) = e^{-t g_1^-(0)/g_1(0)} = e^{-t \int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha l}) n_-(dl)}, \quad (1a)$$

$$n_-(dl) = \lim_{s \downarrow 0} s(-\varepsilon, 0]^{-1} P_{-\varepsilon}\{m_0 \in dl\};$$

$$E_0(e^{-\alpha t_{+}^{-1}(t)}) = e^{+t g_2^+(0)/g_2(0)} = e^{-t \int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha l}) n_+(dl)}, \quad (1b)$$

$$n_+(dl) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} s[0, \varepsilon]^{-1} P_{\varepsilon}\{m_0 \in dl\};$$

$$E_0(e^{-\alpha t^{-1}(t)}) = e^{-t/G(0,0)} = e^{-t \left[m(0) \alpha + \int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha l}) n(dl) \right]}, \quad (2)$$

$$n(dl) = n_-(dl) + n_+(dl),$$

где $G = g_1 g_2$ — функция Грина для диффузии D , а $m(0)$ — скачок меры скорости в 0. Часть приведенных выше формул можно получить из результатов § 4.10, но мы предпочитаем вывести их заново. Поскольку t_{-}^{-1} и t_{+}^{-1} независимы, а

$$G(0, 0)^{-1} = \frac{g_1^+(0)}{g_1(0)} - \frac{g_2^+(0)}{g_2(0)} = \frac{g_1^-(0)}{g_1(0)} + m(0) \alpha - \frac{g_2^+(0)}{g_2(0)}, \quad (3)$$

достаточно доказать только формулу (1b).

При $l > 0$ функция $P_{\varepsilon}\{m_0 \leq l\}$ выпукла относительно шкалы $s(\varepsilon)$ в области $\varepsilon > 0$ (см. задачу 4.4.2). Поэтому при $\varepsilon \downarrow 0$

$$\begin{aligned} s[0, \varepsilon]^{-1} [P_{\varepsilon}\{m_0 \leq l\} - 1] &= -s[0, \varepsilon]^{-1} P_{\varepsilon}\{m_0 > l\} \downarrow \\ \downarrow n_+(l) &< 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{g_2^+(0)}{g_2(0)} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} s[0, \varepsilon)^{-1} \frac{[g_2(\varepsilon) - g_2(0)]}{g_2(0)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} s[0, \varepsilon)^{-1} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha l} P_\varepsilon \{m_0 \in dl\} - 1 \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} s[0, \varepsilon)^{-1} \left[\int_0^{+\infty} P_\varepsilon \{m_0 > l\} d(e^{-\alpha l} - 1) \right] = \\ &= - \int_0^{+\infty} n_+(l) d(e^{-\alpha l} - 1) = - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\alpha l}) n_+(dl). \quad (5) \end{aligned}$$

Чтобы обосновать последний переход, заметим, что

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{l \uparrow +\infty} n_+(l) \geq \int_0^{+\infty} n_+(l) d(1 - e^{-\alpha l}) = \\ &= \frac{g_2^+(0)}{g_2(0)} = \frac{g_2^+(\varepsilon)}{g_2(0)} - \alpha \int_{(0, \varepsilon]} \frac{g_2(\xi)}{g_2(0)} m(d\xi) > \\ &> s[0, \varepsilon)^{-1} \frac{g_2(\varepsilon) - g_2(0)}{g_2(0)} - \alpha m(0, \varepsilon] = \\ &= s[0, \varepsilon)^{-1} [E_\varepsilon(e^{-\alpha m_0}) - 1] - \alpha m(0, \varepsilon] \rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0, \quad (6) \end{aligned}$$

и

$$0 \geq \varepsilon n_+(\varepsilon) \geq e^\varepsilon \int_0^\varepsilon n_+(l) e^{-l} dl > -\infty. \quad (7)$$

Займемся теперь t_+^{-1} . Замена времени $t \rightarrow f^{-1}(t)$, связанная с интегралом $f(t) = \int_{+0}^t t(t, \xi) m(d\xi)$ от локального времени, переводит D в диффузию D_+ на $[0, +\infty)$ с инвариантами

$$\begin{aligned} s_+ &= s, \quad m_+ = m \text{ на } (0, +\infty), \\ m_+(0) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

А так как f при $t > 0$ растет слева от точек $t^{-1}(t)$, т. е. $f(\theta) < f(s)$ при $\theta < s \equiv t^{-1}(t)$, то

$$\begin{aligned} t_+^{-1}(t) &= f(t^{-1}(t)) = \min \{s: s \geq f(t^{-1}(t))\} = \\ &= \min \{s: f^{-1}(s) \geq t^{-1}(t)\} = \min \{s: t(f^{-1}(s)) \geq t\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Это доказывает, что $t_+^{-1}(t)$ имеет те же распределения, что функция, обратная к локальному времени $t_+(t) = t_+(t, 0)$ для диффузии D_+ .

Теперь, выбирая $\gamma > 0$ и используя представление функции Грина, примененное в задаче 5.6.1, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} dt E_0(e^{-\alpha t_+^{-1}(t)}) &= E_0 \left[\int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} e^{-\alpha t_+^{-1}(t)} dt \right] = \\ &= E_0 \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\gamma t_+(t)} t_+(dt) \right] = G_-(0, 0). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь G_- — функция Грина для диффузии D_- на $[0, +\infty)$ с инвариантами

$$\begin{aligned} s_- &= s_+, \quad m_- = m_+, \\ k_-(0) &= \gamma, \quad k_-(0, +\infty) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как $G_- = g_3 g_2$, где

$$\begin{aligned} \frac{g_3^+(d\xi)}{m(d\xi)} &= \alpha g_3(\xi) \quad (\xi > 0); \\ g_3^+(0) &= \gamma g_3(0); \\ g_3^+(0) g_2(0) - g_3(0) g_2^+(0) &= 1, \end{aligned} \quad (12)$$

то

$$G_-(0, 0) = g_3(0) g_2(0) = \frac{g_2(0)}{\gamma g_2(0) - g_2^+(0)} = \left(\gamma - \frac{g_2^+(0)}{g_2(0)} \right)^{-1}. \quad (13)$$

Обращая преобразование Лапласа, завершаем доказательство формулы (1b).

В качестве мер Леви для времен, обратных к локальным, могут возникать не все неотрицательные распределения масс $n_+(dl)$, для которых $\int l \wedge 1 dn_+ < +\infty$. Действительно, как мы сейчас докажем, необходимо, чтобы

$$\frac{n_+(dl)}{dl} = \int_{-\infty}^{+0} e^{l\gamma} f_{22}(d\gamma), \quad 0 \leq f_{22}(d\gamma). \quad (14)$$

Рассмотрим производящий оператор \mathfrak{G}^* первоначальной диффузии, начинающейся на $[0, +\infty)$ и останавливаемой в точке 0. Обозначим через $G = g_1 g_2$ функцию Грина, а через

$$e(\gamma, a) f(d\gamma) e(\gamma, b), \quad \gamma \leq 0, \quad a, b \geq 0, \quad (15)$$

— элемент спектрального разложения оператора \mathfrak{G}^* , где $e = (e_1, e_2)$ — решение задачи

$$\mathfrak{G}^* e = \gamma e, \quad e(0) = (1, 0), \quad e^+(0) = (0, 1), \quad (16)$$

а f — мера на $(-\infty, 0)$, значениями которой являются матрицы порядка 2×2 с элементами $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$, такими, что

$$0 \leq f_{11}, f_{22}; f_{12} = f_{21}; f_{12}^2 = f_{21}^2 \leq f_{11}f_{22} \quad (17)$$

(см. § 4.11). В силу того, что $g_1(0) = 0$, имеем

$$g_1^+(0) g_2(0) = g_1^+(0) g_2(0) - g_1(0) g_2^+(0) = 1, \quad (18)$$

и поэтому при $\varepsilon > 0$

$$G_2(\alpha, 0, \varepsilon) = g_1^+(0) g_2(\varepsilon) = \frac{g_2(\varepsilon)}{g_2(0)} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha l} P_\varepsilon \{m_0 \in dl\}. \quad (19)$$

При обращении преобразования Лапласа формула (19) переходит в

$$P_\varepsilon \{m_0 \in dl\} = \int_{-\infty}^{+0} e^{l\gamma} e^+(\gamma, 0) f(d\gamma) e^-(\gamma, \varepsilon) dl, \quad \varepsilon > 0. \quad (20)$$

Вычисляя производную этого выражения при $\varepsilon = 0$, из определения n_+ [см. (1b)] получаем, что при $l > 0$

$$\frac{n_+(dl)}{dl} = \int_{-\infty}^{+0} e^{l\gamma} e^+(\gamma, 0) f(d\gamma) e^-(\gamma, 0) = \int_{-\infty}^{+0} e^{l\gamma} f_{22}(d\gamma), \quad l > 0. \quad (21)$$

Описание класса неотрицательных распределений масс $f(d\gamma)$ на $(-\infty, 0]$, таких, что

$$n(dl) = dl \cdot \int_{-\infty}^{+0} e^{l\gamma} f(d\gamma)$$

есть мера Леви для времени, обратного к локальному, для какой-то диффузии, является открытой проблемой.

Задача 1. Проверить, что

$$n_+[l, +\infty) < \frac{-g_2^+(l^{-1}, 0)}{g_2(l^{-1}, 0)},$$

$$n[l, +\infty) < G(l^{-1}, 0, 0)^{-1}.$$

$$[n_+[l, +\infty) = \int_{-\infty}^0 |\gamma|^{-1} e^{l\gamma} f(d\gamma), \text{ где } 0 \leq f(d\gamma), \text{ значит, функция}$$

$n_+[l, +\infty)$ выпукла вниз; поэтому

$$\begin{aligned} \frac{-g_2^+(\alpha, 0)}{g_2(\alpha, 0)} &= \alpha \int_0^{+\infty} l e^{-\alpha l} n_+[l, +\infty) dl > \\ &> n_+ \left[\alpha \int_0^{+\infty} l e^{-\alpha l} dl, +\infty \right) = n_+[\alpha^{-1}, +\infty). \end{aligned}$$

Доказательство второй части аналогично.]

Задача 2. Проверить, что $n_+(0, +\infty) = n(0, +\infty) = +\infty$.

$$\begin{aligned} [n(0, +\infty)] &= \lim_{\alpha \uparrow +\infty} \int_0^{+\infty} [1 - e^{-\alpha l}] n(dl) = \\ &= \lim_{\alpha \uparrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} p(t, 0, 0) dt \right)^{-1} = +\infty. \end{aligned}$$

6.3. t и смежные интервалы множества \mathcal{Z}

Согласно (2.2.4), в случае стандартного броуновского движения, если $\mathcal{Z} = \{t: x(t) = 0\}$, то

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon}{2}} \times [\text{число интервалов длины не меньше } \varepsilon \text{ в множестве } [0, t] \setminus \mathcal{Z}] = t(t), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Здесь t — броуновское локальное время в точке 0, а $\sqrt{2/\pi \varepsilon} = \int_{\varepsilon}^{+\infty} dl / \sqrt{2\pi l^3}$ — ожидаемое число скачков процесса t^{-1} длины не меньше ε за единичное время. Мера $n(dl) = (2\pi l^3)^{-1/2} dl$ является мерой Леви для t^{-1} .

Если вместо $\sqrt{2/\pi \varepsilon}$ в (1) подставить $n[\varepsilon, +\infty)$ для произвольной диффузии, эта формула остается верной. Действительно, пусть \mathcal{Z} обозначает произвольный (открытый) интервал множества $\{t: x(t) < 0\}$, \mathcal{Z}^+ — интервал множества $\{t: x(t) > 0\}$, а n_- , n_+ и n — меры Леви для t_-^{-1} , t_+^{-1} и t^{-1} . Тогда

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\# \{\mathcal{Z}^-: \mathcal{Z}^- \subset [0, t], |\mathcal{Z}^-| \geq \varepsilon\}}{n_-[\varepsilon, +\infty)} = t(t), t \geq 0 \right\} = 1; \quad (2a)$$

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\# \{\mathcal{Z}^+: \mathcal{Z}^+ \subset [0, t], |\mathcal{Z}^+| \geq \varepsilon\}}{n_+[\varepsilon, +\infty)} = t(t), t \geq 0 \right\} = 1 \quad (2b)$$

и

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\# \{\mathcal{Z}^\pm: \mathcal{Z}^\pm \subset [0, t], |\mathcal{Z}^\pm| \geq \varepsilon\}}{n[\varepsilon, +\infty)} = t(t), t \geq 0 \right\} = 1. \quad (3)$$

Докажем соотношение (2b). Для этого рассмотрим функцию, считающую скачки:

$$\#(t, \varepsilon) = \text{число скачков процесса } t_+^{-1} \text{ величины не меньше } \varepsilon \text{ вплоть до момента } t. \quad (4)$$

Помня, что функция $n_+[\varepsilon, +\infty)$ непрерывна ($\varepsilon > 0$) и что $n_+(0, +\infty) = +\infty$, положим

$$n_+^{-1}(s) = \min \{t: n_+[t, +\infty) \leq s\}. \quad (5)$$

Процесс $[\#(t, n_+^{-1}(s)): s \geq 0, P_0]$ имеет независимые приращения с пуассоновскими распределениями. Поскольку

$$E_0[\#(t, n_+^{-1}(s))] = tn_+[n_+^{-1}(s), +\infty) = ts, \quad (6)$$

этот процесс однороден по s в качестве временного параметра, и из усиленного закона больших чисел вытекает, что

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\#(t, \varepsilon)}{n_+[\varepsilon, +\infty)} = \lim_{s \uparrow +\infty} \frac{\#(t, n_+^{-1}(s))}{s} = t, t \geq 0 \right\} = 1. \quad (7)$$

Но

$$\#(t(t), \varepsilon) = \# \{ \mathcal{Z}^+: \mathcal{Z}^+ \subset [0, t], |\mathcal{Z}^+| \geq \varepsilon \}, \quad (8)$$

если только $t^{-1}(t(t), 0) = t$, т. е. если $t \in \mathcal{Z}$ не является точкой, изолированной сверху (в \mathcal{Z}). Так как функции $\# \{ \mathcal{Z}^+: \mathcal{Z}^+ \subset [0, t], |\mathcal{Z}^+| \geq \varepsilon \}$ и $t(t)$ не убывают по t и так как множество \mathcal{Z} замкнуто и совершенно, а функция t непрерывна и постоянна вне \mathcal{Z} , то, получая из (7) усиленный закон больших чисел

$$P_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\# \{ \mathcal{Z}^+: \mathcal{Z}^+ \subset [0, t], |\mathcal{Z}^+| \geq \varepsilon \}}{n[\varepsilon, +\infty)} = t(t), t^{-1}(t) = t, t \geq 0 \right\} = 1, \quad (9)$$

мы тем самым доказываем (2b).

Доказательства формул (2a) и (3) аналогичны.

Для стандартного броуновского движения выполнялось также следующее [см. (2.2.6)]:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}} \times [\text{общая длина всех интервалов множества} \\ [0, t] \setminus \mathcal{Z} \text{ длины меньше } \varepsilon] = t(t), t > 0, \quad (10)$$

где $\sqrt{2\varepsilon/\pi}$ — ожидаемая сумма скачков функции t^{-1} величины меньше ε за единицу времени.

Естественно предположить, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_0^\varepsilon \ln_+(dl) \right)^{-1} \times [\text{общая длина всех интервалов } \mathcal{Z}^+ \subset [0, t] \\ \text{длины меньше } \varepsilon] = t(t), t \geq 0; \quad (11)$$

или, подставляя $t^{-1}(t)$ вместо t и $n_+^{-1}(s)$ вместо ε , что

$$\lim_{s \uparrow +\infty} \left(\int_0^{n_+^{-1}(s)} \ln_+(dl) \right)^{-1} \int_0^{n_+^{-1}(s)} l \#(t, dl) = \\ = \lim_{s \uparrow +\infty} \frac{\sum_{s_n > s} n_+^{-1}(s_n)}{\int_s^{+\infty} n_+^{-1}(\theta) d\theta} = t, t \geq 0. \quad (12)$$

Здесь s_n ($n \geq 1$) — моменты скачков (однородного) пуассоновского процесса $\sharp(t, n_+^{-1}(s))$: $s \geq 0$.

Из усиленного закона больших чисел следует, что

$$\lim_{n \uparrow +\infty} n^{-1}s_n = t. \quad (13)$$

Из (13) легко вывести (12), если $n_+^{-1}(s)$ является степенью от s , умноженной на такую функцию $f(s)$, что $f(ts) \sim f(s)$ при $s \uparrow +\infty$ для всех $t > 0$ [частный случай, когда $ds = d\xi$, $dm = 2|\xi|^\beta d\xi$ ($\beta > -1$), $dn = \text{const} \cdot l^{-(1+\alpha)} dl$, $\alpha = (\beta+2)^{-1}$, см. (6.7.4)]. Но в общем случае формула (11) неверна, как показывает контрпример, приводимый в следующем параграфе.

6.4. Контрпример, касающийся t и смежных интервалов множества \mathfrak{Z}

Формула (6.3.11), вообще говоря, неверна: например, может быть $0 < c_1 < e^s n_+^{-1}(s) < c_2 < +\infty$ при $s \uparrow +\infty$, и тогда из (6.3.11) вытекало бы, что $\lim_{n \uparrow +\infty} \overline{e^{s_n}} \sum_{k \geq n} e^{-s_k} \leq c_2/c_1 < +\infty$, что противоречило бы тому, что распределение $e^{s_n} \sum_{k \geq n} e^{-s_k}$ не зависит от n и имеет своим носителем весь луч $[1, +\infty)$.

Чтобы построить диффузию с такой мерой n_+ , рассмотрим функцию $\psi(t) = (1/2) \int_0^t s \Gamma(s+1)^{-1} ds$ и обратную к ней функцию θ и пусть \mathfrak{G} — производящий оператор диффузии с естественной шкалой и мерой скорости $dm = (1/4)(\theta')^2 d\xi$ на $[0, +\infty)$.

Рассмотрим возрастающее и убывающее решения g_1 и g_2 уравнения $\mathfrak{G}g = \alpha g$, такие, что $g_1^+ g_2 - g_1 g_2^+ = 1$, $g_1(0) = 1$, $g_1^+(0) = 0$.

Функция $g_3 = g_1(\xi) \int_{\xi}^{+\infty} g_1^{-2} d\eta$ удовлетворяет условиям $g_3^+ < 0$, $\mathfrak{G}g_3 = \alpha g_3$ и $g_3^+(0) = g_2^+(0) = -1$. Поэтому $g_3 = g_2$, а значит,

$$g_2(0) = \int_0^{+\infty} g_1^{-2} d\xi. \quad (1)$$

При $t > 0$ имеем $0 < \psi'(t) \in \downarrow$, так что $0 < \theta'(t) \in \uparrow$ и $\theta''(t) > 0$. Далее, функция $\psi(e^t)$ выпукла вниз; поэтому функция $\ln \theta(t)$ выпукла вверх и $\theta''(\theta')^{-2} < \theta^{-1}$. Кроме того, $\psi'(+0) = +\infty$, поэтому $\theta'(+0) = 0$; и, полагая $g_4(\theta) = g_1(\xi)$, из сказанного выше

и из того, что $\mathcal{G}g_1 = \alpha g_1$, выводим, что

$$g_4''(\theta) + \theta''(\theta')^{-2} g_4'(\theta) = \frac{\alpha}{4} g_4(\theta), \quad (2)$$

$$g_4(+0) = 1,$$

$$g_4'(+0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{g_4'(\varepsilon)}{\theta'(\varepsilon)} \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} 4\alpha g_1(\varepsilon) \theta'(\varepsilon) = 0,$$

и при $\theta > 0$

$$g_4'' < \frac{\alpha}{4} g_4 < g_4'' + \theta^{-1} g_4'. \quad (3)$$

Но тогда

$$I_0\left(\sqrt{\alpha} \frac{\theta}{2}\right) < g_4(\theta) < e^{\sqrt{\alpha}\theta/2}, \quad (4)$$

и из равенства (1) вытекает, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{\alpha}\theta} d\xi < g_2(0) < \int_0^{+\infty} I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}\theta\right)^{-2} d\xi <$$

$$< \frac{\ln \alpha}{\sqrt{\alpha}} + \int_{\ln \alpha / \sqrt{\alpha}}^{+\infty} I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}\theta\right)^{-2} d\xi < \frac{\ln \alpha}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{\alpha}\theta} d\xi, \quad (5)$$

где $\gamma \uparrow 1$ при $\alpha \uparrow +\infty$ и не зависит от ξ (используется то, что $I_0(\xi) \sim e^{\xi}/\sqrt{2\pi\xi}$ при $\xi \uparrow +\infty$).

С помощью равенства

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{\alpha}\theta} d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{\alpha}t} \psi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha^{-s/2} ds = \frac{1 - \alpha^{-1/2}}{\ln \alpha} \quad (6)$$

находим, что

$$\frac{1 - \alpha^{-1/2}}{\ln \alpha} < g_2(0) < \frac{1 - (\gamma\alpha)^{-1/2}}{\ln \gamma\alpha}, \quad \alpha \uparrow +\infty. \quad (7)$$

Отсюда в силу соотношения

$$g_2(0)^{-1} = [g_1(0) g_2(0)]^{-1} = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\alpha l}) n_+(dl) =$$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha l} n_+[l, +\infty) dl \quad (8)$$

вытекает, что

$$\frac{\ln \gamma\alpha}{1 - (\gamma\alpha)^{-1/2}} < \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha l} n_+[l, +\infty) dl < \frac{\ln \alpha}{1 - \alpha^{-1/2}}, \quad \alpha \uparrow +\infty. \quad (9)$$

Но $n_+(dl)/dl$ является преобразованием Лапласа от (положительной) спектральной меры $f(d\gamma)$. Поэтому функция $n_+[l, +\infty] =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma|^{-1} e^{l\gamma} f(d\gamma) \text{ выпукла вниз, откуда мы заключаем, что}$$

$$\frac{\ln \alpha}{1 - \alpha^{-1/2}} > \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha l} n_+[l, +\infty) dl > n_+ \left[\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha l} dl, +\infty \right) =$$

$$= n_+ \left[\frac{1}{\alpha}, +\infty \right), \alpha \uparrow +\infty. \quad (10)$$

С другой стороны, так как теперь известно, что функция $|\ln l|/(1 - \sqrt{l} - n_+[l, +\infty))$ положительна, а функции $n_+[l, +\infty)$ и $|\ln l|/(1 - \sqrt{l})$ убывают при малых l , то

$$2e^{-1} \left[\frac{\ln \alpha}{1 - \alpha^{-1/2}} - n_+ \left[\frac{1}{2\alpha}, +\infty \right) \right] <$$

$$< \frac{\alpha}{e} \int_{1/2\alpha}^{1/\alpha} \left[\frac{|\ln l|}{1 - \sqrt{l}} - n_+[l, +\infty) \right] dl <$$

$$< e^{-\alpha/3} - \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha l} [|\ln l| \cdot (1 + 2\sqrt{l}) + n_+[l, +\infty)] dl <$$

$$< e^{-\alpha/3} + \ln \alpha - \int_0^{+\infty} e^{-l} \ln l dl +$$

$$+ \frac{\ln \alpha}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-l} \sqrt{l} dl - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-l} \sqrt{l} \ln l dl - \frac{\ln \gamma \alpha}{1 - (\gamma \alpha)^{-1/2}} <$$

$$< \text{const} \cdot \frac{\ln \alpha}{\sqrt{\alpha}} - \int_0^{+\infty} e^{-l} \ln l dl < \frac{3}{2}, \alpha \uparrow +\infty. \quad (11)$$

Отсюда

$$|\ln l| - 4 < \frac{\left| \ln \frac{l}{2} \right|}{1 - \sqrt{\frac{l}{2}}} - \frac{3e}{4} < n_+[l, +\infty) < |\ln l| + 1, l \downarrow 0, \quad (12)$$

что доказывает нужную нам оценку

$$c_1 e^{-s} < n_+^{-1}(s) < c_2 e^{-s}, s \uparrow +\infty, \quad (13)$$

с $c_1 = e^{-4}$ и $c_2 = e$.

6.5а. t и пересечения сверху вниз

Поскольку утверждение

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} s [0, \varepsilon) \times [\text{число раз, когда } x(s): s < t \text{ пересекает полосу от } \varepsilon \text{ до } 0 \text{ в направлении сверху вниз}] = t(t) \quad (1)$$

верно для стандартного броуновского движения (см. § 2.4) и инвариантно относительно замены времени $t \rightarrow t^{-1}$ [см. (5.4.1b)], оно остается справедливым также и в данном случае.

6.5b. t как мера Хаусдорфа

Пусть $t_2 > t_1$. Обозначим через z^- и z^+ первый и последний корни уравнения

$$x(s) = 0: t_1 \leq s \leq t_2$$

(если корней нет, $z^- = z^+ = 0$). Пусть $t(t)$ — локальное время в точке 0. Тогда почти так же, как в § 2.5, получаем, что

$$E_0 \{t(t_2) - t(t_1) | x(s): s \leq t_1, z^-, z^+, x(s): s \geq t_2\} = E_0 \{t(t) | x(t) = 0\} = \\ = \frac{\int_0^t p(\theta, 0, 0) p(t - \theta, 0, 0) d\theta}{p(t, 0, 0)} \equiv h(t), \quad t = z^+ - z^-, \quad (1)$$

где $p(t, \xi, \eta)$ — переходная плотность, рассмотренная в § 4.11. Отсюда вытекает (ср. § 2.5), что

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \sum_{i \leq 2^n} h(\text{diam } \mathcal{Z} \cap [(i-1)2^{-n}t, i2^{-n}t]) = t(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $\mathcal{Z} = \{t: x(t) = 0\}$. Доказательство предоставляется читателю в качестве задачи.

Поэтому t — нечто вроде хаусдорфовой¹⁾ h -меры подмножества \mathcal{Z} ; представляется правдоподобным, что $h(+0) = 0$ и что $h(t) \in \uparrow$ при малых t , но доказательство этого нам неизвестно.

6.5с. t как диффузия

Д. Б. Рэй [4] доказал, что для некоторого класса марковских моментов, включающего экспоненциальные моменты, независимые от диффузии, и моменты первого достижения, условные локальные времена $\{t(e, \xi): \xi \in Q, P_{ab}(B) = P_a\{B | x_e = b\}\}$ можно описать при

¹⁾ Определение хаусдорфовой меры см. в замечании 2.5.2.

помощи двумерного и четырехмерного бesselевского движения так же, как в § 2.8. Выражение $t(m_1, \xi)$ не меняется при заменах времени, поэтому случай момента первого достижения остается без изменений. Что же касается описания $t(e, \xi)$ для экспоненциального момента e с условным распределением $P\{e > t | B\} = e^{-t}$, то оно остается прежним, за исключением того, что приходится учитывать концы интервала, на котором происходит диффузия, и бesselевский процесс нормируется при помощи решений уравнения $\mathcal{G}g = g$, а не при помощи функций $e^{\pm \xi}$, использованных в § 2.8.

6.5d. Экскурсии

Г. П. Маккин [5] описал экскурсии $[x(t): t \in \mathbb{Z}_n, P_0]$ ($n \geq 1$), соответствующие смежным интервалам множества $\mathbb{Z} = \{t: x=0\}$, в случае $Q = [0, +\infty)$ и $u^+(0)=0$, $u \in D(\mathcal{G})$. Здесь нельзя оставить ту же нормировку, которая применялась для стандартного броуновского движения; но в остальном описание, данное в § 2.9 и 2.10, сохраняется неизменным, за исключением того, что трехмерный бesselевский процесс заменяется диффузией, связанной с оператором $\mathcal{G}^* = h^{-1}\mathcal{G}h$, где $h = h(\gamma, \cdot)$ — решение задачи

$$\mathcal{G}h = \gamma h, \quad h(0) = 0, \quad h^+(0) = 1, \quad (1)$$

а

$\gamma = \gamma_1$ (наибольший отрицательный корень

$$\text{уравнения } h^-(\gamma, +\infty) = 0) \quad (2a)$$

или

$$\gamma = 0 \quad (2b)$$

в зависимости от того, является точка $+\infty$ входом или нет. Оператор \mathcal{G}^* можно также описать как производящий оператор первоначального движения *при условии*, что оно не достигает 0 в течение положительного времени.

6.6. Размерности¹⁾

Используем время t^{-1} , обратное к локальному, для того чтобы доказать, что *размерность* $\gamma = \dim \mathbb{Z}$ множества $\mathbb{Z} = \{t: x=0\}$ *постоянна*; например, как мы видели в § 2.5, для стандартного броуновского движения $\dim \mathbb{Z} = 1/2$.

Для доказательства рассмотрим разбиение Ω отрезка $[0, 1]$ на конечное число неперекрывающихся отрезков Q_i : $i \leq n$ с рациональными концами. Пусть $|\Omega| = \max_{i \leq n} |Q_i|$, и положим $e_i = 0$ или 1 в зависимости от того, $\mathbb{Z} \cap Q_i = \emptyset$ или нет ($i \leq n$).

¹⁾ Определение размерностей Хаусдорфа — Безикевича см. в замечании 2.5.2.

При фиксированном $0 \leq \alpha \leq 1$ легко видеть, что $\sum_{i \leq n} e_i |Q_i|^\alpha$ — борелевская функция от траектории $x(t): t \leq 1$. Так как класс возможных разбиений Ω счетен, то

$$\wedge^\alpha (\mathcal{Z} \cap [0, 1]) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{|\Omega| < \varepsilon} \sum_{i \leq n} e_i |Q_i|^\alpha \quad (1)$$

— также борелевская функция. Вспоминая определение размерности, получаем отсюда, что $\dim(\mathcal{Z} \cap [0, 1])$, а значит, и

$$\gamma = \dim(\mathcal{Z}) = \sup_{n \geq 1} \dim(\mathcal{Z} \cap [n-1, n])$$

являются борелевскими функциями от траектории.

Если $m(0) > 0$, то при любом $t > 0$

$$\begin{aligned} \text{mes}\{\mathcal{Z} \cap [0, t^{-1}(t))\} &= \text{mes}\{s: x(s) = 0, s \leq t^{-1}(t)\} = \\ &= t(t^{-1}(t)) m(0) = tm(0) > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

так что $\gamma = 1$.

Рассмотрим теперь случай $m(0) = 0$. Пусть \mathfrak{W} обозначает множество значений $\{t^{-1}(t): t > 0\}$. Тогда $\mathcal{Z} \supset \mathfrak{W}$, причем $\mathcal{Z} \setminus \mathfrak{W}$ — счетное множество; поэтому $\dim(\mathfrak{W}) = \gamma$ — борелевская функция.

Но из свойств пуассоновского интеграла $\int_0^{+\infty} l p([0, t] \times dl)$, дающего

выражение для t^{-1} , вытекает, что случайная величина $\gamma = \dim(\mathfrak{W})$ измерима относительно $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{B}\{p(dt \times dl): t \geq 0, l \leq n^{-1}\}$; поэтому

в силу независимости приращений процесса p и колмогоровского закона 0—1 она постоянна.

Задача 1. Для траекторий, выходящих из 0, $\gamma = \dim \mathcal{Z} = \dim(\mathcal{Z} \cap [0, \varepsilon))$ при любом $\varepsilon > 0$.

6.7. Критерии сравнения

Рассмотрим $\gamma = \dim \mathcal{Z}$ как функцию меры скорости m . Поскольку замена времени $t \rightarrow \varepsilon t$ переводит $t^{-1}(t)$ в $\varepsilon^{-1}t^{-1}(\varepsilon t)$ и \mathcal{Z} в $\varepsilon^{-1}\mathcal{Z}$, ясно, что

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{Z} &= \dim\{t^{-1}(t): t \leq 1\} = \dim \varepsilon^{-1}\mathcal{Z} = \dim\{t^{-1}(\varepsilon t): t \leq 1\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \dim \mathcal{Z} \cap [0, t^{-1}(\varepsilon)]; \end{aligned} \quad (1)$$

а так как $t^{-1}(\varepsilon) \downarrow m_0$ при $\varepsilon \downarrow 0$, то γ является локальной функцией от m , т. е. зависит только от поведения m в ближайшей окрестности 0.

Пусть дана пара диффузий D и D^* с мерами скорости m и $m^* \leq m$; докажем, что $\gamma^* \leq \gamma$.

Доказательство несложно; действительно, если мы рассмотрим замену времени $t \rightarrow \bar{t}^{-1}(t)$ ($\bar{t} = \int t dm^*$), переводящую x в $x^* = x(\bar{t}^{-1})$, то ясно, что \bar{t}^{-1} отображает $\mathcal{Z}^* = \{t: x^* = 0\}$ в $\mathcal{Z} = \{t: x = 0\}$; а так как $(\bar{t}(\bar{t}^{-1}) \equiv t$, то отсюда вытекает, что $\mathcal{Z}^* \subseteq \bar{t}(\mathcal{Z})$. Используя соотношения

$$\bar{t}(dt) = \int t(dt, \xi) m^*(d\xi) \leq \int t(dt, \xi) m(d\xi) = dt \quad (2)$$

и результат О. Фростмана, приводимый в замечании, заключаем, что

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{Z}^* &\leq \dim \bar{t}(\mathcal{Z}) = \sup \left\{ \alpha: \inf_{\substack{e \geq 0 \\ e(\bar{t}(\mathcal{Z}))=1}} \int_{\bar{t}(\mathcal{Z}) \times \bar{t}(\mathcal{Z})} \frac{e(da) e(db)}{|a-b|^\alpha} < +\infty \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \alpha: \inf_{\substack{e \geq 0 \\ e(\mathcal{Z})=1}} \int_{\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}} \frac{e(da) e(db)}{|f(a)-f(b)|^\alpha} < +\infty \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \alpha: \inf_{\substack{e \geq 0 \\ e(\mathcal{Z})=1}} \int_{\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}} \frac{e(da) e(db)}{|a-b|^\alpha} < +\infty \right\} = \dim \mathcal{Z}, \end{aligned} \quad (3)$$

что и требовалось доказать.

Автоматически получаем, что если $m^* \leq m$ вблизи 0, то $\gamma^* \leq \gamma$.

Вычислим \bar{t}^{-1} и γ в частном случае

$$s(d\xi) = d\xi, \quad m(d\xi) = 2|\xi|^\beta d\xi, \quad Q = R^1, \quad \beta > -1. \quad (4)$$

Оказывается, что \bar{t}^{-1} — устойчивый процесс с характеристическим показателем $\gamma = \dim \mathcal{Z} = (\beta + 2)^{-1}$; этот запас размерностей приводит к критерию сравнения, который позволит нам определить размерность множества нулей для большинства диффузий, встречающихся на практике.

Пусть $\beta > -1$, $\alpha > 0$. Решение $g_2 = g_2(\alpha, \xi)$ задачи

$$\alpha g_2(\xi) = \frac{1}{2} |\xi|^{-\beta} g_2''(\xi), \quad g_2 \in \downarrow, \quad g_2(+\infty) = 0, \quad g_2(0) = 1, \quad (5)$$

не меняется при подстановке

$$\alpha \rightarrow c\alpha, \quad \xi \rightarrow \frac{\xi}{c^\gamma}, \quad \gamma = (\beta + 2)^{-1}, \quad c > 0; \quad (6)$$

т. е.

$$g_2(\alpha, \xi) = g_2(1, \alpha^\gamma \xi). \quad (7)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\alpha l}) n(dl) &= 2 \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\alpha l}) n_+(dl) = \\ &= -2 \frac{g_1^2(\alpha, 0)}{g_2(\alpha, 0)} = -2\alpha^\gamma \frac{g_1^2(1, 0)}{g_2(1, 0)}, \quad \alpha \geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

что доказывает, что t^{-1} — устойчивый процесс с характеристическим показателем $\gamma = (\beta + 2)^{-1}$.

Из формулы (8) получаем $p(t) = p(t, 0, 0) = \text{const} \cdot t^{\gamma-1}$, откуда выводим, что функция Хаусдорфа $h = p^{-1}p * p$, введенная в § 6.5b, является постоянной, умноженной на t^γ . Теперь из (6.5b.2) вытекает, что $\dim \mathcal{Z} \leq \gamma$; а так как

$$\begin{aligned} E_0 \left(\int_{\mathcal{Z} \cap [0, t^{-1}(1)] \times \mathcal{Z} \cap [0, t^{-1}(1)]} |s - t|^{-\alpha} t(ds) t(dt) \right) &= \\ &= E_0 \left(\int_0^1 \int_0^1 |t^{-1}(s) - t^{-1}(t)|^{-\alpha} ds dt \right) = \\ &= \text{const} \cdot \int_0^1 ds \int_0^1 dt \int_0^{+\infty} \theta^{\alpha-1} d\theta E_0(e^{-\theta t^{-1}(|t-s|)}) = \\ &= \text{const} \cdot \int_0^1 ds \int_0^1 dt \int_0^{+\infty} \theta^{\alpha-1} d\theta e^{-\text{const} \cdot |t-s| \theta^\gamma} = \\ &= \text{const} \cdot \int_0^1 \int_0^1 |s - t|^{\alpha/\gamma} ds dt < +\infty, \quad \alpha < \gamma, \end{aligned} \quad (9)$$

то из леммы Фростмана вытекает, что

$$\dim \mathcal{Z} = \sup \left\{ \alpha: \inf_{\substack{e \geq 0 \\ e(\mathcal{Z})=1}} \int_{\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}} \frac{e(da) e(db)}{|a-b|^\alpha} < +\infty \right\} \geq \gamma, \quad (10)$$

и доказательство закончено.

Теперь мы можем сформулировать наш критерий сравнения так: если $s(d\xi) = d\xi$, $\beta > -1$ и $m(d\xi) \geq (\leq) \text{const} \cdot |\xi|^\beta d\xi$ вблизи точки $\xi = 0$, то $\gamma = \dim \mathcal{Z} \geq (\leq) (\beta + 2)^{-1}$. Доказательство ясно.

Дополнительные сведения, относящиеся к вычислению размерностей, можно найти у Блюментала и Гетура [1].

Задача 1. Может ли $\gamma = 0$ выступать в качестве размерности множества моментов пребывания \mathcal{Z} для некоторой диффузии?

[Пусть $s(d\xi) = d\xi$, а $m(d\xi) = e^{-|\xi|^{-1}} d\xi$; тогда $m(d\xi) \leq |\xi|^\beta d\xi$ вблизи $\xi = 0$ при любом $\beta > -1$, откуда $\gamma \leq \inf_{\beta > -1} (\beta + 2)^{-1} = 0$.]

Замечание 1. Размерности и емкости дробного порядка. Мы используем результат О. Фростмана [1], состоящий в том, что для компакта $B \subset [0, +\infty)$

$$\dim B = \sup \left\{ \beta : \inf_e \int \frac{e(da) e(db)}{|a-b|^\beta} < +\infty \right\}, \quad (1)$$

где e пробегает множество всех неотрицательных мер с полной массой $+1$, сосредоточенных на B .

Приведем доказательство.

Пусть $\beta > 0$ таково, что $+\infty > \int |a-b|^{-\beta} e(da) e(db)$. Выберем такой компакт $Q \subset B$, что $e(Q) > 0$ и $\int_Q |a-b|^{-\beta} e(db) \leq \kappa < +\infty$ ($a \in Q$), и покроем его замкнутыми отрезками Q_n ($n \geq 1$). Так как

$$0 < e(Q) \leq \sum_{n \geq 1} e(Q \cap Q_n) \leq \sum_{n \geq 1} |Q_n|^\beta \inf_{a \in Q \cap Q_n} \int_{Q \cap Q_n} |a-b|^{-\beta} e(db) \leq \sum_{n \geq 1} |Q_n|^\beta \cdot \kappa, \quad (2)$$

то сразу же получаем, что

$$\wedge^\beta(B) \geq \wedge^\beta(Q) \geq \frac{e(Q)}{\kappa} > 0, \quad (3)$$

а это доказывает, что

$$\dim(B) \geq \beta. \quad (4)$$

Чтобы закончить доказательство, достаточно проверить, что

$$+\infty > \inf \int |a-b|^{-\beta} e(da) e(db) \quad \text{при } \beta < \dim(B).$$

Выберем α между β и $\dim(B)$; тогда $\wedge^\alpha(B) = +\infty$. В этом случае А. С. Безикович [2] показал, что можно выбрать такой компакт $Q_1 \subset B$, что

$$0 < \wedge^\alpha(Q_1) < +\infty. \quad (5)$$

Далее, согласно результатам Безиковича [1], можно выбрать такой компакт $Q_2 \subset Q_1$, что

$$0 < \wedge^\alpha(Q_2) < +\infty \quad (6)$$

и

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-\alpha} \wedge^\alpha(Q_2 \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)) \leq 1, \quad a \in Q_2. \quad (7)$$

Теперь выберем такой компакт $Q_3 \subset Q_2$, что

$$0 < \wedge^\alpha(Q_3) < +\infty \quad (8)$$

и для какого-то $\delta > 0$

$$(2\varepsilon)^{-\alpha} \wedge^\alpha(Q_3 \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)) < 2, \quad \varepsilon < \delta, \quad a \in Q_3. \quad (9)$$

Положим

$$e(db) = \wedge^\alpha(Q_3)^{-1} \wedge^\alpha(Q_3 \cap db); \quad (10)$$

тогда

$$\begin{aligned} & \int_{B \times B} \frac{e(da) e(db)}{|a-b|^\beta} = \\ &= \int_{Q_3} e(da) \left[\int_{|a-b| \geq \delta} \frac{e(db)}{|a-b|^\beta} + \sum_{n \geq 1} \int_{2^{-n}\delta \leq |a-b| < 2^{-n+1}\delta} \frac{e(db)}{|a-b|^\beta} \right] \leq \\ &\leq \int_{Q_3} e(da) \left[\delta^{-\beta} + \sum_{n \geq 1} (2^{-n}\delta)^{-\beta} \cdot 2 \cdot (2^{-n+1}\delta)^\alpha \right] = \\ &= \delta^{-\beta} + 2^{2+\alpha} \delta^{\alpha-\beta} \sum_{n \geq 1} 2^{-n(\alpha-\beta)} < +\infty, \quad (11) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

6.8. Индивидуальная эргодическая теорема ¹⁾

Рассмотрим возвратную диффузию D на отрезке Q со шкалой s , мерой скорости m и локальными временами t . Для любой неотрицательной меры e определим интеграл от локального времени (аддитивный функционал)

$$e(t) = \int t(t, \xi) e(d\xi) \quad (1)$$

и докажем, что

$$P. \left\{ \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{e_1(t)}{e_2(t)} = \frac{e_1(Q)}{e_2(Q)} \right\} = 1, \text{ если } 0 < e_2(Q) < +\infty. \quad (2)$$

Дерман [1] доказал частный случай формулы (2)

$$P. \left\{ \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{\int_0^t f[x(s)] ds}{\int_0^t g[x(s)] ds} = \frac{\int_Q f dm}{\int_Q g dm} \right\} = 1 \quad (3)$$

¹⁾ В § 7.17 содержатся аналогичные результаты для двумерного броуновского движения.

для стандартного броуновского движения, пользуясь тем же методом В. Доблина [1], который мы используем ниже. См. также М. Мотоо и Х. Ватанабе [1].

Пусть $a < b$; обозначим через $m^1 < m^2 < \dots$ последовательные моменты первого достижения a через b , т. е.

$$m^n = m^{n-1} + m(w_{m^{n-1}}^+) \quad (n \geq 1), \quad (4)$$

$$m^0 = m_a, \quad m = m_b + m_a(w_{m_b}^+).$$

Так как экскурсии $x(t): m^{n-1} \leq t \leq m^n$ ($n \geq 1$) независимы и имеют одинаковые распределения, то то же можно сказать о приращениях e :

$$e_n = e(m^n) - e(m^{n-1}) \quad (n \geq 1). \quad (5)$$

Используя усиленный закон больших чисел и результат задачи 1

$$E_a[t(m, \xi)] = s(b) - s(a), \quad (6)$$

получаем, что

$$P_a \left\{ \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{e(m^n)}{n} = [s(b) - s(a)] e(Q) \right\} = 1, \quad (7)$$

т. е.

$$P_a \left\{ \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{e(t)}{\min \{n: m^n \geq t\}} = [s(b) - s(a)] e(Q) \right\} = 1. \quad (8)$$

Отсюда следует формула (1).

Кроме формулы (3), еще есть несколько интересных частных случаев формулы (2), а именно

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \frac{\text{mes} \{s: x(s) \in A, s \leq t\}}{\text{mes} \{s: x(s) \in B, s \leq t\}} = \frac{m(A)}{m(B)}, \quad (9)$$

$$0 < m(B) < +\infty, \quad A, B \in \mathcal{B}(Q);$$

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \frac{e(t)}{t(t, a)} = e(Q), \quad a \in Q; \quad (10)$$

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \frac{t(t, a)}{t(t, b)} = 1, \quad a, b \in Q, \quad (11)$$

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \frac{e(t)}{t} = \frac{e(Q)}{m(Q)}, \quad e(Q) < +\infty; \quad (12)$$

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \frac{t(t, a)}{t} = m(Q)^{-1}, \quad a \in Q \quad (13)$$

(если $m(Q) = +\infty$, то в (12) и (13) полагаем $1/+\infty = 0$).

Если D — стандартное броуновское движение, то

$$\lim_{t \uparrow +\infty} P. \left\{ \frac{2e(t)}{e(R^1) \sqrt{t}} \leq b \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^b e^{-c^2/2} dc, \quad (14)$$

$$b \geq 0, \quad 0 < e(R^1) < +\infty.$$

В частном случае $e(d\xi) = f d\xi$ эта формула переходит в закон Каллианпура — Роббинса [1]

$$\lim_{t \uparrow +\infty} P. \left\{ \frac{\int_0^t f[x(s)] ds}{\sqrt{t} \int f d\xi} \leq b \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^b e^{-c^2/2} dc, \quad (15)$$

$$b \geq 0, \quad 0 < \int f d\xi < +\infty.$$

Формула (14) выводится из (9) и свойств броуновских локальных времен следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow +\infty} P_a \left\{ \frac{2e(t)}{e(R^1) \sqrt{t}} \leq b \right\} &= \\ &= \lim_{t \uparrow +\infty} P_a \left\{ \frac{e(t)}{t(t, a) e(R^1)} \cdot \frac{2t(t, a)}{\sqrt{t}} \leq b \right\} = \\ &= \lim_{t \uparrow +\infty} P_a \left\{ \frac{2t(t, a)}{\sqrt{t}} \leq b \right\} = \lim_{t \uparrow +\infty} P_0 \left\{ \frac{2t(t, 0)}{\sqrt{t}} \leq b \right\} = \\ &= P_0 \{2t(1, 0) \leq b\} = P_0 \{t^+(1) \leq b\} = P_0 \{t^-(1) \leq b\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^b e^{-c^2/2} dc \end{aligned}$$

(относительно t^+ и t^- см. § 2.1).

Если $e(Q) < +\infty$, то, согласно (12), $\lim_{t \uparrow +\infty} t^{-1}e(t) = e(Q)/m(Q)$, и интересно описать поведение $e^* = e - te(Q)/m(Q)$ при $t \uparrow +\infty$. Х. Танака [1] решил эту задачу в частном случае $Q = R^1$, $s(b) - s(a) = b - a$, $m(Q) < +\infty$, показав, что если имеем $\sigma^2 m(Q) \equiv \int_Q m(0, b)^2 db < +\infty$, то

$$\lim_{t \uparrow +\infty} P. \left\{ a \leq \frac{e^*(t)}{\sigma \sqrt{2t}} < b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-c^2/2} dc$$

и

$$P. \left\{ \overline{\lim}_{t \uparrow +\infty} e^*(t) / \sigma \sqrt{2t \ln \ln t} = 1 \right\} = 1.$$

Задача 1. Вывести формулу (6) из результата задачи 2.8.3. [Так как $t(m, \xi)$ не меняется при замене времени, достаточно доказать, что

$$E_a[t(m, \xi)] = b - a, \quad m = m_b + m_a(w_{mb}^+), \quad a < b, \quad (17)$$

для стандартного броуновского движения. Используя задачу 2.8.3, получаем в случае $a < \xi < b$, что

$$E_a[t(m, \xi)] = E_\xi[t(m_b, \xi)] + E_\xi[t(m_a, \xi)] = (b - \xi) + (\xi - a) = b - a.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.]

Задача 2. Дать другое доказательство формулы (15), используя свойства инвариантности броуновского движения при изменениях масштабов времени и пространства.

[Пусть имеется стандартное броуновское движение, начинающееся в 0; с помощью замены $x(s) \rightarrow tx(s/t^2)$ получаем, что $t(t, \xi)$ имеет такое же распределение, как $\sqrt{t}t(1, \xi/t)$; поэтому $2 \int t d\epsilon(R^1) \sqrt{t}$ совпадает по распределению с

$$\frac{2}{e(R^1)} \int t \left(1, \frac{\xi}{t}\right) e(d\xi) \sim 2t(1, 0).]$$

Задача 3. Показать, как можно вычислить инварианты возвратной диффузии по траектории.

[Формула (9) дает возможность вычислить меру скорости с точностью до постоянного множителя; зафиксировав эту меру, можно получить шкалу, используя частный случай формулы (7)

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \frac{t(m^n, \xi)}{n} = s(b) - s(a).]$$

Задача 4. Рассмотрим бесселевский процесс с производящим оператором $\mathcal{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)$. С помощью соотношения

$$\lim_{n \uparrow +\infty} P. \{ \sqrt[n]{m^n} < t \} = \begin{cases} 4^{-1/\ln t} & (t > 1), \\ 0 & (t \leq 1), \end{cases} \quad (18)$$

справедливого для последовательных моментов m^n первого достижения 1 через 2, проверить формулу

$$\lim_{t \uparrow +\infty} P. \left\{ \frac{2e(t)}{\ln t} < ue(0, +\infty) \right\} = 1 - e^{-u}. \quad (19)$$

Эта формула является аналогом закона (14) Каллианпура—Роббинса; она будет использована в § 7.17 (результат, связанный с этим, см. в задаче. 4.6.4).

[Воспользуйтесь формулами

$$E_1(e^{-\alpha m_2}) = \frac{I_0(\sqrt{2\alpha})}{I_0(2\sqrt{2\alpha})}, \quad E_2(e^{-\alpha m_1}) = \frac{K_0(2\sqrt{2\alpha})}{K_0(\sqrt{2\alpha})},$$

и оценками $K_0(x) \sim -\ln x$ и $I_0(x) - 1 \sim x^2/4$ при $x \downarrow 0$ для проверки формулы

$$E.(e^{-\alpha t - n m^n}) \sim \left(1 - \frac{\ln 4}{n \ln t}\right)^n \sim 4^{-1/\ln t},$$

из которой вытекает (18). Для того чтобы доказать (19), достаточно проверить соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow +\infty} P. \left\{ \frac{2e(t)}{\ln t} < u \right\} &= \lim_{n \uparrow +\infty} P. \left\{ \frac{2e(m^n)}{\ln m^n} < u \right\} = \\ &= \lim_{n \uparrow +\infty} P. \left\{ \frac{2e(m^n)}{n \ln \sqrt[n]{m^n}} < u \right\} = \lim_{n \uparrow +\infty} P. \left\{ \frac{2 \ln 2e(0, +\infty)}{\ln \sqrt[n]{m^n}} < u \right\} \end{aligned}$$

и заметить, что $s(r) = \ln r$; далее замените u на $ue(0, +\infty)$ и для завершения доказательства формулы (19) используйте (18).]

МНОГОМЕРНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

7.1. Многомерная диффузия

Пусть дано хорошее топологическое пространство Q (например, дифференцируемое многообразие какого-либо числа измерений). Обозначим через ∞ дополнительную точку, которая будет *изолированной* или *будет дополнять Q до компакта* в зависимости от того, компактно Q или нет. Пусть $C_\infty(Q)$ — пространство таких ограниченных непрерывных функций $f: Q \cup \infty \rightarrow R^1$, что $f(\infty) \equiv 0$. Введем такие (непрерывные) *траектории* $w: t \rightarrow x(t) \in Q \cup \infty$, что $x(t) \in Q (t < \infty)$, а $x(+\infty) \equiv \infty$, и определим *марковские моменты* m , *сдвинутые траектории* w_m^+ и σ -алгебры B и B_{m+0} обычным образом. Рассмотрим *вероятности* $P_a(B)$ ($a \in Q \cup \infty$, $B \in B$) с обычными свойствами, включая $P_\infty\{x(t) \equiv \infty (t \geq 0)\} = 1$. Назовем связанное с этими объектами движение *диффузией*, если оно *начинается заново в любой марковский момент, т. е. если*

$$P_a\{w_m^+ \in B \mid B_{m+0}\} = P_b(B), \quad a \in Q, \quad B \in B, \quad (1)$$

$$b = x(m), \quad m < +\infty,$$

для любого марковского момента m , и если это движение *гладко*, т. е. если операторы Грина $G_\alpha: f \rightarrow E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f dt \right]$ переводят $C_\infty(Q)$ в себя:

$$G_\alpha C_\infty \subseteq C_\infty, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

Условия (1) и (2) не являются независимыми.

Р. Блюменталь [1] доказал, что если движение *просто марковское*, т. е. начинается заново в любой *постоянный* момент $t \geq 0$, и если оно также *гладко* в смысле (2), то условие (1) автоматически выполнено (в доказательство этого факта для случая стандартного броуновского движения, приведенное в § 1.6, легко внести соответствующие изменения).

Учитывая результат § 3.6, естественно предположить, что при выполнении только условия (1) операторы Грина переводят в себя

некоторое пространство, играющее ту же роль, что $C_\infty(Q)$ (об этом см. Е. Б. Дынкин [1], Г. П. Маккин и Х. Танака [1] и в особенности Д. Б. Рэй [3]).

Если дана диффузия в том смысле, который придан этому термину выше, то, так же как в (3.7.1),

$$G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta = 0. \quad (3)$$

Это позволяет воспользоваться обычным определением *производящего оператора*

$$\mathfrak{G} = 1 - G_1^{-1}, \quad (4a)$$

$$D(\mathfrak{G}) = G_1 C_\infty(Q), \quad (4b)$$

и вывести *формулу Дынкина*

$$E. [u(x_m)] - u = E. \left[\int_0^m (\mathfrak{G}u)(x_t) dt \right], \quad u \in D(\mathfrak{G}), \quad (5)$$

где $m = \min \{t : x(t) \notin B\}$ — это (марковский) момент первого выхода из открытой области $B \subset Q$. Из этой формулы вытекает, что если B — окрестность точки $a \in Q$, то *либо* $P_a \{m = +\infty\} = 1$ для всех B , *либо* $E_a(m) < +\infty$ для достаточно малых B ; в обоих случаях

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \lim_{B \downarrow a} \frac{E_a[u(x_m)] - u(a)}{E_a(m)}, \quad u \in D(\mathfrak{G}), \quad (6)$$

так же, как в § 3.7.

Оператор \mathfrak{G} — *локальный*, и если $u \in D(\mathfrak{G})$ имеет локальный минимум в точке $a \in Q$, то $(\mathfrak{G}u)(a) \geq 0$. Оба эти свойства — общие для \mathfrak{G} и классических эллиптических дифференциальных операторов (об эллиптических операторах подробнее см. гл. 8).

Из формулы (1) следует полезный закон 0—1 Блюментала

$$P. (B) = 0 \text{ или } 1, \quad B \in \mathbf{B}_{+0} \equiv \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbf{B}_\varepsilon. \quad (7)$$

Задача 1. Дать подробное доказательство того, что если $B \subset Q$ — открытое, а $A \subset Q$ — замкнутое множества, то $m_B = \inf \{t : x(t) \in B\}$ и $m_A = \inf \{t : t > 0, x(t) \in A\}$ — марковские моменты.

$\{\omega : m_B < t\} = \bigcup_{jn^{-1} < t} \{\omega : x(jn^{-1}) \in B\}$, поэтому m_B — марковский момент; чтобы доказать то же про m_A , выбираем открытые $B_1 \supset B_2 \supset \dots \downarrow A$ и замечаем, что

$$m_A = \inf_{j \geq 1} \sup_{n \geq 1} [j^{-1} + m_{B_n}(\omega_{j^{-1}})]$$

и что

$$\begin{aligned}\{w: m_A < t\} &= \bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{i \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} \{w: m_{B_n}(w_{j-1}^+) < t - j^{-1} - i^{-1}\} = \\ &= \bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{i \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{kl^{-1} < t - j^{-1} - i^{-1}} \{w: x(kl^{-1}, w_{j-1}^+) \in B_n\}.\end{aligned}$$

7.2. Стандартное многомерное броуновское движение

Рассмотрим введенное в § 2.10 стандартное d -мерное ($d \geq 2$) броуновское движение. Оно имеет непрерывные траектории; его операторы Грина

$$\begin{aligned}(G_\alpha f)(a) &= \\ &= 2(2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{|b-a|} \right)^{d/2-1} K_{d/2-1}(\sqrt{2\alpha}|b-a|) f(b) db\end{aligned} \quad (1)$$

отображают $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ в себя, так что это движение является диффузией согласно определению § 7.1.

Используем формулу Дынкина для вычисления производящего оператора \mathfrak{G} этой диффузии.

Так как гауссово ядро $(2\pi t)^{-d/2} e^{-|b-a|^2/2t}$ инвариантно относительно группы евклидовых движений, то ясно, что для любой точки $a \in \mathbb{R}^d$ распределение $P_a\{x(m_{\partial B}) \in db\}$ ²⁾ места первого достижения броуновской траекторией сферы $\partial B: |b-a| = \varepsilon$ инвариантно относительно группы вращений вокруг центра сферы. Значит, это равномерное распределение do на ∂B (что мы уже использовали в § 2.7).

Легко также подсчитать $E_a(m_{\partial B})$: радиальное движение $r(t) = |x(t) - a|$ ($t \geq 0$) — это бесселевский процесс со шкалой

$$\ln r \quad (d=2); \quad \frac{-r^{2-d}}{d-2} \quad (d \geq 3)$$

и мерой скорости $2r^{d-1} dr$; момент $m_{\partial B}$ — это момент первого достижения бесселевским процессом точки $r = \varepsilon$, и поэтому

$$E_a(m_{\partial B}) = \int_0^\varepsilon m[0, r] s(dr) = \int_0^\varepsilon \frac{2r}{d} dr = \frac{\varepsilon^2}{d} \quad (2)$$

(см. § 2.7).

1) $2(2\pi)^{-d/2} \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{|b-a|} \right)^{d/2-1} K_{d/2-1}(\sqrt{2\alpha}|b-a|)$ — преобразование Лапласа от гауссова ядра $(2\pi t)^{-d/2} e^{-|b-a|^2/2t}$; см. А. Эрдейи [1 (1): 146 (26)]. $K_{d/2-1}$ — обычная видоизмененная функция Бесселя.

2) ∂B означает границу множества B .

Формула Дынкина теперь превращается в

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\int_{\partial B} u(b) d\sigma - u(a)}{\varepsilon^2/d}, \quad u \in D(\mathfrak{G}). \quad (3)$$

В частности, если $u \in C^2(R^d)$, то $\mathfrak{G}u = (1/2)\Delta u$, где Δ — оператор Лапласа, что легко проверить, используя разложение Тейлора функции u вблизи точки a .

Производящий оператор \mathfrak{G} можно описать как оператор

$$\mathfrak{G}^*u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} d\varepsilon^{-2} \left(\int_{\partial B} u d\sigma - u \right), \quad (4)$$

применяемый к классу функций $u \in C_\infty(R^d)$, для которых $\mathfrak{G}^*u \in C_\infty(R^d)$.

Действительно, как было сейчас доказано, $\mathfrak{G}^* \supseteq \mathfrak{G}$. Чтобы получить равенство $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}$, теперь достаточно проверить, что $D(\mathfrak{G}^*) \subseteq D(\mathfrak{G})$. Пусть $u_1 \in D(\mathfrak{G}^*)$; положим $f = (1 - \mathfrak{G}^*)u_1$. Тогда $f \in C_\infty(R^d)$, $u_2 = G_1 f \in D(\mathfrak{G})$ и $u_3 = u_2 - u_1$ является решением уравнения $\mathfrak{G}^*u_3 = u_3$. Далее, функция $u_3 \in C_\infty(R^d)$ в какой-то точке $a \in R^d$ достигает своего наибольшего значения, и из определения \mathfrak{G}^* вытекает, что $u_3 \leq u_3(a) = (\mathfrak{G}^*u_3)(a) \leq 0$. Так же получаем, что $u_3 \geq 0$; поэтому $u_3 \equiv 0$, т. е. $u_1 = u_2 \in D(\mathfrak{G})$, что и требовалось доказать.

Задача 1. Доказать, что \mathfrak{G} является замыканием в смысле равномерной сходимости оператора $\Delta/2$, определенного на классе $C_\infty(\Delta)$ таких функций $u \in C_\infty^2(R^d)$, что $\Delta u \in C_\infty(R^d)$. Иначе говоря, если $u \in D(\mathfrak{G})$, то можно выбрать такие $u_n \in C_\infty(\Delta)$ ($n \geq 1$), что $\|u_n - u\|_\infty$ и $\|\Delta u_n/2 - \mathfrak{G}u\|_\infty$ стремятся к 0 при $n \uparrow +\infty$.

Задача 2. Доказать, что \mathfrak{G} является истинным расширением оператора $\Delta/2$ с областью определения $C_\infty(\Delta)$.

[Рассмотрим класс $C_+(R^d)$ непрерывных функций f , для которых $\|f\| = \|(1+r)f\|_\infty < +\infty$. Пусть $G_{+0}f = c(d) \int_{R^d} |a-b|^{2-d} f(b) db$,

где $4c(d) = \pi^{-d/2} \Gamma(d/2 - 1)$. Оператор \mathfrak{G} замкнут, а на множестве $C_+(R^d) \cap C^1(R^d)$ имеем $(\Delta/2)G_{+0} = -1$; поэтому $\mathfrak{G}G_{+0} = -1$ на $C_+(R^d)$. Если бы $D(\mathfrak{G}) \subseteq C_\infty(\Delta)$, то это означало бы, что для любой второй частной производной $\partial^2 = \partial^2/\partial x_i \partial x_j$ ($i, j \leq d$) оператор $\partial^2 G_{+0}$ можно рассматривать как (замкнутое) отображение $C_+(R^d)$ в $C(|a| < 1)$. Такой оператор $\partial^2 G_{+0}$ был бы ограничен, откуда следовало бы, что для функций $u \in C^2(R^d)$, стремящихся к 0 на бесконечности, $(\partial^2 u)(0) = \int_{R^d} (\Delta u)(\xi) e(d\xi)$, где e — такая

мера со знаком, что $\int_{\mathbb{R}^d} d|e| < +\infty$. Но тогда, заменяя u на $\delta^{-2}u$ ($\delta\xi$)

и полагая $\delta \downarrow 0$, мы получили бы, что $(\partial^2 u)(0) = e(0)(\Delta u)(0)$, что абсурдно. Приведенное доказательство заимствовано с небольшими изменениями у К. де Лейва и Х. Меркила [1].]

Задача 3 (по П. Леви [3]). Пользуясь тем, что броуновское движение остается неизменным при параллельных переносах и при одновременном изменении масштаба времени и пространства, доказать, что его траектория имеет двумерную лебегову меру 0.

[Рассмотрим для двумерной броуновской траектории, выходящей из 0, дуги

$$B_1 = \{x(t): 0 \leq t \leq 1\};$$

$$B_2 = \{x(t): 0 \leq t \leq 2\};$$

$$B_3 = \{x(1-t) - x(1): 0 \leq t \leq 1\};$$

$$B_4 = \{x(1+t) - x(1): 0 \leq t \leq 1\}$$

и их характеристические функции e_1, e_2, e_3 и e_4 . В силу независимости приращений броуновского движения B_3 и B_4 независимы, а B_1, B_3 и B_4 имеют одинаковые распределения, что легко вывести, учитывая инвариантность движения относительно параллельных переносов и отражений. Используя изменение масштаба $x(t) \rightarrow \rightarrow x(2t)/\sqrt{2}$, не меняющее распределений, находим также, что B_2 и $\sqrt{2} \cdot B_1$ совпадают по распределению. Будем обозначать площадь множества $B \subset \mathbb{R}^2$ через $|B|$; тогда из инвариантности меры Лебега относительно параллельных переносов следует, что $|B_3 \cup B_4| = |B_2|$. Поэтому

$$\begin{aligned} 2E_0(|B_1|) &= E_0(|B_2|) = E_0(|B_3 \cup B_4|) = E_0(|B_3| + |B_4| - |B_3 \cap B_4|) = \\ &= 2E_0(|B_1|) - E_0\left(\int e_3 e_4 db\right) = 2E_0(|B_1|) - \int E_0(e_3 e_4) db = \\ &= 2E_0(|B_1|) - \int E_0(e_1)^2 db. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$E_0(|B_1|) = \int E_0(e_1) db = 0,$$

что и требовалось доказать. Приведем другое решение, принадлежащее Х. Сато. Согласно (2.7.9), двумерная броуновская траектория никогда не достигнет в положительный момент времени заранее указанной точки. Поэтому $P_a \left\{ \sup_{t>0} e_b(x(t)) = 0 \right\} = 1$ ($a \in \mathbb{R}^2$, e_b — характеристическая функция точки $b \in \mathbb{R}^2$). С помощью теоремы

Фубини получаем

$$E_0 [\text{mes} \{x(t): t \geq 0\}] = E_0 \left[\int_{R^2} \sup_{t \geq 0} e_b(x(t)) db \right] = 0.]$$

7.3. Уход на ∞

Ниже будет использоваться следующее свойство броуновского движения: $P. \{ \lim_{t \uparrow +\infty} |x(t)| = +\infty \} = 1$ при числе измерений $d \geq 3$, тогда как в двумерном случае броуновская траектория задевает любой маленький кружок в моменты времени, образующие последовательность, стремящуюся к $+\infty$.

Приведем доказательство (другой метод доказательства основан на задаче 4.6.3).

Пусть имеется стандартная броуновская траектория, начинающаяся в точке $0 \in R^d$. Рассмотрим два шара $A \subset B$ с центрами в 0; и пусть $m_1 < m_2 < \dots$ — последовательные моменты прихода на ∂A через ∂B , т. е. положим по определению

$$m_1 = m_{\partial A}, \quad m_n = m_{n-1} + m(\omega_{m_{n-1}}^+) \quad (n \geq 2),$$

$$m = m_{\partial B} + m_{\partial A}(\omega_{m_{\partial B}}^+).$$

Обозначим через e_n время, которое траектория проводит в A при $m_{n-1} \leq t < m_n$ ($n \geq 1$, $m_0 = 0$). Принимая во внимание изотропность броуновского движения, обозначим через γ значение (постоянное) вероятности $P. \{m_{\partial A} < +\infty\}$ на ∂B , а через e_2 — (постоянное) значение $E. (e_2)$ на ∂A .

Поскольку $m_1 < m_2 < \dots$ — марковские моменты, а движение изотропно, e_n имеет такое же распределение, как e_2 , если $m_{n-1} < +\infty$ ($n \geq 2$). Поэтому в зависимости от того, $d=2$ или $d > 2$,

$$\begin{aligned} +\infty &\equiv \int_0^{+\infty} dt \int_A \frac{e^{-|b|^2/2t}}{(2\pi t)^{d/2}} db = E_0 [\text{mes} \{t: x(t) \in A\}] = \\ &= E_0 (m_{\partial A}) + \sum_{n \geq 2} E_0 \{e_n, m_{n-1} < +\infty\} = E_0 (m_{\partial A}) + \sum_{n \geq 2} e_2 \gamma^{n-2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Используя оценку

$$E_0 (m_{\partial A}) + e_2 \leq E_0 (m_{\partial B}) < +\infty \quad (2)$$

[см. (7.2.2)], получаем отсюда, что

$$\sum_{n \geq 0} \gamma^n \equiv +\infty \quad (м. е. \gamma \equiv 1) \quad \text{в зависимости от того, } d=2 \quad \text{или } d > 2. \quad (3)$$

Но тогда, если $d \geq 3$, траектория $x(t)$ при больших t не пересекает A , и, полагая $A \uparrow R^d$, видим, что $P_0 \{ \lim_{t \uparrow +\infty} |x(t)| = +\infty \} = 1$. Если же $d=2$, то $m_n < +\infty$ при всех n , $\lim_{n \uparrow +\infty} m_n = +\infty$. Выберем какой-нибудь круг $D \subset R^2$. Из очевидной оценки $\sup_{\partial A} P. \{m_D = +\infty\} = \gamma < 1$ и соотношения

$$\gamma = \sup_{\partial A} \lim_{n \uparrow +\infty} E. \{m_D > m_n, P_{x(m_n)} \{m_D = +\infty\}\} \leq \leq \gamma \sup_{\partial A} \lim_{n \uparrow +\infty} P. \{m_D > m_n\} = \gamma^2 \quad (4)$$

вытекает, что

$$P_0 \{m_D = +\infty\} = E_0 [P_{x(m_{\partial A})} \{m_D = +\infty\}] \leq \gamma = 0. \quad (5)$$

Это доказывает, что, как мы и утверждали, траектория пересекает любой круг бесконечное число раз.

7.4. Гриневские области и функции Грина

Множество $D \subseteq R^d$ ($d \geq 2$) называется областью, если оно открыто и связно. Область D называется гриновской, если существует функция $G = G(a, b) = K + H$, определенная на $D \times D$ и меньшая $+\infty$ при $a \neq b$, такая, что

$$G \geq 0; \quad (1)$$

$$G(a, b) = G(b, a); \quad (2)$$

$$K = \begin{cases} -(2\pi)^{-1} \ln |b-a|, & d=2; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{4\pi^{d/2}} |b-a|^{2-d}, & d>2; \end{cases} \quad (3)$$

$$\Delta_a H = \Delta_b H = 0. \quad (4)$$

Для фиксированной гриновской области D существует наименьшая такая функция $G = G^*$, которая называется функцией Грина области D . Значение $G^*(a, b)$ можно рассматривать как потенциал в точке a , возникающий при помещении единичного электрического заряда в точке b внутри заземленной оболочки ∂D .

Помимо этой электростатической интерпретации, G^* имеет также вероятностный смысл: $2G^*(a, b) db$ — не что иное, как инте-

грал $\int_0^{+\infty} dt P_a \{m_{\partial D} > t, x(t) \in db\}$, задающий математическое ожидание времени, которое стандартная броуновская траектория,

начинающаяся в a , проведет в db до достижения ∂D . Это используется ниже для того, чтобы доказать основную формулу

$$\int_0^{+\infty} g^*(t, a, b) dt = \begin{cases} G^*(a, b), & \text{если область } D \text{ — гриновская;} \\ +\infty, & \text{если область } D \text{ — не гриновская,} \end{cases} \quad (5)$$

где $(a, b) \in D \times D$, а g^* — ядро, соответствующее броуновскому процессу с поглощением

$$2g^*(t, a, b) db = P_a \{m_{\partial D} > t, x(t) \in db\}, \quad (6)$$

$$t > 0, (a, b) \in D \times D.$$

(То, что у этого процесса существует плотность, являющаяся борелевской функцией, ясно, так как имеет место оценка $P_a \{m_{\partial D} > t, x(t) \in db\} \leq 2g db^1$; в дальнейшем мы покажем, что g^* можно изменить так, чтобы эта функция стала гладкой, и тогда она будет определяться однозначно.)

Так как $D = R^d$ ($d > 2$) является гриновской областью (с функцией Грина $(1/4)\pi^{-d/2}\Gamma(\frac{d}{2}-1)|b-a|^{2-d}$), то любая d -мерная ($d > 2$) область — тоже гриновская.

Область $D = R^2$ не является гриновской; как мы увидим, в двумерном случае гриновскими будут те области, для которых $P_a \{m_{\partial D} < +\infty\} \equiv 1$ (см. задачу 7.8.3, где показывается, что это равносильно тому, что множество $R^2 \setminus D$ имеет положительную логарифмическую емкость).

Приведем доказательство для $d = 2$ (аналогичное доказательство см. у Дж. Ханта); случай $d > 2$, значительно более простой, мы оставляем читателю.

Сначала займемся функцией g^* .

Рассмотрим такую подобласть B области D , что $\bar{B} \subset D$. При $(t, a, b) \in (0, +\infty) \times B \times B$ вероятность

$$\begin{aligned} P_a \{x(i2^{-n}t) \in \bar{B}, i < 2^n, x(t) \in db\} = \\ = P_a \{x(t) \in db\} - \\ - \sum_{i < 2^n} P_a \{x(j2^{-n}t) \in \bar{B}, j < i, x(i2^{-n}t) \notin \bar{B}, x(t) \in db\}, \end{aligned} \quad (7)$$

убывая, стремится при $n \uparrow +\infty$ к $P_a \{x(s) \in \bar{B}, s \leq t, x(t) \in db\}$, а эта последняя вероятность при $B \uparrow D$ стремится, возрастая, к $P_a \{m_{\partial D} > t, x(t) \in db\}$. Используя то, что гауссово ядро g

¹⁾ Здесь g — гауссово ядро $(2\pi t)^{-d/2} e^{-|b-a|^2/2t}$, соответствующее стандартному броуновскому движению (обращаем внимание читателя на множители $1/2$ в g и 2 в $2db$, усложняющие формулы, но необходимые).

непрерывно на $(0, +\infty) \times R^2 \times R^2$ и при $a \neq b$ стремится к 0, когда $t \downarrow 0$, находим, что соответствующие вероятностям (7) плотности (выбранные однозначным образом)

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{B}^{2^n-1}} g(2^{-n}t, a, b_1) 2 db_1 g(2^{-n}t, b_1, b_2) 2 db_2 \dots g(2^{-n}t, b_{2^n-1}, b) = \\ & = g(t, a, b) - \\ & - \sum_{i < 2^n} E_a \{x(j2^{-n}t) \in \bar{B}, j < i, x(i2^{-n}t) \notin \bar{B}, g((1-i2^{-n})t, x(i2^{-n}t), b)\} \quad (8) \end{aligned}$$

при $n \uparrow +\infty$ стремятся, убывая, к некоторой предельной функции; а эта функция при $B \uparrow D$ стремится, возрастая, к

$$\begin{aligned} g(t, a, b) - E_a \{t > m_{\partial D}, g(t - m_{\partial D}, x(m_{\partial D}), b)\} \equiv \\ \equiv g^*(t, a, b), \quad t > 0, (a, b) \in D \times D. \quad (9) \end{aligned}$$

Поскольку при любом $t > 0$ интеграл $\int_{\bar{B}^{2^n-1}} g(2^{-n}t, a, b_1) \dots \leq g$

ограничен, отсюда сразу получаем (6). Так как $g(t, a, b) = g(t, b, a)$, из формулы (8) легко усмотреть, что $g^*(t, a, b) = g^*(t, b, a)$. Пользуясь этим и учитывая гладкость функции g , выводим из (9), что функция $g^*(t, a, b)$ непрерывна на $(0, +\infty) \times D \times D$. Так как $g^* \leq g$, то ясно, что $g^*(t, a, b) \downarrow 0$ при $t \downarrow 0$, если $a \neq b$.

Рассмотрим функцию $G^* = \int_0^{+\infty} g^* dt$. Формулы (1) и (2) для нее выполнены автоматически. Докажем, что если $P_\cdot \{m_{\partial D} < +\infty\} < 1$ в какой-то одной точке из D , то $G^* \equiv +\infty$.

Пусть $a \in D$; рассмотрим замкнутый круг $B: |b - a| \leq \varepsilon$ ($B \subset D$). Ясно, что $P_a \{m_{\partial D} > m_{\partial B}\} = 1$. Полагая $m = m_{\partial B}$, имеем

$$\begin{aligned} P_a \{m_{\partial D} = +\infty\} &= P_a \{m_{\partial D} > m, m_{\partial D}(\omega_m^+) = +\infty\} = \\ &= \int_{\partial B} P_\cdot \{m_{\partial D} = +\infty\} d\sigma^1. \quad (10) \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что функция $u \equiv P_\cdot \{m_{\partial D} = +\infty\}$ непрерывна на D . Но так как $P_\cdot \{m_{\partial B} < +\infty\} \equiv 1$ (см. § 7.3), то

$$\begin{aligned} u(b) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_b \{m_{\partial D} > m, m_{\partial D}(\omega_m^+) = +\infty\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_b \{m_{\partial D} > m, u(x(m))\} \leq u(a), \quad (11) \end{aligned}$$

¹⁾ $d\sigma$ — равномерное распределение на ∂B .

что показывает, что функция u постоянна на D . Поэтому справедливо соотношение

$$u = P. \{m_{\partial D} > n, m_{\partial D}(w_n^+) = +\infty\} = \\ = E. \{m_{\partial D} > n, u(x_n)\} = u P. \{m_{\partial D} > n\} \downarrow u^2, n \uparrow +\infty, \quad (12)$$

из которого видно, что $u \equiv 1$, если $P. \{m_{\partial D} < +\infty\} = 1 - u < 1$ в какой-то одной точке из D . Но тогда в любой точке $(t, a, b) \in (0, +\infty) \times D \times D$ выполнено $g^*(t, a, b) = g(t, a, b)$ и

$$G^* = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-|b-a|^{2/2t}}}{4\pi t} dt \equiv +\infty, \quad (13)$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к случаю $P. \{m_{\partial D} < +\infty\} \equiv 1$. Докажем, что $\int_B G^*(a, b) db < +\infty$ для любой точки $a \in D$ и любого замкнутого круга $B \subset D$.

Рассмотрим концентрические круги $B_1 \subset B_2 \subset D$ с диаметрами l_1 и l_2 . Пусть $m_0 = 0 < m_1 < \dots$ — последовательные моменты достижения ∂B_1 через ∂B_2 для стандартной броуновской траектории, начинающейся на ∂B_1 , и пусть $e_n = \text{mes} \{t: x(t) \in B_1, m_{n-1} \leq t < m_n\}$ ($n \geq 1$). Тогда, повторяя с небольшими изменениями выкладки § 7.3, получаем ($\gamma = \sup_{\partial B_2} P. \{m_{\partial B_1} < m_{\partial D}\}$, $l_i = \text{diam } B_i$)

$$2 \int_{B_1} G^*(a, b) db = E_a [\text{mes} \{t: x(t) \in B_1, t < m_{\partial D}\}] \leq \\ \leq \sup_{B_1} E. (m_{\partial B_1}) + \sup_{\partial B_1} E. [\text{mes} \{t: x(t) \in B_1, t < m_{\partial D}\}] \leq \\ \leq \frac{l_1^2}{d} + \sup_{\partial B_1} \sum_{l \geq 1} E. \{e_l, m_{l-1} < m_{\partial D}\} \leq \\ \leq \frac{l_1^2}{d} + \sup_{\partial B_1} E. (e_1) \cdot \sum_{l \geq 1} \gamma^{l-1} \leq \\ \leq \frac{l_1^2}{d} + \sup_{\partial B_1} E. (m_{\partial B_2}) (1 - \gamma)^{-1} \leq \frac{l_1^2}{d} + \frac{l_2^2}{d} (1 - \gamma)^{-1}. \quad (14)$$

Чтобы закончить доказательство, проверим, что $\gamma < 1$. Положим $u = P. \{m_{\partial B_1} < m_{\partial D}\}$; тогда для любого $a \in D \setminus B_1$ и любого замкнутого круга $B: |b - a| \leq \varepsilon$ ($B \subset D \setminus B_1$)

$$u(a) = P_a \{m_{\partial B_1}(w_m^+) < m_{\partial D}(w_m^+)\} = \int_{\partial B} u do, \quad m = m_{\partial B}. \quad (15)$$

Значит, функция u непрерывна; и либо $\gamma < 1$, либо $u = 1$ в какой-то точке на ∂B_2 . В последнем случае $u \equiv 1$ на $D \setminus B_1$, а это противоречит тому, что $P. \{m_{\partial D} < +\infty\} \equiv 1$.

Теперь проверим в случае $P. \{m_{\partial D} < +\infty\} \equiv 1$ утверждение (4), т. е. покажем, что функция $G^* + (2\pi)^{-1} \ln|b-a|$ является гармонической на $D \times D$.

Пусть даны точка $a \in D$, замкнутый круг $B: |b-a| \leq \varepsilon$ ($B \subset D$) и точка $b \in D \setminus B$. Как было сказано после формулы (9), функция g^* является гладкой. Пользуясь этим, легко вывести, что

$$g^*(t, a, b) = E_a \{t > m_{\partial B}, g^*(t - m_{\partial B}, x(m_{\partial B}), b)\}. \quad (16)$$

Интегрируя это соотношение по t , получаем

$$G^*(a, b) = E_a [G^*(x(m_{\partial B}), b)] = \int_{\partial B} G^*(\cdot, b) d\sigma. \quad (17)$$

Так как $\int_B G^* db < +\infty$ и так как справедлива формула (2), то отсюда выводим, что при $a \neq b$

$$G^* < +\infty \quad (18)$$

и

$$\Delta_a G^* = \Delta_b G^* = 0. \quad (19)$$

Теперь нужно рассмотреть функцию $G^* + (2\pi)^{-1} \ln|b-a|$ в окрестности «диагонали» $a=b$.

Пусть имеется открытый круг $D_1 \subset D$ с замыканием $\bar{D}_1 \subset D$; соответствующее ему броуновское ядро с поглощением g_1^* удовлетворяет условию

$$g_1^*(t, a, b) = g^*(t, a, b) - E_a \{t > m_{\partial D_1}, g^*(t - m_{\partial D_1}, x(m_{\partial D_1}), b)\}, \quad (20)$$

$$t > 0, (a, b) \in D_1 \times D_1$$

[см. 9)]. Интегрируя по t , находим, что

$$G_1^*(a, b) = \int_0^{+\infty} g_1^* dt = G^*(a, b) - E_a [G^*(x(m_{\partial D_1}), b)], \quad (21)$$

$$(a, b) \in D_1 \times D_1.$$

Но если a — центр круга $D_1: |b-a| < \varepsilon$, то $g_1^*(t, a, b)$ зависит только от t и $|b-a| = r < \varepsilon$; а именно: $g_1^*(t, a, b)$ равно умноженной на $(2\pi)^{-1}$ переходной плотности $p(t, 0, r)$ для бesselовского движения $|x(t) - a|$ ($t \geq 0$) со шкалой $\ln r$ и мерой скорости $2rdr$, начинающегося в точке $r=0$ и убывающего в момент первого достижения $m_\varepsilon = m_{\partial D_1}$. Используя бesselовские локальные времена t ,

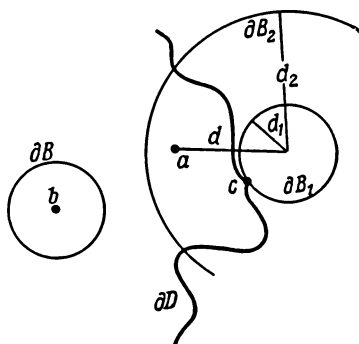
вычисляем¹⁾

$$G_1^*(a, b) = (2\pi)^{-1} \int_0^{+\infty} p(t, 0, r) dt = (2\pi)^{-1} E_0 [t(m_\varepsilon, r)] = \\ = -(2\pi)^{-1} \ln \frac{r}{\varepsilon} \quad (22)$$

[см. задачу 5.2.1]. Теперь формула (21) переходит в

$$G^*(a, b) + (2\pi)^{-1} \ln |b - a| = \\ = E_a [G^*(x(m_{\partial D_1}), b)] + (2\pi)^{-1} \ln \varepsilon, \quad |b - a| < \varepsilon. \quad (23)$$

Мы видим, что функция $G^* + (2\pi)^{-1} \ln |b - a|$ является решением уравнения (4) не только *вне* диагонали, но и *на* ней.



Р и с. 1.

Теперь мы должны показать, что G^* — наименьшая функция из удовлетворяющих условиям (1) — (4).

Пусть D — ограниченная область и $\partial D \in C^2$. Тогда $P_a \{m_{\partial D} < +\infty\} \equiv 1$, $G^*(a, b) < +\infty$ при $a \neq b$, и для любого $b \in D$ функция $G^*(a, b)$ стремится к 0, когда точка $a \in D$ стремится к какой-нибудь точке c , принадлежащей ∂D . Это легко видеть из оценки

$$G^*(a, b) = E_a \{m_{\partial B} < m_{\partial D}, G^*(x(m_{\partial B}), b)\} \leq \\ \leq \sup_{\partial B} G^*(\cdot, b) P_a \{m_{\partial B} < m_{\partial D}\} \quad (24)$$

и из рис. 1, на котором показаны точки a, b, c и окружность ∂B , внутри которой находится b , а кроме того, замкнутый круг B_1 , касающийся ∂D в единственной точке c , и concentричный ему замкнутый круг B_2 , не пересекающий B . Действительно, на кольце между ∂B_1 и ∂B_2 вероятность $P_a \{m_{\partial B} < m_{\partial D}\}$ меньше, чем

¹⁾ E_0 — математическое ожидание для бесселевского процесса.

$P_a \{m_{\partial B_2} < m_{\partial B_1}\}$. Пользуясь изотропностью броуновского движения, получаем

$$P_a \{m_{\partial B_2} < m_{\partial B_1}\} = P_d \{m_{d_2} < m_{d_1}\}^1; \quad (25)$$

а эта вероятность, как мы уже замечали в § 2.7, стремится к 0 при $d \downarrow d_1$.

Рассмотрим теперь произвольную область D_1 , ограниченную и такую, что $\bar{D}_1 \subset D$ и $\partial D_1 \in C^2$.

Предположим, что функция G удовлетворяет условиям (1)–(4). Пусть g_1^* — плотность для броуновского движения с поглощением на ∂D_1 , и пусть

$$G_1^* = \begin{cases} \int_0^{+\infty} g_1^* dt & \text{на } D_1 \times D_1; \\ 0 & \text{на } D_1 \times \partial D_1; \end{cases} \quad (26)$$

тогда $G - G_1^* \in C(D_1 \times \bar{D}_1)$, $\Delta[G - G_1^*] = 0$ на $D_1 \times D_1$ и $G - G_1^* \geq 0$ на $D_1 \times \partial D_1$. Отсюда следует, что $G \geq G_1^*$ на $D_1 \times D_1$. Используя то, что $g_1^* \uparrow g^*$ при $D_1 \uparrow D$ [см. (9)], находим, что $G \geq G^*$ на $D \times D$. Итак, мы доказали, что область D является или не является гриновской в зависимости от того, $P_a \{m_{\partial D} < +\infty\} \equiv 1$ или нет, причем в гриновском случае $G^* = \int g^* dt$ — функция Грина области D .

Задача 1 (уравнение Чепмена—Колмогорова). Доказать, что $g^*(t_1 + t_2, a, b) =$

$$= 2 \int_D g^*(t, a, c) g^*(t_2, c, b) dc, \quad t_1, t_2 > 0, (a, b) \in D \times D.$$

Задача 2. Функция $g^*(t, a, b)$ принадлежит классу $C^\infty[(0, +\infty) \times D \times D]$ и является решением уравнения $\partial u / \partial t = \Delta u / 2$ ($t > 0$).

[Из формулы (9) и симметрии функции g^* следует, что $g^* \in C^\infty(D \times D)$; далее вычислите $\partial g^* / \partial t$ с помощью (9).]

Задача 3. Вычислить $P_a \{x(m_{\partial D}) \in db\}$, где a — точка открытого единичного круга $D: |a| < 1$, а db — маленькая дуга на ∂D .

[Вероятность $P_a \{arg x(m_{\partial D}) \in d\psi\}$ равна умноженному на $d\psi$ классическому ядру Пуассона $(1 - r^2) / 2\pi (1 - 2r \cos(\theta - \psi) + r^2)$, где $r = |a|$, а $\theta = arg a$.]

¹⁾ P_d — вероятность для бесселевского движения, начинающегося в точке d , $d_1 < d < d_2$.

Задача 4. Доказать, что $G^*(a, b) = (2\pi)^{-1} \ln \left| \frac{1 - \bar{a}b}{a - b} \right| = = (2\pi)^{-1} \ln \operatorname{cth} [a, b]^1$ — функция Грина для круга $|a| < 1$; она инвариантна относительно группы Γ неевклидовых движений (в модели Пуанкаре)²⁾, переводящих этот круг на себя.

Много других функций Грина вычисляется в книге Куранта и Гильберта [1: 349 — 366]; см. также задачу 7.6.2 и работу Магнуса и Оберхеттингера [2].

7.5. Эксцессивные функции

Рассмотрим неотрицательную функцию $u \leq +\infty$, определенную на гриновской области D и эксцессивную в смысле Дж. Ханта [2 (1)], т. е.

$$u < +\infty \text{ в какой-то точке из } D; \quad (1a)$$

$$E. \{u(x_t), t < m_{\partial D}\} \uparrow u, t \downarrow 0. \quad (1b)$$

Так как для $n \geq 1$ и $t > 0$ функция $v \equiv 2 \int g^*(t, a, b)(u \wedge n)(b) db$ эксцессивна, то u является пределом ограниченных эксцессивных функций $v \in C^\infty(D)$. Для гладких v

$$\mathbb{G}v = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (E. \{v(x_t), t < m_{\partial D}\} - v) \leq 0, \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} v d\sigma - v(a) &= E_a [v(x(m_{\partial B}))] - v(a) = \\ &= E_a \left[\int_0^{m_{\partial B}} (\mathbb{G}v)(x_t) dt \right] \leq 0, \quad (3) \end{aligned}$$

$$D \supset B: |b - a| \leq \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что функция u является супергармонической в смысле Ф. Рисса [1 (1)], т. е.

$$u < +\infty \text{ в какой-то точке из } D; \quad (4a)$$

$$\lim_{b \rightarrow a} u(b) = u(a), \quad a \in D; \quad (4b)$$

$$\int_{\partial B} u d\sigma \leq u(a), \quad a \in D \supset B: |b - a| \leq \varepsilon. \quad (4c)$$

¹⁾ \bar{b} — число, сопряженное к b , а $[a, b]$ — неевклидово расстояние от a до b (см. Каратеодори [1: 69]).

²⁾ Γ — группа всех взаимно однозначных конформных отображений $a \rightarrow e^{i\psi} \frac{a - b}{1 - \bar{a}b}$ ($0 \leq \psi < 2\pi$, $|b| < 1$), переводящих круг в себя, и сопряженных к ним (см. Каратеодори [1: 81]).

Обратно, если u — супергармоническая функция на D , то $v \equiv u \wedge n$ при любом n — тоже супергармоническая функция, как и функция $v(a) \equiv \int_{|b-a| \leq \varepsilon} u(b) db$ на меньшей области D^* , состоящей из точек области D , находящихся от ∂D на расстоянии, большем ε . Отсюда получаем, что u является монотонным пределом ограниченных супергармонических функций $v \in C^2(D)$ на каждой области D^* с замыканием, содержащимся в D . Но для таких v

$$\mathfrak{G}v = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\int_{\partial B} v d\sigma - v}{\varepsilon^2/d} \leq 0 \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} E_* \{v(x_t), t < m_{\partial D^*}\} - v &\leq E_* [v(x(t \wedge m_{\partial D^*}))] - v = \\ &= E_* \left[\int_0^{t \wedge m_{\partial D^*}} \mathfrak{G}v ds \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из эксцессивности v вытекает эксцессивность u ; короче говоря, *эксцессивная* — то же самое, что *супергармоническая*.

Если $e(db)$ — неотрицательное распределение масс на D , то его потенциал $u = \int_D G^* de$ эксцессивен, потому что

$$\begin{aligned} E_* \{u(x_t), t < m_{\partial D}\} &= \\ &= 2 \int_D g^*(t, \cdot, a) da \int_D G^*(a, b) e(db) = \\ &= \int_D e(db) \int_0^{+\infty} ds 2 \int_D g^*(t, \cdot, a) g^*(s, a, b) da = \\ &= \int_D e(db) \int_0^{+\infty} ds g^*(t+s, \cdot, b) = \\ &= \int_D \int_t^{+\infty} g^*(s, \cdot, b) ds e(db) \uparrow \int_D G^* de = u, \quad t \downarrow 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть дана произвольная эксцессивная функция u . Положим $v(t) \equiv E_* \{u(x_t), t < m_{\partial D}\}$. Распределение масс

$$e_\varepsilon(db) = \varepsilon^{-1} [u(b) - E_b \{u(x_\varepsilon), \varepsilon < m_{\partial D}\}] \cdot 2db, \quad \varepsilon > 0, \quad (8)$$

неотрицательно; рассмотрим его потенциал

$$\begin{aligned} \int_D G^* de_\varepsilon &= \varepsilon^{-1} E. \left(\int_0^{m_{\partial D}} [u(x_t) - E_{x(t)} \{u(x_\varepsilon), \varepsilon < m_{\partial D}\}] dt \right) = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} [v(t) - v(t + \varepsilon)] dt = \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon v dt - \lim_{n \uparrow +\infty} \varepsilon^{-1} \int_n^{n+\varepsilon} v dt = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon v dt - h \quad (h \equiv v(+\infty)). \quad (9) \end{aligned}$$

При $\varepsilon \downarrow 0$ этот потенциал стремится, возрастая, к $u - h$; функция h является гармонической (см. ниже задачу 1), и, как нетрудно доказать, мера e_ε сходится (слабо) при $\varepsilon \downarrow 0$ к такой мере $e \equiv e^u \geq 0$ ¹⁾, что

$$u = \int_D G^* de^u + \text{наибольшая гармоническая миноранта функции } u. \quad (10)$$

Доказательство см. в § 7.7, а в § 7.18 указывается одно применение этого результата.

Мера e^u — это мера Рисса функции u ; она названа в честь Ф. Рисса [1(2)], открывшего разложение (10). Это разложение приводит к простому выражению для производящего оператора стандартного броуновского движения

$$\mathcal{G}u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} d\varepsilon^{-2} \left[\int_{\partial B}^1 u do - u \right]$$

[см. (7.2.4)]; а именно, если $0 \geq \mathcal{G}u \in C(D)$, то функция u эксцессивна на D и $-e^u(db)/2db = \mathcal{G}u$; а если u эксцессивна на D и $u^* = -e^u(db)/2db \in C(D)$, то $0 \geq \mathcal{G}u = u^*$.

Задача 1. Если u — эксцессивная функция на гриновской области D , то $h \equiv \lim_{t \uparrow +\infty} E. \{u(x_t), t < m_{\partial D}\}$ — гармоническая функция.

[Функция h — супергармоническая; из изотропности броуновского движения вытекает, что если $a \in D$ и $D \supset B: |b - a| \leq \varepsilon$, то

$$E_a \{h(x_t), t < m_{\partial B}\} \leq h(a) P_a \{t < m_{\partial D}\}.$$

Учитывая, что $h = E. \{h(x_t), t < m_{\partial D}\}$, выводим отсюда, что

$$h(a) = \lim_{\alpha \downarrow 0} E. \left[\alpha \int_0^{m_{\partial B}} e^{-\alpha t} h(x_t) dt + e^{-\alpha m_{\partial B}} h(x(m_{\partial B})) \right] = \int_{\partial B} h do.]$$

¹⁾ $e(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} e_\varepsilon(B)$ для таких компактных множеств $B \subset D$, что $e(\partial B) = 0$.

Задача 2. Доказать, что если $e \geq 0$ и $u = \int G^* de$ с точностью до гармонической функции, то $e = e^u$.

7.6. Приложение к спектру оператора $\Delta/2$

Пусть дана компактная поверхность $\partial D \subset R^d$ класса C^2 , ограничивающая область D объема $|D|$. Рассмотрим оператор $\Delta/2$, определенный на классе $D(\Delta)$ таких функций $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, что $\Delta u \in C(D)$ и $u = 0$ на ∂D . У этого оператора счетный спектр

$$0 > \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \downarrow -\infty^1), \quad (1)$$

и, как обнаружил Г. Вейль [2: 41—45],

$$-\gamma_n \sim \text{const} \cdot \left(\frac{n}{|D|} \right)^{2/d}, \quad n \uparrow +\infty. \quad (2)$$

Константа здесь не зависит от D (на самом деле она равна $2\pi\Gamma(d/2+1)^{d/2}$).

М. Кац [1: 205—209] вывел (2), используя броуновское движение. Приведем его доказательство (классическое доказательство см. Курант и Гильберт [1: 407—423]).

Рассмотрим оператор $H_t f = 2 \int_D g^*(t, a, b) f db$, определенный на (действительном) гильбертовом пространстве $L^2(D, 2db)$ со скалярным произведением $(f_1, f_2) = 2 \int_D f_1 f_2 db$ и нормой $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$. Пользуясь уравнением Чепмена—Колмогорова (задача 7.4.1) и тем, что $g^*(t, a, b) = g^*(t, b, a)$, построим, как в § 4.11, меру $\mathfrak{p}(d\gamma)$ на $(-\infty, 0]$, значениями которой являются операторы проектирования, такую, что $H_t = e^{t\Omega} = \int_{-\infty}^{+0} e^{t\gamma\mathfrak{p}}(d\gamma) \quad (t > 0, \mathfrak{p}(-\infty, 0] = 1)$.

Здесь Ω — оператор $\int_{-\infty}^{+0} \gamma \mathfrak{p}(d\gamma)$, определенный на $D(\Omega) = \left\{ u: \int_{-\infty}^{+0} \gamma^2 \|\mathfrak{p}(d\gamma) u\|_2^2 < +\infty \right\}$.

Поскольку $g^* \leq g \leq (2\pi t)^{-d/2}/2$, а $|D| < +\infty$, оператор H_t имеет конечный след $2 \int_D g^*(t, b, b) db \leq (2\pi t)^{-d/2} |D|$ и поэтому

¹⁾ Значение γ включается в список столько раз, сколько независимых решений $f \in D(\Delta)$ у уравнения $\Delta f/2 = \gamma f$.

вполне непрерывен; а значит, у оператора Ω счетный спектр

$$0 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \downarrow -\infty^1). \quad (3)$$

Если u — собственная функция, соответствующая $\gamma_1 = 0$, то

$$|u| = \left| 2 \int g^* u db \right| \leq \text{const} \cdot t^{-d/2} \downarrow 0 \quad (t \uparrow +\infty); \quad (4)$$

таким образом,

$$\gamma_1 < 0, \quad (5)$$

как это утверждается в (1).

Рассмотрим собственные функции $f = f_1, f_2, \dots$, соответствующие значениям

$$\gamma = \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \quad (\Omega f = \gamma f, \|f\|_2 = 1, (f_n, f_m) = 0, n < m).$$

Так как $e^{\gamma t} f = 2 \int g^* f db$, то из результата задачи 7.4.2 и оценки $g^* \leq (2\pi t)^{-d/2}/2$ вытекает, что $f \in C^\infty(D)$; а пользуясь гладкостью ∂D , легко проверить, что функция

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} |f(a)| &\leq 2 \int g^*(t, a, b) |f| db \leq \\ &\leq \sqrt{2 \int g^*(t, a, b) f^2 db} \sqrt{2 \int g^*(t, a, b) db} \leq \\ &\leq \frac{(2\pi t)^{-d/4}}{\sqrt{2}} \|f\|_2 \sqrt{P_a\{m_{\partial D} > t\}} \end{aligned} \quad (6)$$

стремится к 0, когда a стремится к ∂D . Это означает, что $f \in D(\Delta)$.

Но $\Omega = \Delta/2$ на $D(\Delta) \subseteq D(\Omega)$ (см. задачу 7.4.2); поэтому $\Delta f/2 = \gamma f$. С помощью теоремы Мерсера²⁾ получаем, что

$$g^*(t, a, b) = \sum_{n \geq 1} e^{\gamma_n t} f_n(a) f_n(b), \quad t > 0, (a, b) \in D \times D, \quad (7)$$

откуда

$$2 \int_D g^*(t, a, a) da = \sum_{n \geq 1} e^{\gamma_n t}, \quad t > 0. \quad (8)$$

Далее,

$$\begin{aligned} g^*(t, a, a) &= \frac{1}{2} (2\pi t)^{-d/2} - E_a\{t > m_{\partial D}, g(t - m_{\partial D}, x(m_{\partial D}), a)\} = \\ &= \frac{1}{2} (2\pi t)^{-d/2} + \text{ошибка величины не более } e^{-\varepsilon^2/t} \text{ при } t \downarrow 0, a \in D, \end{aligned} \quad (9)$$

¹⁾ Значение γ включается в список столько раз, сколько независимых решений $f \in D(\Omega)$ у уравнения $\Omega f = \gamma f$.

²⁾ Курант и Гильберт [1: 128—130].

где ε — половина расстояния от a до ∂D . Поэтому из формулы (8) вытекает

$$\sum_{n \geq 1} e^{\gamma_n t} \sim (2\pi t)^{-d/2} |D|, \quad t \downarrow 0. \quad (10)$$

Применяя стандартную тауберовскую теорему¹⁾, получаем

$$\sum_{\gamma_n > \gamma} 1 \sim \frac{|D|}{(2\pi)^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} |\gamma|^{d/2}, \quad \gamma \downarrow -\infty. \quad (11)$$

Отсюда, полагая $\gamma = \gamma_n$ и устремляя n к $+\infty$, выводим (2).

Задача 1. Подсчитать собственные значения оператора $\Delta/2$ для трехмерной области D : $0 < \xi_1 < a$, $0 < \xi_2 < b$, $0 < \xi_3 < c$ и проверить закон Г. Вейля (2).

[Собственные значения равны $-(\pi^2/2)(l^2/a^2 + m^2/b^2 + n^2/c^2)$ ($l, m, n \geq 1$); число тех из них, которые превосходят γ ($\downarrow -\infty$), равно (приблизительно) $(1/8) \cdot (4/3) \pi abc \cdot (2|\gamma|/\pi^2)^{3/2}$ — объему осьмушки эллипсоида

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} + \frac{\xi_3^2}{c^2} \leq \frac{2|\gamma|}{\pi^2}, \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 > 0,$$

как это и должно быть.]

Задача 2. Вычислить функцию Грина для области D задачи 1 (см. Курант и Гильберт [1: 357—362]).

7.7. Потенциалы и вероятности достижения

Пусть D — гриновская область с функцией Грина G , B — компактное подмножество области D или открытое подмножество с компактным замыканием $\bar{B} \subset D$. Тогда *вероятность достижения* $p_B = P \cdot \{m_B < m_D\}$ является потенциалом $\int G de_B$ некоторой меры $e_B \geq 0$, сосредоточенной на ∂B . Функцию p_B можно отождествить с ньютоновым электростатическим потенциалом множества B . Для компактного B это означает, что эта функция — *наибольший* из потенциалов $\int_B G de \leq 1$ ($e \geq 0$), а для открытого B — что это *наименьшая мажоранта* потенциалов $\int_A G de \leq 1$ ($e \geq 0$, $\bar{A} \subset B$).

Приведем доказательство для случая $d=3$, $D=R^3$, $G = = (4\pi)^{-1} |b-a|^{-1}$.

Если B — ограниченное подмножество в R^3 , то вероятность

¹⁾ Дёч [1: 203—216].

$P. \{m_B(w_t^+) < +\infty\}$, убывая, стремится к 0 при $t \uparrow +\infty$, потому что

$$P. \left\{ \lim_{t \uparrow +\infty} |x(t)| = +\infty \right\} = 1$$

(см. § 7.3). Введем меры

$$e_\varepsilon(db) = \varepsilon^{-12} db \cdot P_b \{m_B < +\infty, m_B(w_\varepsilon^+) = +\infty\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(a) &= \int_{R^3} G(a, b) e_\varepsilon(db) = \\ &= E_a \left(\int_0^{+\infty} \varepsilon^{-1} P_{x(t)} \{m_B < +\infty, m_B(w_\varepsilon^+) = +\infty\} dt \right) = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} P_a \{m_B(w_t^+) < +\infty, m_B(w_{t+\varepsilon}^+) = +\infty\} dt = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} [P_a \{m_B(w_t^+) < +\infty\} - P_a \{m_B(w_{t+\varepsilon}^+) < +\infty\}] dt = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon P_a \{m_B(w_t^+) < +\infty\} dt \uparrow P_a \{m_B < +\infty\} = p_B(a), \quad \varepsilon \downarrow 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Рассмотрим ограниченную открытую окрестность A границы ∂B . Имеем¹⁾

$$\begin{aligned} e_\varepsilon(R^3 \setminus A) &= \varepsilon^{-12} \int_{R^3 \setminus A} P_b \{m_B < +\infty, m_B(w_\varepsilon^+) = +\infty\} db \leq \\ &\leq \varepsilon^{-12} \int_{R^3 \setminus A} db \int_0^\varepsilon \frac{l}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-l^2/2t} dt \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \varepsilon^{-1} \int_{\frac{1}{2} \min l}^\varepsilon dc \int_0^\varepsilon \frac{c^3}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-c^2/2t} dt \downarrow 0, \quad \varepsilon \downarrow 0, \quad (3) \end{aligned}$$

где l — треть расстояния от $b \in R^3 \setminus A$ до ∂B . Кроме того,

$$\sup_{\varepsilon > 0} e_\varepsilon(A) \leq \frac{1}{\inf_{A \times A} G} < +\infty; \quad (4)$$

отсюда следует, что предел $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e_\varepsilon = e_B$ существует, сосредоточен

¹⁾ При переходе от второй строчки к третьей используется тот факт, что $\{w: m_B < +\infty, m_B(w_\varepsilon^+) = +\infty\} \subset \{w: m_{\partial B} \leq \varepsilon\}$.

на ∂B и имеет своим потенциалом p_B . Действительно, выберем такую последовательность $\varepsilon = \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \dots \downarrow 0$, что существует $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e_\varepsilon = e$

(в смысле сходимости мер), и используем то, что $\int G de$ — экссесивная функция. Тогда получим

$$\begin{aligned} P_a \{m_B(w_t^+) < +\infty\} &= 2 \int_{R^3} g(t, a, b) p_B db = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} 2 \int_{R^3} g p_\varepsilon db = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} 2 \int_{R^3} g db \int G de_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{R^3} de_\varepsilon 2 \int_{R^3} g G db = \\ &= \int de 2 \int_{R^3} g G db = 2 \int_{R^3} g db \int G de. \end{aligned} \quad (5)$$

Поэтому $p_B = \int G de$, отсюда вытекают сделанные утверждения.

Теперь нужно отождествить p_B с ньютоновым потенциалом множества B .

Пусть B компактно и даны потенциал $p = \int_B G de \leq 1$ и точка $a \notin B$. Если A — открытая $(1/n)$ -окрестность множества B и расстояние от a до ∂B больше $1/n$, то

$$\begin{aligned} p(a) &= \int_B G(a, b) e(db) = \int_B E_a \{m_{\partial A} < +\infty, G(x(m_{\partial A}), b)\} e(db) = \\ &= \int_{\partial A} P_a \{m_{\partial A} < +\infty, x(m_{\partial A}) \in db\} p(b) \leq P_a \{m_{\partial A} < +\infty\} = \\ &= p_A(a) \downarrow p_B(a), \quad n \uparrow +\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как на $B \setminus \partial B$ имеет место неравенство $p_B = 1 \geq p$, то $p \leq p_B$ всюду на $R^3 \setminus \partial B$.

На самой границе ∂B или $p_B(a) = 1 \geq p(a)$, или $p_B(a) < 1$. Но во втором случае $P_a \{m_B = 0\} < 1$, откуда в силу блюменталевского закона 0—1 вытекает $P_a \{m_B > 0\} = 1$. Используя это, находим, что

$$\begin{aligned} p_B(a) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_a \{m_B(w_\varepsilon^+) < +\infty\} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_a [p_B(x_\varepsilon)] = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_a \{\varepsilon < m_B, p_B(x_\varepsilon)\} \geq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_a \{\varepsilon < m_B, p(x_\varepsilon)\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_a [p(x_\varepsilon)] = p(a), \end{aligned} \quad (7)$$

и доказательство закончено.

1) См. (7.4.17).

Если же B открыто, то из вероятностной картины ясно, что ρ_B — наименьшая мажоранта потенциалов ρ_A , если A пробегает компактные подмножества из B ; значит, также и в этом случае ρ_B является ньютоновым электростатическим потенциалом.

Задача 1 (по Ф. Спитцеру [3]). При любом $\varepsilon > 0$ полная мера $e_\varepsilon(R^d)$ равна $C(B)$, где $C(B)$ — ньютоновская емкость множества B , определяемая в следующем параграфе.

7.8. Ньютоновские емкости

Пусть, так же как в § 7.7, D — гриновская область и $B \subset D$. Ньютоновская электростатическая емкость множества B (относительно D) определяется как полная масса $C(B)$ ньютоновского электростатического распределения e_B . Если B компактно, а граница ∂D рассматривается как заземленная, то $C(B)$ — наибольший положительный электрический заряд, который можно поместить на B так, чтобы потенциал соответствующего электростатического поля был не больше 1.

$C(B)$ имеет следующие свойства:

$$C(A) \leq C(B), \quad A \subset B; \quad (1)$$

$$C(A \cup B) + C(A \cap B) \leq C(A) + C(B); \quad (2)$$

$$C(B) \leq C(\partial B) = C(\bar{B}); \quad (3)$$

$$C(B) = \inf_{\substack{A \text{ — открытое} \\ A \supset B}} C(A), \text{ если } B \text{ компактно}; \quad (4)$$

$$C(B) = \sup_{\substack{A \text{ — компакт} \\ A \subset B}} C(A), \text{ если } B \text{ открыто}; \quad (5)$$

$$C(mB) = |m|^{d-2} C(B), \quad (6)$$

если $D = R^d$ ($d > 2$), а m — движение пространства R^d как целого ($|m| = 1$) или умножение на множитель $|m| > 0$.

Гаусс [1] выяснил, что если потенциал $p = \int_B G de$ меры со знаком e неотрицателен в каждой точке из D , то и полный (алгебраический) заряд неотрицателен; это легко проверить, выбрав какое-нибудь открытое множество $A \supset \bar{B}$ и замечая, что $e(B) = \int_B \rho_A de = \int_{\partial A} p de_A \geq 0$ [см. (7.4.2)].

Из этого результата Гаусса в силу того, что $p_A \leq p_B$ ($A \subset B$), вытекает (1). Формула (2) следует из того, что

$$p_{A \cup B} - p_B = P. \{m_{A \cup B} < m_{\partial D}, m_B \geq m_{\partial D}\} \leq \\ \leq P. \{m_A < m_{\partial D}, m_{A \cap B} \geq m_{\partial D}\} = p_A - p_{A \cap B}. \quad (7)$$

Еще раз применяя прием Гаусса и пользуясь тем, что $p_B \leq p_{\partial B} = p_{\bar{B}}$, доказываем (3).

Пусть B компактно, и пусть даны такие открытые множества $A \downarrow B$, что существует $\lim_{A \downarrow B} e_A = e$. Тогда $p = \int G de \leq 1$, $e(D \setminus \partial B) = 0$ и потому $C(A) \downarrow e(\partial B) \leq C(B) \leq \lim_{A \downarrow B} C(A)$, что доказывает формулу (4).

Пусть теперь B открыто, даны компактные $A \uparrow B$ и открытое множество $D \supset \bar{B}$. Тогда $p_A \uparrow p_B$, поэтому $C(A) = \int p_D de_A = \int p_A de_D \uparrow \int p_B de_D = \int p_D de_B = C(B)$, и формула (5) доказана.

Соотношение (6) сразу следует из того, что для $D = R^d$ ($d \geq 2$) функция Грина является постоянной, умноженной на $|b - a|^{2-d}$.

Г. Шоке [1: 147—153] доказал бесконечную последовательность неравенств, аналогичных (2).

Приведем их изящный вывод, принадлежащий Дж. Ханту [2 (1): 53].

Пусть $A, B_1, B_2, \dots, B_n \subset D$. Будем обозначать через I подмножества множества $1, 2, \dots, n$; через $|I|$ — число элементов в I , а через B_I — сумму $\bigcup_{i \in I} B_i$. Тогда¹⁾

$$0 \leq P. \{m_{A \cup B_I} < m_{\partial D}, I \leq n, m_A \geq m_{\partial D}\} = \\ = P. \{m_{A \cup B_I} < m_{\partial D}, I \leq n\} - P. \{m_A < m_{\partial D}\} = \\ = - \sum_{m \leq n} (-1)^m \sum_{|I|=m} P. \{m_{A \cup B_I} < m_{\partial D}\} - P. \{m_A < m_{\partial D}\} = \\ = - \sum_{m \leq n} (-1)^m \sum_{|I|=m} p_{A \cup B_I} - p_A. \quad (8)$$

Пользуясь приемом Гаусса, выводим результат Шоке:

$$0 \leq - \sum_{m \leq n} (-1)^m \sum_{|I|=m} C(A \cup B_I) - C(A). \quad (9)$$

При $n=2$, если заменить A, B_1, B_2 на $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$, из этой формулы получается (2).

¹⁾ Здесь используется формула $P. \{ \bigcap_{m \leq n} E_m \} = - \sum_{m \leq n} (-1)^m \sum_{|I|=m} P. (E_I)$.

Эта формула — дуальная по отношению к классической формуле Пуанкаре (см. В. Феллер [3: 104—105]).

Задача 1. Обозначим через $G = G_D(a, b)$ функцию Грина ограниченной области $D \subset R^d$ ($G \equiv 0$ вне $D \times D$). С. Бергман и М. Шиффер [1: 368] показали, что

$$G_{D_1 \cup D_2} + G_{D_1 \cap D_2} \geq G_{D_1} + G_{D_2}.$$

Используя метод, которым доказывалась формула (2), доказать, что

$$G_{D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n} + \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} G_{D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap \dots \cap D_{i_k}} \geq 0.$$

[Пусть $A \in \mathcal{B}$; тогда

$$\begin{aligned} P_a(A \cap \{x(s) \in D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n, s \leq t\}) &\geq \\ &\geq P_a\left(\bigcup_{k \leq n} A \cap \{x(s) \in D_k, s \leq t\}\right) = \\ &= - \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} P_a(A \cap \{x(s) \in D_{i_1}, s \leq t\} \cap \dots \cap \\ &\quad \cap \{x(s) \in D_{i_k}, s \leq t\}) = \\ &= - \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} P_a(A \cap \{x(s) \in D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_k}, s \leq t\}); \end{aligned}$$

теперь подставьте вместо A событие $\{x(t) \in db\}$ и проинтегрируйте по t .]

Задача 2 (по Г. Шоке [1]). Проверьте, что если B_l — открытые множества, A_l — компакты, причем $B_l \supset A_l$ ($l \leq n$), то

$$C\left(\bigcup_{l \leq n} B_l\right) - C\left(\bigcup_{l \leq n} A_l\right) \leq \sum_{l \leq n} [C(B_l) - C(A_l)].$$

$$\begin{aligned} [p_{\bigcup_{l \leq n} B_l} - p_{\bigcup_{l \leq n} A_l} = P. \{m_{\bigcup_{l \leq n} B_l} < m_{\partial D}, m_{\bigcup_{l \leq n} A_l} \geq m_{\partial D}\}] &\leq \\ &\leq \sum_{l \leq n} P. \{m_{B_l} < m_{\partial D}, m_{A_l} \geq m_{\partial D}\} = \sum_{l \leq n} [p_{B_l} - p_{A_l}]; \end{aligned}$$

далее используйте прием Гаусса.]

Задача 3 (относящаяся к двумерным гриновским областям, рассмотренным в § 7.4). Пользуясь связью между ньютоновскими емкостями и вероятностями достижения в двумерном случае, доказать критерий Какутани¹⁾: для компактного $B \subset R^2$ имеем $P. \{m_B < +\infty\} = 0$ или 1 в зависимости от того, равна нулю или положительна логарифмическая емкость

$$l(B) = \exp \left(\sup_{\substack{e \geq 0 \\ e(B)=1}} \int_{B \times B} \ln |b-a| \, de \, de \right).$$

(Используйте результат задачи 7.9.1.)

¹⁾ С. Какутани [2].

$l(B)$ равна нулю или положительна в зависимости от того, $\sup_{\substack{\varepsilon \geq 0 \\ e(B)=1}} \int_{B \times B} \ln |b-a| de de = -\infty$ или $> -\infty$; причем можно заме-

нить $\ln |b-a|$ на взятую с минусом функцию Грина G какого-нибудь круга $D \supset B$. Из принципа Кельвина (см. задачу 7.9.1) вытекает, что $l(B)=0$ или >0 в зависимости от того, равна нулю или положительна ньютоновская емкость $C(B)$, т. е. в зависимости от того, $P\{\mathfrak{m}_B < \mathfrak{m}_D\} = 0$ или >0 . Утверждение Какутани теперь следует из того, что вероятность $P\{\mathfrak{m}_B < +\infty\}$ постоянна ($\equiv 0$ или 1) на $R^2 \setminus B$ (как это доказывается в § 7.4.)

Задача 4 (по Ф. Спитцеру и Г. Кестену и У. Уитману; см. Ф. Спитцер [3] и У. Уитман [1]). Пусть B — компактная фигура с числом измерений $d \geq 3$. Обозначим через $c(t)$ объем, заемаемый фигурой $B+x(s)$ до момента t . Задача состоит в том, чтобы доказать, что $P_0 \left\{ \lim_{t \uparrow +\infty} t^{-1} c(t) = C(B)/2 \right\} = 1$.

[Рассмотрим $f(\varepsilon)$ — объем множества $\{a: a \in B+x(s) \text{ в какой-то момент } s < \varepsilon, \text{ но ни в какой из моментов, более поздних, чем } \varepsilon\}$. Используя задачу 7.7.1, проверяем, что

$$E_0[\varepsilon^{-1} f(\varepsilon)] = \varepsilon^{-1} \int P_a \{ \mathfrak{m}_B < \varepsilon, \mathfrak{m}_B(w_\varepsilon^+) = +\infty \} da = \frac{e_\varepsilon(R^d)}{2} = \frac{C(B)}{2}.$$

Обозначим через w_s^* сдвиг, сохраняющий вероятность P_0 неизменной: $x(t, w_s^*) = x(t+s) - x(s)$. Тогда $\sum_{k \leq n} f(\varepsilon, w_{(k-1)\varepsilon}^*) \leq c(n\varepsilon)$, а так как динамическая система $\omega \rightarrow \omega^*$ эргодична (в силу колмогоровского закона 0—1), из эргодической теоремы Г. Д. Биркгофа вытекает, что $\lim_{t \uparrow +\infty} t^{-1} c(t) \geq C(B)/2$. Но, с другой стороны,

$$c(n\varepsilon) \leq \sum_{k \leq n} c(\varepsilon, w_{(k-1)\varepsilon}^*),$$

так что

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \uparrow +\infty} t^{-1} c(t) &\leq \varepsilon^{-1} E[c(\varepsilon)] = \varepsilon^{-1} \int P_a \{ \mathfrak{m}_B < \varepsilon \} da = \\ &= \frac{C(B)}{2} + \varepsilon^{-1} \int P_a \{ \mathfrak{m}_B < \varepsilon, \mathfrak{m}_B(w_\varepsilon^+) < +\infty \} da = \\ &= \frac{C(B)}{2} + \text{const} \cdot \varepsilon^{-1} \int E_a \{ (1 + |x(\varepsilon)|)^{2-d}, \mathfrak{m}_B < \varepsilon \} da = \\ &= \frac{C(B)}{2} + \text{const} \cdot \varepsilon^{-1} \int \frac{P_a \{ \mathfrak{m}_B < \varepsilon \}}{(1 + |a|)^{d-2}} da. \end{aligned}$$

Используя задачу 7.7.1 и очевидное равенство $P_a \{ \mathfrak{m}_B < \varepsilon \mid x(\varepsilon) = b \} = P_b \{ \mathfrak{m}_B < \varepsilon \mid x(\varepsilon) = a \}$, находим, что последний интеграл стремится к 0 при $\varepsilon \uparrow +\infty$.

7.9. Гауссова квадратичная форма

Гаусс [1: 41—83] сделал попытку построить определение ньютоновского электростатического потенциала компактного подмножества B гриновской области D , основываясь на том, что квадратичная форма

$$G(e) = \frac{1}{2} \int_{B \times B} G de de - e(B)^1, \quad e \geq 0, \quad (1)$$

принимает строгий минимум на ньютоновском электростатическом распределении $e = e_B$.

Приведем современное доказательство.

Пусть $e_n \geq 0$ таковы, что $G(e_n) \downarrow \inf_{e \geq 0} G(e)$ при $n \uparrow +\infty$; тогда из

$$+\infty > \lim_{n \uparrow +\infty} G(e_n) \geq \lim_{n \uparrow +\infty} \sup \left[\frac{1}{2} \left(\inf_{B \times B} G \right) e_n(B)^2 - e_n(B) \right] \quad (2)$$

ясно, что

$$\sup_{n \geq 1} e_n(B) < +\infty, \quad (3)$$

и это позволяет нам предположить, что существует $\lim_{n \uparrow +\infty} e_n = e_\infty$.

Тогда $G(e)$ принимает наименьшее значение для $e = e_\infty$. Действительно,

$$\begin{aligned} G(e) &\geq \lim_{n \uparrow +\infty} G(e_n) \geq \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{B \times B} G \wedge m de_n de_n - e_n(B) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{B \times B} G \wedge m de_\infty de_\infty - e_\infty(B) \uparrow G(e_\infty), \quad m \uparrow +\infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следует, что для $e \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} [G(e_\infty + \varepsilon e) - G(e_\infty)] &= \int_{B \times B} G de de_\infty - e(B) = \\ &= \int_B (p_\infty - 1) de, \quad p_\infty = \int_B G de_\infty, \end{aligned} \quad (5)$$

если только все интегралы сходятся; причем в случае $e \leq e_\infty$ имеет место знак равенства.

¹⁾ G — функция Грина области D .

Если B таково, что ∂B принадлежит классу C^2 , то $p_B \equiv 1$ на B [см. § 7.4] и в силу (5) имеем

$$\begin{aligned} \int_{B \times B} G d(e_B - e_\infty) d(e_B - e_\infty) &= \\ &= \int p_B de_B - \int p_\infty de_B - \int p_B de_\infty + \int p_\infty de_\infty = \\ &= - \int (p_\infty - 1) de_B + \int (p_\infty - 1) de_\infty \leq 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Но это невозможно, если $e_\infty \neq e_B$, как это видно из следующей формулы (в которой $e = e_B - e_\infty$):

$$\begin{aligned} \int_{B \times B} G de de &= \int_0^{+\infty} dt \int_{B \times B} e(d\xi) e(d\eta) g^*(t, \xi, \eta)^1 = \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_{B \times B} e(d\xi) e(d\eta) 2 \int_D g^*\left(\frac{t}{2}, a, \xi\right) g^*\left(\frac{t}{2}, a, \eta\right) da^2 = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} dt \int_D da \left(\int_B g^*\left(\frac{t}{2}, a, b\right) e(db) \right)^2. \quad (7) \end{aligned}$$

Вычисляя $\gamma(B) \equiv \inf_{e \geq 0} G(e)$ для этого частного случая, получаем $\gamma(B) = -\frac{C(B)}{2}$. Перейдем теперь опять к общему случаю. Из соотношений

$$\gamma(A) \leq \gamma(B), \quad A \supset B; \quad (8)$$

$$\gamma(B) = \frac{1}{2} \int p_\infty de_\infty - e_\infty(B) = -\frac{1}{2} e_\infty(B) \quad (9)$$

и из формулы (7.8.4) легко видеть, что

$$-\frac{1}{2} e_\infty(B) = \gamma(B) \geq -\frac{1}{2} C(B). \quad (10)$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{B \times B} G d(e_B - e_\infty) d(e_B - e_\infty) &= \int p_B de_B - 2 \int p_\infty de_B + \int p_\infty de_\infty \leq \\ &\leq C(B) - 2 \int (p_\infty - 1) de_B - 2C(B) + \int (p_\infty - 1) de_\infty + e_\infty(B) \leq \\ &\leq e_\infty(B) - C(B) \leq 0. \quad (11) \end{aligned}$$

¹⁾ g^* — плотность броуновского движения с поглощением, соответствующего области D .

²⁾ См. задачу 7.4.1.

Теперь, так же как в (7), устанавливаем, что $e_B = e_\infty$, и утверждение Гаусса доказано.

Задача 1. Доказать принцип Кельвина: если B — компакт, то

$$\inf_{\substack{e \geq 0 \\ e(B)=1}} \int_{B \times B} G de de = [C(B)]^{-1};$$

причем при $C(B) > 0$

$$\int_{B \times B} G de de > [C(B)]^{-1}, \quad e \geq 0, \quad e(B) = 1,$$

если $e \neq [C(B)]^{-1} \cdot e_B$.

[Пусть дана такая мера $e \geq 0$, что $e(B) = 1$. При $t > 0$ имеем $t^2/2 \int_{B \times B} G de de - te(B) \geq \int_{B \times B} G de de_B - C(B)$, причем знак равенства достигается только при $te = e_B$. Если $C(B) > 0$, то для доказательства достаточно положить $t = C(B)$, а при $C(B) = 0$ мы сразу получаем $\int_{B \times B} G de de = +\infty$ из того, что

$$\frac{t^2}{2} \int_{B \times B} G de de \geq te(B) = t.]$$

7.10. Критерий Винера

Для любого компактного множества $B \subset R^d$ ($d \geq 2$) событие $m_B = 0$ измеримо относительно B_{+0} , и поэтому (в силу блюменталевского закона 0—1) $P\{m_B = 0\} = 0$ или 1.

Критерий Винера состоит в том, что

$$P_a\{m_B = 0\} = 0 \text{ или } 1$$

в зависимости от того, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n \geq 1} n C(B_n) \quad (d=2);$$

$$\sum_{n \geq 1} 2^{n(d-2)} C(B_n) \quad (d \geq 3).$$

Здесь C — ньютоновская емкость относительно некоторой сферы $|b-a| = \gamma \geq 1$ ($\gamma < +\infty$ в случае $d=2$), а B_n — пересечение множества B с шаровым слоем $2^{-n-1} \leq |b-a| < 2^{-n}$ ($n \geq 1$)².

¹) $[C(B)]^{-1} = +\infty$, если $C(B) = 0$.

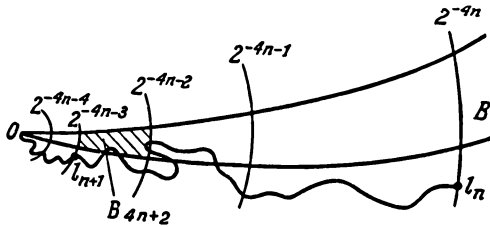
²) Классические доказательства критерия Винера для потенциалов и задачи Дирихле см. Курант и Гильберт [2: 321—323], О. Д. Келлог [1: 330—334] и Н. Винер [2]. Сам Винер интересовался задачей Дирихле и не дал вероятностной интерпретации своему критерию. Впервые обнаружил его связь с броуновским движением С. Какутани [2]; см. § 7.12, где устанавливается связь между аспектами критерия Винера, связанными с задачей Дирихле и с броуновским движением.

Доказательство проведем для случая $d=3$, $a=0$, $\gamma=+\infty$.

Пусть $\sum_{n \geq 1} 2^n C(B_n) < +\infty$; тогда из

$$P_0\{m_{B_n} < +\infty\} = p_{B_n}(0) = (4\pi)^{-1} \int_{\partial B_n} |b|^{-1} e_{B_n}(db) \leq \\ \leq (4\pi)^{-1} 2^{n+1} C(B_n) \quad (2)$$

и из первой леммы Бореля—Кантелли ясно, что для всех броуновских траекторий, за исключением множества вероятности 0,



Р и с. 1.

$m_{B_n} = +\infty$, начиная с некоторого $n = n_1 < +\infty$. Таким образом, $P_0\{m_B = 0\} = 0$, что и утверждалось.

Напротив, если $\sum_{n \geq 1} 2^n C(B_n) = +\infty$, то $\sum_{n \geq 1} 2^{4n+j} C(B_{4n+j}) = +\infty$ при каком-то $j=0, 1, 2$ или 3 . Ограничимся случаем $j=2$. Из рис. 1 видно, что если положить $m_n = \min\{t: |x(t)| = 2^{-4n}\}$, $l_n = x(m_n)$ ($n \geq 1$), то

$$P_0\{x(t) \in B_{4n+2} \text{ при каком-то } t \in [m_{n+1}, m_n] | B_{m_{n+1}}\} = \\ = P_{l_{n+1}}\{x(t) \in B_{4n+2} \text{ при каком-то } t < m_n\} \geq \\ \geq P_{l_{n+1}}\{x(t) \in B_{4n+2} \text{ при каком-то } t > 0\} - \\ - P_{l_{n+1}}\{x(t) \in B_{4n+2} \text{ при каком-то } t \geq m_n\} = \\ = p_{B_{4n+2}}(l_{n+1}) - E_{l_{n+1}}[p_{B_{4n+2}}(l_n)] = \\ = (4\pi)^{-1} \int_{\partial B_{4n+2}} [|b - l_{n+1}|^{-1} - E_{l_{n+1}}(|b - l_n|^{-1})] e_{B_{4n+2}}(db) \geq \\ \geq (4\pi)^{-1} C(B_{4n+2}) [(2^{-4n-2} + 2^{-4n-4})^{-1} - (2^{-4n} - 2^{-4n-2})^{-1}] = \\ = (4\pi)^{-1} C(B_{4n+2}) \frac{28}{15} 2^{4n} \geq 2^{4n-3} C(B_{4n+2}). \quad (3)$$

Но тогда в силу соотношений (3)

$$\begin{aligned} d_n &\equiv P_0 \{x(t) \notin B_{4j+2}, t \in [m_{j+1}, m_j), j \geq n\} = \\ &= E_0 \{P_0 \{x(t) \notin B_{4n+2}, t \in [m_{n+1}, m_n) | \mathbf{B}_{m_{n+1}}\}, \\ x(t) \notin B_{4j+2}, t \in [m_{j+1}, m_j), j > n\} &\leq [1 - 2^{4n-3} C(B_{4n+2})] d_{n+1} \leq \\ &\leq [1 - 2^{4n-3} C(B_{4n+2})] [1 - 2^{4(n+1)-3} C(B_{4(n+1)+2})] d_{n+2} \leq \\ &\leq \dots \leq \prod_{j \geq n} [1 - 2^{4j-3} C(B_{4j+2})]. \quad (4) \end{aligned}$$

Так как мы предположили, что ряд $\sum_{n \geq 1} 2^{4n+2} C(B_{4n+2})$ расходится, то это произведение равно 0, откуда

$$P_0 \{m_B = 0\} = \lim_{n \uparrow +\infty} P_0 \{m_B < m_n\} = 1, \quad (5)$$

и критерий Винера доказан.

Дж. Ламперти [1] нашел другое доказательство критерия Винера с использованием некоторого уточнения леммы Бореля — Кантелли.

Критерий Пуанкаре¹⁾ состоит в том, что $P_0 \{m_B = 0\} = 1$, если в $B \subset R^3$ содержится какой-нибудь маленький конус A с вершиной в 0. Это можно доказать при помощи критерия Винера; действительно, емкости $C(A_n)$ пропорциональны 2^{-n} ($n \geq 1$) (см. задачу 1 ниже), и сумма Винера $\sum_{n \geq 1} 2^n C(B_n)$ расходится.

Задача 1 (по Дж. Ханту [1]). Пользуясь изотропностью броуновского движения, дать непосредственное доказательство критерия Пуанкаре.

[Пусть $A \subset B$ — конус с вершиной в 0. Тогда $P_0 \{m_B = 0\} = \lim_{n \uparrow +\infty} P_0 \{m_B \leq m_n\} \geq \lim_{n \uparrow +\infty} P_0 \{l_n \in A\} = \alpha > 0$, где α есть умноженный на $(4\pi)^{-1}$ телесный угол конуса A ; для завершения доказательства нужно применить блюменталевский закон 0—1.]

Задача 2. Доказать для броуновского движения с числом измерений $d \geq 3$ следующее. Если B — замкнутое множество, уходящее в ∞ , и Z — событие, состоящее в том, что множество $\{t: x(t) \in B\}$ имеет предельной точкой $+\infty$, то $P_*(Z) = 0$ или 1 в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_{n \geq 1} 2^{-n(d-2)} C(B_n)$, где B_n — пересечение множества B с шаровым слоем $2^{n-1} \leq |x| < 2^n$, а C есть d -мерная ньютоновская емкость (аналогичный факт для случайного блуждания см. К. Ито и Г. П. Маккин [1]).

¹⁾ О. Д. Келлог [1].

7.11. Применения критерия Винера

Рассмотрим жорданову дугу $B \subset R^2$, т. е. образ единичного отрезка $[0, 1]$ при топологическом отображении $\gamma: t \rightarrow R^2$. Пользуясь критерием Винера, а также прямым вероятностным методом, докажем, что в любой точке из B

$$P. \{m_B = 0\} = 1. \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда $\gamma(0) = 0$.

Пусть n настолько велико, что $2^{-n} < |\gamma(1)|$; тогда если $t_1 = \max \{t: |\gamma(t)| = 2^{-n-1}\}$, а $t_2 = \min \{t: t > t_1, |\gamma(t)| = 2^{-n}\}$, то

$$A_1 = \{\gamma(t): t_1 \leq t < t_2\} \subset B_n = B \cap \{2^{-n-1} \leq |\gamma| < 2^{-n}\}. \quad (2)$$

Далее, пусть A_2 — отражение множества A_1 относительно прямой A , соединяющей $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$; тогда A лежит в (замкнутом)

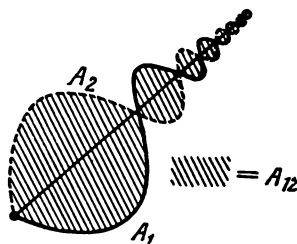


Рис. 1.

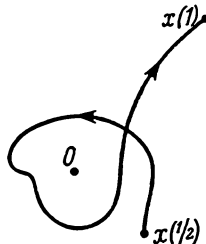


Рис. 2.

множестве A_{12} , являющемся дополнением неограниченной компоненты множества $R^2 \setminus A_1 \cup A_2$, причем $\partial A_{12} \subseteq A_1 \cup A_2$ (см. рис. 1).

Из принципа Кельвина

$$C(B)^{-1} = \inf_{\substack{e \geq 0 \\ e(B)=1}} \int_{B \times B} G de de^{-1} \quad (3)$$

(см. задачу 7.9.1) и из того, что $G \sim -(2\pi)^{-1} \ln |b-a|$ для малых $|b-a|$, получаем следующие оценки:

$$C(A_1) \sim C(A_2) \quad (4)$$

и

$$C(A)^{-1} < \int_{A \times A} (-\ln |b-a|) de de < -2 \ln l < 2 \ln(2^{n+1}) \quad (5)$$

при $n \uparrow +\infty$, где l — длина множества A , а de — элемент длины дуги, деленный на l . С помощью рис. 1 находим, что

$$\frac{1}{2\pi} < C(A) \leq C(A_{12}) = C(\partial A_{12}) \leq C(A_1 \cup A_2) \leq C(A_1) + C(A_2) < < 3C(A_1) \leq 3C(B_n), \quad n \uparrow +\infty. \quad (6)$$

1) G — функция Грина для круга $|\gamma| < 1$.

Поэтому сумма Винера $\sum_{n \geq 1} nC(B_n)$ расходится. Отсюда сразу следует (1).

Перейдем теперь к вероятностному доказательству. Пусть Z_n — событие, состоящее в том, что траектория $x(t)$: $0 < t \leq n^{-1}$ броуновского движения, выходящего из 0, обвивается вокруг 0 и пересекает саму себя, т. е. (замкнутое) множество, являющееся дополнением неограниченной компоненты множества $R^2 \setminus \{x(t): 0 \leq t \leq n^{-1}\}$, содержит круг $|z| < \varepsilon$.

Из рис. 2 видно, что $P_0(Z_1) > 0$. Мы можем изменить масштаб, сохраняя вероятностную меру: $x(t) \rightarrow \sqrt{n} x(t/n)$; поэтому при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} 0 < P_0(Z_1) &= \\ &= P_0\left\{\sqrt{n} x\left(\frac{t}{n}\right): 0 < t \leq 1 \text{ обвивается вокруг } 0 \text{ и пересекает себя}\right\} = \\ &= P_0\{x(t): 0 < t \leq n^{-1} \text{ обвивается вокруг } 0 \text{ и пересекает себя}\} = \\ &= P_0(Z_n) \downarrow P_0\left(\bigcap_{m \geq 1} Z_m\right), \quad n \uparrow +\infty. \quad (7) \end{aligned}$$

Но $\bigcap_{m \geq 1} Z_m \in \mathbf{B}_{+0}$, и в силу блюменталевского закона 0—1 из (7) вытекает

$$P_0\left(\bigcap_{n \geq 1} Z_n\right) = 1 = P_0\{m_B = 0\}. \quad (8)$$

Здесь используется следующий факт, относящийся к топологии: броуновская траектория не может обвиваться вокруг 0 и пересекать саму себя для малых значений t , не пересекая B .

Перейдем к числу измерений $d \geq 3$. Пусть $h \in C[0, +\infty)$ — такая положительная функция, что $b^{-1}h(b) \downarrow 0$ при $b \downarrow 0$. Рассмотрим *шип*

$$B: (b_1, b_2, \dots, b_d) \in R^d, \quad \sqrt{b_1^2 + \dots + b_{d-1}^2} \leq h(b_d), \quad b_d \geq 0.$$

Применим критерий Винера, чтобы установить, что

$P_0\{m_B = 0\} = 0$ или 1 в зависимости от того, сходится или расходится интеграл¹⁾

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \ln \left(\frac{h(b)}{b} \right) \right|^{-1} \frac{db}{b} \quad (d=3), \\ \int_0^1 \left(\frac{h(b)}{b} \right)^{d-3} \frac{db}{b} \quad (d>3). \end{aligned} \quad (9)$$

¹⁾ Аналогичный критерий для d -мерного случайного блуждания см. К. Ито и Г. П. Маккин [1].

Например, в трехмерном случае для $h(b) = e^{-|\ln b|^\varepsilon}$

$$\int_0^1 \left| \ln \left(\frac{h(b)}{b} \right)^{-1} \frac{db}{b} \right| \text{ сходится или расходится}$$

в зависимости от того, $\varepsilon > 1$ или $\varepsilon \leq 1$; (10)

а в случае $d > 3$ для $h = b |\ln b|^\varepsilon$

$$\int_0^1 \left(\frac{h(b)}{b} \right)^{d-3} \frac{db}{b} \text{ сходится или расходится в зависимости}$$

от того, $\varepsilon < 0$ или $\varepsilon \geq 0$). (11)

Так как $b^{-1}h(b) \downarrow 0$ при $b \downarrow 0$, то $B_m = B \cap \{2^{-m-1} \leq |b| \leq 2^{-m}\}$ при больших m будет длинным и тонким, и можно оценить нужным образом его емкость через емкости эллипсоидов

$$E_-: \frac{b_1^2}{h(2^{-m-1})^2} + \dots + \frac{b_{d-1}^2}{h(2^{-m-1})^2} + \frac{(b_d - 3 \cdot 2^{-m-2})^2}{2^{-2m-4}} \leq 1$$

и

$$E_+: \frac{b_1^2}{2nh(2^{-m})^2} + \dots + \frac{b_{d-1}^2}{2nh(2^{-m})^2} + \frac{(b_d - 3 \cdot 2^{-m-2})^2}{2^{-2m-2}} \leq 1,$$

$$E_+ \supset B_m \supset E_-.$$

Дж. Кристал [1:30] дает изящное доказательство того, что ньютоновская емкость эллипсоида

$$E: \frac{b_1^2}{e_1^2} + \frac{b_2^2}{e_2^2} + \dots + \frac{b_d^2}{e_d^2} \leq 1$$

отличается только постоянным множителем от величины, обратной к эллиптическому интегралу

$$e = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(e_1^2 + t)(e_2^2 + t) \dots (e_d^2 + t)}}.$$

Отсюда, пользуясь тем, что

$$e \sim \begin{cases} 2(e'')^{2-d} \ln \frac{e''}{e'} & (d=3); \\ \frac{d-3}{2} (e'')^{2-d} \left(\frac{e''}{e'} \right)^{d-3} & (d>3), \end{cases} \quad (12)$$

$$e_1 = e_2 = \dots = e_{d-1} = e', \quad e_d = e'', \quad \frac{e'}{e''} \downarrow 0,$$

находим поведение при $m \uparrow +\infty$ величин $C(E_-)$ и $C(E_+)$, оценивающих $C(B_m)$. Получаем, что сумма Винера $\sum_{m \geq 1} 2^{-m(d-2)} C(B_m)$ рас-

¹⁾ Ср. (11) с критерием Пуанкаре (см. задачу 7.10.1).

ходится или сходится в зависимости от того, расходится или сходится ряд

$$\sum_{m \geq 1} |\ln 2^m h (2^{-m})|^{-1} \quad (d=3);$$

$$\sum_{m \geq 1} [2^m h (2^{-m})]^{d-3} \quad (d > 3). \quad (13)$$

Отсюда сразу следует (9).

Рассматривая выше двумерный случай (см. формулу (7) и далее), мы попутно доказали, что двумерная броуновская траектория имеет бесконечное число самопересечений. То же верно для трех измерений, но не для четырех и более, как доказали А. Дворецкий, П. Эрдёш и С. Какутани [1], используя тот факт, что маленький отрезок $\{x(s) : t \leq s < t+h\}$ броуновской траектории имеет положительную емкость в двумерном и трехмерном, но не в четырехмерном случае. Дворецкий, Эрдёш и Какутани [2] доказали также, что двумерная броуновская траектория имеет бесконечное число n -кратных самопересечений для любого $n=2, 3, 4, \dots$; и вместе с С. Дж. Тейлором [1] доказали, что у трехмерного броуновского движения нет тройных точек самопересечения. Некоторые задачи еще не решены, а именно не доказано, что а) множество точек n -кратного самопересечения двумерной броуновской траектории имеет размерность 2 при любом $n \geq 2$ и б) что множество точек самопересечения трехмерной броуновской траектории имеет размерность 1.

Задача 1. Проверить, что для трехмерного шипа

$$B : \sqrt{a^2 + b^2} \leq e^{-|\ln c \ln_2 c \dots \ln_{n-1} c| |\ln_n c|^\varepsilon}, \quad 0 \leq c < e_n^{-1},$$

$P_0\{m_B = 0\} = 0$ или 1 в зависимости от того, $\varepsilon < 1$ или $\varepsilon \geq 1$; и применить этот результат для доказательства того, что для двумерного броуновского движения

$$P_0\{|x(t)| > e^{-|\ln t \ln_2 t \dots \ln_{n-1} t| |\ln_n t|^\varepsilon}, \quad t \downarrow 0\} = 0 \text{ или } 1 \text{ в зависимости от того, } \varepsilon > 1 \text{ или нет.}$$

Это дает ответ на вопрос, поставленный А. Дворецким и П. Эрдёшем [1:367]; см. также более точный результат Ф. Спитцера [1:188] в § 4.12.

[Для доказательства первого утверждения достаточно указать, что интеграл

$$\int_0^{e_n^{-1}} \left(\ln \frac{1}{c} \dots \left(\ln_n \frac{1}{c} \right)^\varepsilon \right)^{-1} \frac{dc}{c} = \int_1^{+\infty} c^{-\varepsilon} dc$$

¹⁾ $\ln_1 = \ln$, $\ln_2 = \ln(\ln)$, \dots ; $e_1 = e$, $e_2 = e^e$, \dots .

сходится при $\varepsilon > 1$ и расходится в противном случае. Чтобы доказать вторую часть, рассмотрим проекции $x^2(x^1)$ трехмерного броуновского движения на плоскость $c=0$ (прямую $a=b=0$) и положим $f_n(t) = e^{-\ln \frac{1}{t} \dots \ln_n \frac{1}{t}}$ ($t < e_n^{-1}$). Заметим, что x^2 —двумерное броуновское движение, а x^1 —одномерное. Пользуясь законом повторного логарифма для x^1 , легко получаем, что при $\varepsilon=1$ $|x^2(t)| \leq f_n[|x^1(t)|] \leq f_n\left[\sqrt{3t \ln_2 \frac{1}{t}}\right] \leq f_{n-1}(t)$ для бесконечного числа моментов времени $t \downarrow 0$. В то же время при $\varepsilon > 1$ имеем $P_0\{|x^2(t)| > f_n[|x^1(t)|], t \downarrow 0\} = 1$. Отсюда, используя независимость x^1 и x^2 , выводим, что если $0 < P_0\{|x^2(t)| < f_n(t) \text{ для бесконечного числа моментов времени } t \downarrow 0\}$, можно выбрать $t_1 > t_2 > \dots \downarrow 0$ так, чтобы $P_0\{|x^1(t_n)| < t_n \text{ бесконечное число раз}\} = 1$. Но $\lim_{t \downarrow 0} P_0\{|x^1(t)| < t\} = 0$; значит, этого не может быть, и доказательство закончено.]

7.12. Задача Дирихле

Рассмотрим классическую задачу Дирихле для ограниченной области $D \subset R^d$ ($d \geq 2$): дана функция $f \in C(\partial D)$; найти такую функцию $u \in C(\bar{D})$, что $\Delta u = 0$ внутри D и $\lim_{\substack{a \rightarrow b \\ a \in D}} u(a) = f(b)$ в каждой точке $b \in \partial D$.

А. Лебег [2: 350—352] обнаружил, что в случае числа измерений $d > 2$ задача Дирихле поставлена некорректно; приведем его пример—так называемый шип Лебега.

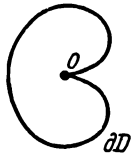


Рис. 1.

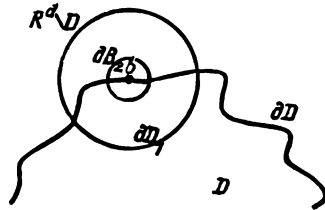


Рис. 2.

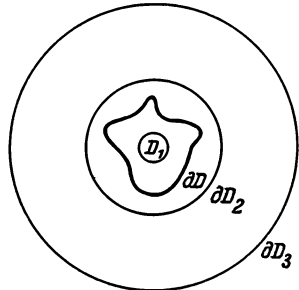


Рис. 3.

Рассмотрим d -мерную сферу, $d \geq 3$, и прижмем к ее боку острый шип, так что она деформируется в поверхность ∂D , изображенную на рис. 1. Будем рассматривать ограниченную ею область D как комнату, кончик шипа как нагревательный прибор, причем на сте-

нах (∂D) поддерживается температура $f \in C(\partial D)$ ($0 \leq f \leq 1$). Рассмотрим крайний случай, когда $f \equiv 0$ всюду, кроме кончика шипа, где $f = 1$. При $t \uparrow +\infty$ температура u внутри D будет сходиться к решению задачи Дирихле с граничными условиями $u = f$ на D . Но тепло, излучаемое шипом, пропорционально площади его поверхности, и если кончик шипа достаточно острый, то человеку, сидящему в комнате, будет холодно, как бы близко к нагревательному прибору он ни сидел; иначе говоря,

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a \in D}} u(a) < 1 = f(0).$$

(Простое доказательство этого см. Курант и Гильберт [2: 306 — 307].)

Назовем точку $b \in \partial D$ *сингулярной*, если $P_b \{m_{R^d \setminus D} > 0\} = 1$. Воспроизводя рассуждения Дж. Дуба [2], докажем, что функция

$$u(a) = E_a(f(x(m_{\partial D}))), \quad a \in D, \quad (2)$$

является решением видоизмененной задачи Дирихле: найти такую ограниченную функцию u , что $\Delta u = 0$ внутри D и $\lim_{\substack{a \rightarrow b \\ a \in D}} u(a) = f(b)$

в каждой несингулярной точке $b \in \partial D^1$.

Пусть имеется броуновская траектория, начинающаяся в точке $a \in D$. Обозначим через m момент достижения ею поверхности маленького замкнутого шара $B \subset D$ с центром в a ; тогда $m_{\partial D} = m + m_{\partial D}(\omega_m^+)$, и $u(a) = E_a(u(x(m)))$ является средним арифметическим от u по ∂B . Это означает, что функция u гармонична внутри D .

Теперь рассмотрим несингулярную точку $b \in \partial D$ ($P_b \{m_{R^d \setminus D} = 0\} = 1$). Пусть B_1 — шар $|b - a| < \varepsilon_1$. Обозначим через G функцию Грина для B_1 и выберем шар $B_2: |b - a| \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ (см. рис. 2). Так как функция $P_{\cdot} \{m_{B_2 \setminus D} < m_{\partial B_1}\}$ является потенциалом $\int G d\mu$ некоторой неотрицательной меры на $\partial(B_2 \setminus D)$, то она удовлетворяет условию

$$\lim_{\substack{a \rightarrow b \\ a \in D}} P_a \{m_{B_2 \setminus D} < m_{\partial B_1}\} \geq P_b \{m_{B_2 \setminus D} < m_{\partial B_1}\} = 1. \quad (3)$$

Устремив сначала ε_2 , а затем ε_1 к 0, видим, что

$$\lim_{\substack{a \rightarrow b \\ a \in D}} u(a) = f(b). \quad (4)$$

¹) Н. Винер [2] доказал, что видоизмененная задача Дирихле (если определять *сингулярные точки* при помощи критерия Винера) поставлена корректно. Решение Винера совпадает с найденным ранее решением О. Перрона [1].

Таким образом, доказано, что u является одним из решений видоизмененной задачи Дирихле.

Допустим, что есть другое решение v . Выберем такие области $D_n \uparrow D$, что $\bar{D}_n \subset D$, а ∂D_n принадлежит классу C^2 . При помощи критерия Пуанкаре (см. § 7.10) проверим, что

$$u_n(a) = E_a(v(x(m_{\partial D_n}))), \quad a \in D_n, \quad (5)$$

сходится к $v(b)$, когда $a \in D_n$ приближается к $b \in \partial D_n$. Так как в случае гладких областей для задачи Дирихле в ее классической форме имеют место существование и единственность решения, то $u_n = v$ внутри D_n . Если мы допустим, что

$$P \cdot \{x(m_{\partial D}) - \text{сингулярная точка}\} = 0, \quad (6)$$

то из того, что v ограничена и приближается к f в несингулярных точках из ∂D , следует, что

$$v = \lim_{n \uparrow +\infty} u_n = E \cdot (\lim_{n \uparrow +\infty} v(x(m_{\partial D_n}))) = E \cdot (f(x(m_{\partial D}))) = u. \quad (7)$$

Докажем теперь (6). Выберем открытые шары $D_1 \subset D \subset D_2 \subset D_3$ так, как это показано на рис. 3 ($\bar{D}_1 \subset D \subset \bar{D} \subset D_2 \subset \bar{D}_2 \subset D_3$), и обозначим через B_ε , $\varepsilon > 0$, множество тех точек из ∂D , в которых электростатический потенциал $p = P \cdot \{m_{D_2 \setminus D} < m_{\partial D_1} \wedge m_{\partial D_3}\}$ не превосходит $1 - \varepsilon$. Множество B_ε компактно, объединение $\bigcup_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon$ является множеством сингулярных точек из ∂D . Так как $p_\varepsilon = P \cdot \{m_B < m_{\partial D_1} \wedge m_{\partial D_3}\} \leq p \leq 1 - \varepsilon$ на B_ε , то, используя принцип Гаусса (см. § 7.9), получаем, что

$$C(B_\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon \times B_\varepsilon} G \, de_\varepsilon de_\varepsilon = \int_B p_\varepsilon de_\varepsilon \leq (1 - \varepsilon) C(B_\varepsilon), \quad (8)$$

где G — функция Грина области $D_3 \setminus \bar{D}_1$, а e_ε — электростатическое распределение для B_ε . Но это означает, что $C(B_\varepsilon) = 0$ ($\varepsilon > 0$), откуда

$$\begin{aligned} P_a \{x(m_{\partial D}) - \text{сингулярная точка}, m_{\partial D} < m_{\partial D_1}\} &= \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_a \{x(m_{\partial D}) \in B_\varepsilon, m_{\partial D} = m_{B_\varepsilon} < m_{\partial D_1}\} \leq \\ &\leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_a \{m_{B_\varepsilon} < m_{\partial D_1} \wedge m_{\partial D_3}\} = 0, \quad a \in D \setminus D_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Стягивая D_1 к точке, получаем (6).

Вернемся к шипу Лебега. Мы теперь в состоянии полностью разобраться в этом примере. Если мы докажем, что точка $b \in \partial D$ сингулярна, то для функции $f \in C(\partial D)$, равной 1 в b и меньшей 1

во всех других точках,

$$\lim_{\substack{a \rightarrow b \\ a \in D}} u(a) < 1 = f(b), \quad (10)$$

где u — решение (2) видоизмененной задачи Дирихле¹⁾. Действительно, пусть B — замкнутый шар $|b - a| \leq \varepsilon$ с центром в сингулярной точке b ; тогда

$$\begin{aligned} 1 > E_b(f[x(m_{\partial D})]) &\geq E_b\{m_{\partial B} < m_{\partial D}, f[x(m_{\partial D})]\} = \\ &= E_b\{m_{\partial B} < m_{\partial D}, u[x(m_{\partial B})]\} \geq P_b\{m_{\partial B} < m_{\partial D}\} \inf_{\substack{|b-a| \leq \varepsilon \\ a \in D}} u(a). \end{aligned} \quad (11)$$

Устремляя ε к 0, получаем отсюда формулу (10).

Пусть дана произвольная точка $a \in D$; распределение $h(a, db) = P_a\{x(m_{\partial D}) \in db\}$, используемое в представлении $u = \int_{\partial D} h(\cdot, db)f$

решения видоизмененной задачи Дирихле, — это так называемая *гармоническая мера* на границе ∂D относительно точки a . Об электрической интерпретации этой меры см. О. Д. Келлог [1].

7.13. Задача Неймана

Рассмотрим открытый d -мерный ($d \geq 2$) шар $D: b_1^2 + \dots + b_d^2 < 1$.

Пусть функция $f \in C(\partial D)$ такова, что $\int_{\partial D} f do = 0$ ²⁾. Классическая задача Неймана³⁾ состоит в том, чтобы найти такую функцию u , гармоническую на D , что $du/dn = f$ на ∂D , где d/dn обозначает дифференцирование по направлению внешней нормали.

Н. Икеда [1: 416—426] нашел вероятностный метод решения задачи Неймана, который демонстрируется ниже для $d = 2$.

Определим броуновское движение с отражением \mathbf{D} на замкнутом единичном круге как косое произведение $x = [r, \theta(t)]$ бesselевского движения с отражением и независимого от него броуновского движения по окружности, совершаемого во времени $t(t) =$

$= \int_0^t r(s)^{-2} ds$ (см. § 7.15). Введем новую диффузию $\mathbf{D}^*: x^* = x(t^{-1})$,

где $\bar{t} = t + t$, а t — бesselевское локальное время в точке 1, и рассмотрим пространство $C^*(D)$ функций u , определенных и ограни-

¹⁾ Примеры сингулярных шипов можно получить, используя (7.11.10) и (7.11.11).

²⁾ do — равномерное распределение на ∂D .

³⁾ И. Г. Петровский [2: 276—278].

ченных на замкнутом круге, непрерывных в открытом круге и таких, что $u(1, \cdot)$ непрерывна на окружности.

Если $f \in C^*(D)$ и $\alpha > 0$, то нетрудно видеть, что функция $G_\alpha f = E^* \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x^*) dt \right]$ непрерывна на замкнутом круге. Далее, как обычно, имеем $G_\alpha G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta = 0$ ($\alpha, \beta > 0$), так что $G_\alpha C^*(D) \equiv D(\mathfrak{G}^*)$ не зависит от α . Кроме того, из этого тождества получаем, что если $G_\alpha f = 0$ для какого-то $\alpha > 0$, то $0 = \lim_{\alpha \uparrow +\infty} \alpha G_\alpha f = f$ на открытом круге, откуда следует, что

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha (G_\alpha f)(1, \theta) = E_{(1, \theta)} \left[\alpha \int_{\{t: r(t)=1\}} e^{-\alpha f} f[1, \theta(t)] f(dt) \right] = \\ &= E_{(1, \theta)} \left[\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f[1, \theta(t)] t(dt) \right] \sim \\ &\sim f(1, \theta) E_{(1, \theta)} \left[\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t(dt) \right] \sim f(1, \theta), \quad \alpha \uparrow +\infty. \quad (1) \end{aligned}$$

Таким образом, отображение $G_\alpha: C^*(D) \rightarrow D(\mathfrak{G}^*)$ взаимно однозначно.

Теперь мы можем обычным путем определить производящий оператор \mathfrak{G}^* . Область определения $D(\mathfrak{G}^*)$ оказывается совпадающей с классом таких функций $u \in C(\bar{D})$, что функция

$$\mathfrak{G}^* u = \begin{cases} \mathfrak{G} u, & r < 1; \\ -\frac{\partial u}{\partial n}, & r = 1, \end{cases} \quad (2)$$

принадлежит классу $C^*(D)$; здесь \mathfrak{G} — это (локальный) стандартный броуновский производящий оператор, определяемый формулой (7.2.3).

Пусть функция $f \in C(\partial D)$ такова, что $\int_{\partial D} f do = 0$. Определим f^* как f на ∂D и 0 внутри круга и введем функцию $u = E_*[f^*(x^*)]$. Согласно Икеда, решение задачи Неймана с граничными значениями f задается формулой

$$v = G_{+0} f^* = \int_0^{+\infty} u dt. \quad (3)$$

Для доказательства рассмотрим математическое ожидание E^* , соответствующее бesselевскому движению, и в определении u

проинтегрируем сначала по круговому движению. Получим

$$u = E_r^+ \left\{ r(f^{-1}) = 1, \sum_{|n| > 0} e^{-n^2 I(f^{-1})/2} c_n e^{in\theta} \right\}, \quad (4)$$

где c_n есть n -й коэффициент Фурье функции f . Используя оценки

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |u_r| dt &\leq \int_0^{+\infty} dt E_r^+ \left\{ r(f^{-1}) = 1, \sum_{|n| > 0} e^{-n^2 I(f^{-1})/2} |c_n| \right\} = \\ &= E_r^+ \left[\int_{\{t: r(t) = 1\}} \sum_{|n| > 0} e^{-n^2 I(t)/2} |c_n| f(dt) \right] = \\ &= E_r^+ \left[\int_0^{+\infty} \sum_{|n| > 0} e^{-n^2 \int_0^t r(s) ds / 2} |c_n| f(dt) \right] \leq \\ &\leq \sum_{|n| > 0} |c_n| E_r^+ \left[\int_0^{+\infty} e^{-n^2 t / 2} f(dt) \right] = \sum_{|n| > 0} |c_n| G\left(\frac{n^2}{2}, r, 1\right) \leq \\ &\leq \sum_{|n| > 0} |c_n| G\left(\frac{n^2}{2}, 1, 1\right) \leq \sqrt{\sum_{|n| > 0} |c_n|^2} \sqrt{\sum_{|n| > 0} G\left(\frac{n^2}{2}, 1, 1\right)^2} \quad (5) \end{aligned}$$

и

$$G\left(\frac{n^2}{2}, 1, 1\right) \sim \frac{2}{n}, \quad n \uparrow +\infty, \quad (6)$$

находим, что функция $G_\alpha f^* = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} u dt$ ограничена при $\alpha \downarrow 0$ и

сходится к $v = G_{+0} f^* = \int_0^{+\infty} u dt$. Устремляя β к 0 в равенстве $[G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta] f = 0$, получаем $v = G_\alpha (f^* + \alpha v)$, откуда сразу следует, что $v \in D(\mathfrak{G}^*) \subseteq C^*(D)$ и $\mathfrak{G}^* v = -f^*$. Иначе говоря,

$$\mathfrak{G}^* v = \begin{cases} \mathfrak{G} u = 0 & \text{внутри } D; \\ -\frac{\partial u}{\partial n} = -f & \text{на } \partial D, \end{cases} \quad (7)$$

что нам и было нужно.

7.14. Пространственно-временное броуновское движение

Рассмотрим пространственно-временное броуновское движение

$$\dot{z}(s) = [t - s, x(s)], \quad s \geq 0, \quad (1)$$

1) G — функция Грина для бesselевского движения с отражением.

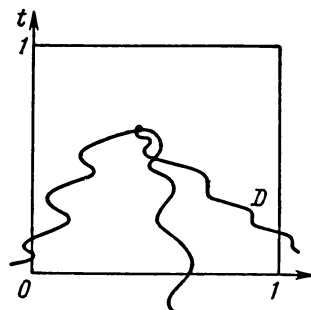
где $x(s): s \geq 0$ — стандартное броуновское движение. Через $P_{(t,a)}$ мы будем обозначать меру, соответствующую пространственно-временным траекториям, начинающимся в точке $(t, a) \in R^1 \times R^d$.

Дуб [4] заметил, что производящий оператор пространственно-временного броуновского движения есть $\mathcal{G} = -\partial/\partial t + \Delta/2$, и использовал это для того, чтобы рассмотреть задачи передачи тепла

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta u &= 0, \quad (t, a) \in D \subseteq R^{d+1}; \\ u &= f \in C(\partial D), \quad (t, a) \in \partial D, \end{aligned} \quad (2)$$

как задачи Дирихле.

Ограничимся случаем $d=1$, $D = (0, 1) \times (0, 1) = \{(t, a): 0 < t, a < 1\}$ и попытаемся применить метод вероятностного решения задачи Дирихле для Δ . Естественно ожидать, что решение u задачи (2) является интегралом от f по ∂D относительно распределения точки первого достижения



Р и с. 1.

$$\mathfrak{z}(m), \quad m = \min \{s: s > 0, \mathfrak{z}(s) \in \partial D\}, \quad (3)$$

которое зависит от начальной точки $\mathfrak{z}(0) = (t, a) \in D$ пространственно-временной траектории (см. рис. 1). Действительно, пусть m_0 и m_1 — моменты первого достижения одномерной броуновской траекторией точек 0 и 1, а $E_a: 0 < a < 1$ — математическое ожидание для одномерного броуновского движения. Тогда

$$\begin{aligned} u(t, a) &= E_{(t,a)}[f(\mathfrak{z}(m))] = E_a\{m_0 < m_1 \wedge t, f(t - m_0, 0)\} + \\ &+ E_a\{m_1 < m_0 \wedge t, f(t - m_1, 0)\} + E_a\{t < m_0 \wedge m_1, f(0, x(t))\} = \\ &= \int_0^t f(t-s, 0) \sum_{n=1}^{\infty} n\pi e^{-n^2\pi^2 s/2} \sin n\pi a \, ds + \\ &+ \int_0^t f(t-s, 1) \sum_{n=1}^{\infty} n\pi e^{-n^2\pi^2 s/2} \sin n\pi(1-a) \, ds + \\ &+ \int_0^1 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t/2} \sin n\pi a \sin n\pi b f(0, b) \, db. \end{aligned} \quad (4)$$

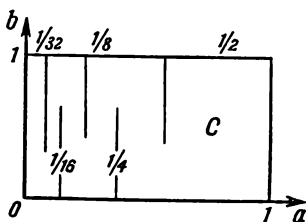
Легко проверить, что это в точности совпадает с классическим (дьюамелевским) решением задачи (2), изложенным, например, у Г. Дёча [1: 346—366].

Конечно, если говорить вполне точно, задача (2) поставлена некорректно, так как $u=f$ нельзя задавать на $1 \times (0, 1) \subset \partial D$.

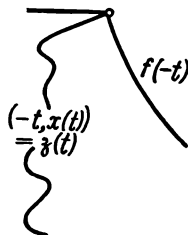
Но интеграл в выражении (4) распространяется только на множество $\bar{D} \setminus 1 \times (0, 1)$; это объясняется тем, что $1 \times (0, 1)$ имеет нулевые *параболические* меры относительно точек из D :

$$P_{(t, a)}\{\zeta(m) \in 1 \times (0, 1)\} = 0, \quad (t, a) \in D. \quad (5)$$

Задачи Дирихле, в которых решение определяется по известным значениям f на *части* границы ∂D , выглядят несколько странно; но читатель вспомнит, что то же происходит для классической задачи Дирихле в плоских областях, обладающих простыми



Р и с. 2.



Р и с. 3.

концами. Так, например, $0 \times [0, 1]$ является простым концом для области C , находящейся «внутри рта крокодила Литлвуда», изображенного на рис. 2. Броуновское движение с остановкой на ∂C не может достичь этого отрезка, и значения f на нем не влияют на решение задачи Дирихле.

Пусть D — открытое подмножество в R^2 . Точка, принадлежащая ∂D , является сингулярной для пространственно-временного движения, если момент первого достижения $m = \inf\{s : s > 0, \zeta(s) \in \partial D\}$ положителен на множестве траекторий полной меры. Блюменталевский закон 0—1 показывает, что в противном случае на множестве траекторий полной меры $m = 0$. Например, для области $(0, 1)^2$ все точки $1 \times (0, 1) \subset \partial(0, 1)^2$ сингулярны.

Теперь рассмотрим область D , лежащую на рис. 3 левее графика $f(-t) : t \leq 0$.

Утверждение критерия Колмогорова (§ 4.12) состоит в том, что если $f \in C(0, 1]$, $f \in \uparrow$ и $t^{-1/2}f \in \downarrow$, то точка 0 является регулярной или сингулярной для области D в зависимости от того,

$\int_0^1 t^{-3/2} f e^{-f^2/2t} dt = +\infty$ или $< +\infty$; таким образом, критерий Колмогорова играет роль критерия Винера для пространственно-временного броуновского движения (см. рис. 3).

Доказательства критерия Колмогорова, данные Эрдешем и Феллером, длины и сложны, а доказательство Мотоо не элемен-

тарно. Поэтому естественно спросить, нельзя ли дать новое доказательство этого критерия, аналогичное вероятностному доказательству критерия Винера, оценивая вероятности достижения слоев (параболических), на которые разбивается дополнение к D , через (тепловые) емкости; но это открытая проблема.

Задача 1. Рассмотрим движение, обладающее простым марковским свойством, с вероятностями $P_a^t\{w_t^+ \in B\}$ ($t \geq 0$, $a \in Q$, $B \in \mathcal{B}$), зависящими от времени (мы временно отказываемся от нашего обычного предположения однородности по времени). Иначе говоря, пусть распределение $P_a^t\{x(t) \in db\}$ состоит из единичной массы в точке $b = a$, а при $t_2 > t_1$, $a \in Q$, $B \in \mathcal{B}$

$$P_a^{t_1}\{w_{t_2}^+ \in B \mid x(s): t_1 \leq s \leq t_2\} = P_a^{t_2}\{w_{t_2}^+ \in B\},$$

$$b \equiv x(t_2).$$

Задача состоит в том, чтобы доказать, что *пространственно-временное* движение в фазовом пространстве $Q^* = [0, +\infty) \times Q$ с вероятностями

$$P_{a^*}(B^*) = P_a^s\{w_s^{*+} \in B^*\}, \quad w^*: t \rightarrow (t, x(t)), \quad a^* = (s, a) \in Q^*,$$

обладает простым марковским свойством, *причем вероятности уже не зависят от времени*. Другими словами, за счет добавления времени в качестве новой координаты можно избавиться от неоднородности по времени.

Задача 2. Пусть $\sigma^2 = \sigma^2(t, a)$ — гладкая положительная функция от пары $(t, a) \in [0, +\infty) \times R^1$, и пусть $t \rightarrow x(t)$ — траектория стандартного одномерного броуновского движения с вероятностями $P_a(B)$. Рассмотрим при $t \geq 0$ обратную функцию \tilde{f}^{-1} для единственного решения $\tilde{f} = \tilde{f}(s)$ уравнения

$$\tilde{f}(s) = \int_0^s \sigma^2[t + \tilde{f}(r), x(r)] dr, \quad s \geq 0.$$

Тогда неоднородное по времени движение с вероятностями

$$P_a^t\{w_t^+ \in B\} = P_a\{x(\tilde{f}^{-1}) \in B\}, \quad (t, a) \in [0, +\infty) \times R^1,$$

является просто марковским и $u(t, a) \equiv P_a^t\{x(t_1) < b\}$ удовлетворяет уравнению $\partial u / \partial t = \frac{1}{2} \sigma^2 \partial^2 u / \partial a^2$ ($t < t_1$); соответствующее пространственно-временное движение есть диффузия с производящим оператором

$$(\mathfrak{G}^* u)(a^*) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial a^2}, \quad a^* = (t, a) \in [0, +\infty) \times R^1.$$

(Волконский [2] подходит к приведенной выше замене времени с другой, неожиданной стороны.)

7.15. Сферическое броуновское движение и косые произведения

Определим *сферическое броуновское движение* $\mathbf{BM}(S^d)$ как диффузию на сферической поверхности $S^d: |x|=1 \subset R^{d+1}$ с производящим оператором, равным половине от сферического оператора Лапласа $\Delta = \Delta^d$, замкнутого таким образом, как это делается в задаче 7.2.1:

$$\Delta^d = (\sin \varphi)^{1-d} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi)^{d-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} + (\sin \varphi)^{-2} \Delta^{d-1}, \quad (1)$$

φ — широта, отсчитываемая от полюса; $\Delta^1 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

Движение $\mathbf{BM}(S^1)$ получается при отображении стандартного одномерного броуновского движения на единичную окружность, получающуюся при отождествлении точек по модулю 2π . Движение $\mathbf{BM}(S^2)$ строится следующим образом.

Пусть даны броуновское движение на окружности $\mathbf{BM}(S^1)$ с траекториями $t \rightarrow \theta(t)$ и независимый от него лежандровский процесс $\mathbf{LEG}(2)$ на отрезке $[0, \pi]$ с производящим оператором

$$\frac{1}{2} (\sin \varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (0 < \pi < \varphi) \quad (2)$$

и траекториями $t \rightarrow \varphi(t)$. Тогда мы можем определить аддитивный функционал (шкалу времени)

$$\mathfrak{I}(t) = \int_0^t [\sin \varphi(s)]^{-2} ds, \quad (3)$$

который сходится при $t \geq 0$, если $0 < \varphi(0) < \pi$. Косое произведение

$$x = [\varphi, \theta(\mathfrak{I})] \quad (4)$$

является диффузией, так как процесс θ начинается заново в момент \mathfrak{I} .

Вычислим производящий оператор \mathfrak{G} этой диффузии. Пусть f — произведение гладкой функции от широты $e_- = e_-(\varphi)$, обращающейся в нуль в точках 0 и π , и гладкой функции от долготы $e_+ = e_+(\theta)$. Тогда при $t \downarrow 0$

$$\begin{aligned} E_\varphi \times E_\theta [f(x)] &= E_\varphi [e_-(\varphi(t)) E_\theta [e_+(\theta(\mathfrak{I}))]] = \\ &= E_\varphi [e_-(\varphi(t)) \left[e_+(\theta) + \frac{1}{2} e_+''(\theta) \mathfrak{I} \right]] + o(t) = e_-(\varphi) e_+(\theta) + \\ &+ \frac{1}{2} (\sin \varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} e_-(\varphi) e_+(\theta) t + \\ &+ e_-(\varphi) \frac{1}{2} e_+''(\theta) (\sin \varphi)^{-2} t + o(t), \quad (5) \end{aligned}$$

т. е. для таких функций $\mathcal{G}f = \Delta f/2$. Отсюда сразу следует, что рассматриваемое косое произведение — это движение $\mathbf{BM}(S^2)$.

Аналогичным образом можно представить $\mathbf{BM}(S^d)$ в виде косого произведения лежандровского процесса $\mathbf{LEG}(d)$ с производящим оператором

$$\frac{1}{2}(\sin \varphi)^{1-d} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi)^{d-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (0 < \varphi < \pi) \quad (6)$$

и независимого от него сферического броуновского движения

$\mathbf{BM}(S^{d-1})$, совершаемого во временной шкале $\mathfrak{t} = \int_0^t (\sin \varphi)^{-2} ds$.

Движение $\mathbf{BM}(R^d)$ тоже можно представить в виде косого произведения его радиальной (бесселевской) части $\mathbf{BES}(d)$ с производящим оператором

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (r > 0) \quad (7)$$

и независимого от этой части сферического броуновского движения

$\mathbf{BM}(S^{d-1})$, совершаемого во времени $\mathfrak{t} = \int_0^t r_s^{-2} ds$; доказательство проводится так же.

Формулу с косым произведением $\mathbf{BES}(2) \times \mathbf{BM}(S^1) = \mathbf{BM}(R^2)$ можно использовать для проверки результата Ф. Спитцера [1: 194], состоящего в том, что для двумерных броуновских траекторий, начинающихся не в 0, полный алгебраический угол $\varphi(t)$, заметаемый к моменту t , имеет предельное распределение

$$\lim_{t \uparrow +\infty} P. \left\{ \frac{2\varphi(t)}{\ln t} \leq a \right\} = (\pi)^{-1} \int_{-\infty}^a \frac{db}{1+b^2}. \quad (8)$$

Так как $\mathbf{BM}(S^1)$ — это движение $\mathbf{BM}(R^1)$, рассматриваемое по модулю 2π , то φ совпадает по распределению с одномерным броуновским движением $\mathbf{BM}(R^1)$, совершаемым в независимой

от него бесселевской временной шкале $\int_0^t r_s^{-2} ds$. Это показывает, что

$$E. [e^{i\alpha\varphi(t)}] = E. \left[e^{-\frac{\alpha^2}{2} \int_0^t r_s^{-2} ds} \right]. \quad (9)$$

Взяв преобразование Лапласа, получаем, что функция

$$f = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} E. [e^{i\alpha\varphi(t)}] dt = E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} e^{-\frac{\alpha^2}{2} \int_0^t r_s^{-2} ds} dt \right], \quad \beta > 0, \quad (10)$$

зависит только от радиуса и удовлетворяет уравнению

$$\left[\beta - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\alpha^2}{r^2} \right) \right] f = 1, \quad r > 0. \quad (11)$$

Вычисляя функцию Грина для уравнения (11) и решая его, находим

$$f(a) = K_{|\alpha|}(\sqrt{2\beta}a) \int_0^a I_{|\alpha|}(\sqrt{2\beta}b) 2b db + \\ + I_{|\alpha|}(\sqrt{2\beta}a) \int_a^{+\infty} K_{|\alpha|}(\sqrt{2\beta}b) 2b db. \quad (12)$$

Используя таблицы А. Эрдейи [1 (1): 284 (56)] для обращения преобразования Лапласа, получаем

$$E. [e^{i\alpha\varphi(t)}] = (2t)^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-(a^2+b^2)/2t} I_{|\alpha|} \left(\frac{ab}{t} \right) 2b db, \quad (13) \\ a = r(0) > 0.$$

Подставляем сюда $2\alpha/\ln t$, вместо α , полагаем $t \uparrow +\infty$ и окончательно получаем

$$E. [e^{i\alpha 2\varphi(t)/\ln t}] = (2t)^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{a^2+b^2}{2t}} I_{2|\alpha|/\ln t}(ab/t) 2b db \sim \\ \sim \int_0^{+\infty} e^{-b^2/2} I_{2|\alpha|/\ln t} \left(\frac{ab}{\sqrt{t}} \right) b db \rightarrow e^{|\alpha|} = \frac{1}{\pi} \int e^{i\alpha b} (1+b^2)^{-1} db. \quad (14)$$

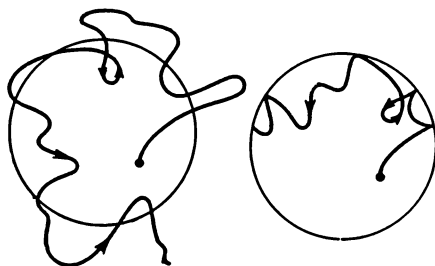
Поучительна статья С. Бохнера [2], где он рассматривает сферические процессы с независимыми приращениями; броуновские движения на сферах являются их частным случаем.

А. Р. Гальмарино [1] доказал, что самая общая диффузия с числом измерений $d \geq 2$, *изотропная* в смысле инвариантности ее распределений относительно (полной) группы вращений $O(d)$, может быть представлена в виде косоого произведения ее радиального движения и сферического броуновского движения $\mathbf{BM}(S^{d-1})$, совершаемого в некоторой случайной временной шкале \mathfrak{f} , которая является аддитивным функционалом от радиального движения.

Задача 1. Используя замены времени и косые произведения, проверить, что если взять участки траектории двумерного броуновского движения, находящиеся в круге $E^2: r < 1$, и вращением сомкнуть их друг с другом, как это показано на рис. 1, то полученное движение совпадает по распределению с броуновским дви-

жением с отражением $\mathbf{BM}^+(E^2)$, производящий оператор которого \mathcal{G}^+ равен $\Delta/2$, $u^+(1, \theta) = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ (u^+ — производная по направлению внешней нормали).

[Рассмотрим радиальную часть от $\mathbf{BM}(R^2)$ — бesselевское движение $\mathbf{BES}(2)$ и пусть $f(t)$ — время, которое это движение проводит в $[0, 1]$ до момента t . Если заменить в движении $\mathbf{BES}(2)$ временную шкалу t на f^{-1} , то получится бesselевское движение



Р и с. 1.

с отражением; $\mathbf{BM}^+(E^2)$ является косым произведением этого движения и независимого от него броуновского движения по окружности $\mathbf{BM}(S^1)$. Угловая часть этого косого произведения равна

$\theta \left[\int_0^t r(f^{-1})^{-2} ds \right]$, где $\theta = \mathbf{BM}(S^1)$, $r = \mathbf{BES}(2)$. Так как t есть

mes $\{s: r(s) \leq 1, s \leq f^{-1}(t)\}$, то, заменяя в интеграле, стоящем в скобках, s на $f(s)$, получаем $\theta \left[\int_0^{f^{-1}(t)} r^{-2} df \right]$. Но это выражение сов-

падает по распределению с угловой частью $\theta \left[\int_0^t r(s)^{-2} ds \right]$ стандартного броуновского движения, из которой выброшены участки, на которых процесс находится вне E^2 .]

Задача 2. Рассмотреть движение на плоскости с производящим оператором $\mathcal{G} = \Delta/2$, если $r < 1$, и $\mathcal{G} = (r^4/2)\Delta$, если $r \geq 1$. Переведа при помощи инверсии $r \rightarrow 1/r$ участки траектории вне единичного круга внутрь этого круга, проверить, что полученное движение является диффузией, и найти его производящий оператор \mathcal{G}^+ .

[Оператор \mathcal{G} не меняется при инверсии, поэтому полученное движение оказывается марковским. Оператор \mathcal{G}^+ равен $\Delta/2$ с граничными условиями $u^+(1, \cdot) = 0$, $u \in D(\mathcal{G}^+)$, т. е. это броуновское движение с отражением.]

Задача 3. Функция Грина для d -мерного броуновского движения ($d \geq 2$) равна

$$G(\alpha, a, b) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (2\pi t)^{-d/2} e^{-|b-a|^2/2t} dt = \\ = (2\pi)^{-d/2} \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{|b-a|} \right)^{d/2-1} K_{d/2-1}(\sqrt{2\alpha}|b-a|) \quad (15)$$

(см. А. Эрдейи [1(1): 146(29)]). Используя косое произведение, представить G в виде

$$(2\pi)^{-1} I_0(\sqrt{2\alpha}|a|) K_0(\sqrt{2\alpha}|b|) + \\ + \pi^{-1} \sum_{n \geq 1} I_n(\sqrt{2\alpha}|a|) K_n(\sqrt{2\alpha}|b|) \cos n(\theta_2 - \theta_1), \\ a = (|a|, \theta_1), b = (|b|, \theta_2), |a| \leq |b|, \quad (16)$$

в случае $d=2$; а при $d \geq 3$ — в виде

$$\frac{\Gamma(d/2)}{2(d-2)\pi^{d/2}} \sum_{n \geq 0} (2n+d-2) C_n^{(d-2)/2} [(\theta_1, \theta_2)] \times \\ \times |a|^{1-d/2} I_{\#(n)}(\sqrt{2\alpha}|a|) |b|^{1-d/2} K_{\#(n)}(\sqrt{2\alpha}|b|), \\ \#(n) = \sqrt{n(n+d-2) + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2}. \quad (17)$$

У А. Эрдейи [2(2): 44(4)] имеется утверждение (16), но не (17). Здесь $C_n^{(d-2)/2}$ — многочлен Гегенбауэра, содержащийся в правиле сложения сферических гармоник порядка n :

$$\frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{2n+d-2}{d-2} C_n^{(d-2)/2} [(\theta_1, \theta_2)] = \sum_{l \leq m(n)} S_n^l(\theta_1) S_n^l(\theta_2),$$

где $m(n)$ — число сферических гармоник порядка n ; см. А. Эрдейи [2(2): 243(2)].

[Имеем

$$(G_\alpha f)(r, \theta) = E_r \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \sum_{n \geq 0} e^{-\frac{(n/2)(n+d-2)}{2} \int_0^t r(s)^{-2} ds} \times \right. \\ \left. \times \sum_{l \leq m(n)} S_n^l(\theta) \int S_n^l(\psi) d\psi f(r(t), \psi) \right],$$

где E — математическое ожидание, соответствующее бesselевскому процессу. Поэтому

$$G = \sum_{n=0}^{+\infty} G^n(\alpha, |a|, |b|) \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{2n+d-2}{d-2} C_n^{(d-2)/2} [(\theta_1, \theta_2)],$$

где G^n — функция Грина для процесса BES(d) с убывающей мерой $n(n+d-2)r^{d-3}dr$; т. е. G^n — функция Грина

$$G^n(\alpha, \xi, \eta) = \xi^{1-d/2} I_{\#(n)}(\sqrt{2\alpha}\xi) \eta^{1-d/2} K_{\#(n)}(\sqrt{2\alpha}\eta),$$

$$\#(n) = \sqrt{n(n+d-2) + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2}, \quad \xi \leq \eta,$$

соответствующая

$$\mathcal{G}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n(n+d-2)}{r^2} \right) \quad (r \geq 0).]$$

Задача 4. Построить диффузию на замкнутом единичном круге E^2 , совпадающую по распределению с $\mathbf{BM}^+(E^2)$ вплоть до момента $\mathfrak{m}_{\partial E^2}$ и такую, что для гладкой функции $u \in D(\mathcal{G})$

$$p_2 u_1(1-0, \cdot) + p_3 (\mathcal{G}u)(1-0, \cdot) = p_2^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta} + \frac{1}{2} p_3^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2},$$

$$u^* \equiv u(1, \theta), \quad p_2, p_3, p_2^*, p_3^* \geq 0, \quad p_2 + p_3 = 1.$$

(Использовать косые произведения и локальные времена.) А. Вентцель [1] изучил это движение с другой точки зрения; см. также Н. Икеда [1], Т. Уэно [2] и § 8.5.

[Рассмотрим бesselевское движение на $[0, 1]$ с производящим оператором \mathcal{G}^+ с граничными условиями $p_2 u^-(1) + p_3 (\mathcal{G}^+ u)(1) = 0$ для $u \in D(\mathcal{G}^+)$ и независимое от него стандартное броуновское движение θ по окружности. Пусть t — бesselевское локальное время в точке $r=1$ (при $p_2=0$ полагаем $t = (t - \mathfrak{m}_1) \vee 0$). Тогда движение, которое нужно построить, задается косым производением

$$\left[r(t), \theta \left[\int_0^t r(s)^{-2} ds + p_3^* t(t) \right] + p_2^* t(t) \right], \quad t \geq 0.$$

Действительно, это движение является марковским; до момента $\mathfrak{m}_{\partial E^2}$ оно совпадает со стандартным броуновским движением; и простое вычисление показывает, что для гладких f функция $u = G_\alpha f$ удовлетворяет условию

$$p_2 u_1(1-0, \cdot) + p_3 (\mathcal{G}u)(1-0, \cdot) = p_2^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta} + \frac{1}{2} p_3^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2}.]$$

7.16. Вращение

Рассмотрим d -мерное косое произведение

$$[r(t), \theta(t(t))], \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Пусть *радиальной частью* будет несингулярная консервативная диффузия на $[0, +\infty)$ со шкалой s и мерой скорости m , причем граница 0 — вход, но не выход, а $+\infty$ — не выход. Угловая часть

пусть будет независимым от радиальной части $(d-1)$ -мерным сферическим броуновским движением, совершаемым во временной шкале $l(t) = \int_0^{+\infty} t(t, r) l(dr)$, где t — локальное время для радиального процесса, а l — неотрицательная мера, конечная для компактных подмножеств из $(0, +\infty)$. С помощью простой выкладки получаем, что это косое произведение является диффузией с производящим оператором (локальным)

$$\mathcal{G}u(r, \theta) = \frac{u^+(dr, \theta) + l(dr) \frac{1}{2} (\Delta u)(r, \theta)}{m(dr)}, \quad r \neq 0, \quad (2)$$

и операторами Грина

$$G_{\alpha} e_+ e_- = E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e_+[r(t)] dt \int p(l(t), \cdot, \theta) e_-(\theta) d\theta. \right] \quad (3)$$

Здесь Δ есть $(d-1)$ -мерный сферический оператор Лапласа; $e_+ = e_+(r)$ — функция от радиуса, $e_- = e_-(\theta)$ — функция на сфере; $E.$ — оператор математического ожидания для радиального процесса. Ядро под знаком интеграла — это переходная плотность для броуновского движения на сфере

$$p(t, \theta_1, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\gamma_n t} \sum_{l \leq m(n)} S_n^l(\theta_1) S_n^l(\theta_2), \quad (4)$$

где γ_n — собственное значение $n(n+d-2)/2$, общее для сферических гармоник S_n^l : $l \leq m(n)$ порядка n ($(1/2) \Delta S_n^l = \gamma_n S_n^l$).

Мы хотим выяснить, можно ли это косое произведение дополнить до диффузии на всем R^d ?

Ответ отрицателен, если

$$\int_0^1 s(\xi) l(d\xi) > -\infty. \quad (5)$$

Действительно, операторы Грина дополненного движения должны отображать $C(R^d)$ в себя. Если $e_+ \in C[0, +\infty)$, $e_+(0) = 0$, а e_- — сферическая гармоника порядка $n > 1$, то $e_+ e_- \in C(R^d)$. Выражение

$$\begin{aligned} (G_{\alpha} e_+ e_-)(0) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (G_{\alpha} e_+ e_-)(\varepsilon, \theta) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_{\varepsilon} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e_+ e^{\gamma_n l} dt \right] e_-(\theta) = \\ &= E_0 \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e_+ e^{\gamma_n l} dt \right] e_-(\theta) \quad (6) \end{aligned}$$

может не зависеть от θ только в том случае, когда

$$E_0 \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{\gamma n I} dt \right] = 0,$$

т. е. когда

$$P_0 \{I(+0) = +\infty\} = 1. \quad (7)$$

Но как мы знаем из § 4.6,

$$P_0 \{I(+0) = +\infty\} = 0 \text{ или } 1 \text{ в зависимости от того, сходится или расходится (к } -\infty) \text{ интеграл } \int_0^1 s(\xi) l(d\xi). \quad (8)$$

Формула (7) означает, что траектория входит в $R^d \setminus 0$ из 0, вращаясь так же, как сферическое броуновское движение, определенное при $-\infty < t \leq 0$, когда t от $-\infty$ доходит до конечных значений.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим угловую часть θ^+ траектории, входящей в $R^d \setminus 0$, и заметим, что распределение $P_0 \{\theta^+(t) \in d\theta | r(s): s \geq 0\}$ должно быть равномерным по сфере.

Пусть $1 > t_1 = 1 - s_1 > t_2 = 1 - s_2 > \dots > t_n = 1 - s_n > 0$. Положим $\Gamma^-(t) = \Gamma(t, w_{1-t}^+)$ ($0 \leq t \leq 1$); нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} P_0 \{ \theta^+(1 - s_1) \in d\theta_1, \theta^+(1 - s_2) \in d\theta_2, \dots \\ \dots, \theta^+(1 - s_n) \in d\theta_n | r(t): 0 \leq t \leq 1, \theta^+(1) \} = \\ = d\theta_n p(\Gamma^-(t_{n-1} - t_n, w_{t_n}^+), \theta_n, \theta_{n-1}) d\theta_{n-1} \times \dots \\ \dots \times p(\Gamma^-(t_2 - t_3, w_{t_3}^+), \theta_3, \theta_2) d\theta_2 \times p(\Gamma^-(t_1 - t_2, w_{t_2}^+), \theta_2, \theta_1) d\theta_1 \times \\ \times p(\Gamma^-(1 - t_1, w_{t_1}^+), \theta_1, \theta^+(1)) = p(\Gamma^-(s_1), \theta^+(1), \theta_1) d\theta_1 \times \\ \times p(\Gamma^-(s_2) - \Gamma^-(s_1), \theta_1, \theta_2) d\theta_2 \times \dots \\ \dots \times p(\Gamma^-(s_n) - \Gamma^-(s_{n-1}), \theta_{n-1}, \theta_n) d\theta_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Но полученное утверждение означает, что при условии, что фиксированы $r(t): 0 \leq t \leq 1$ и $\theta^+(1)$, процесс $\theta^+(1 - s): 0 \leq s \leq 1$ совпадает по распределению с процессом $\theta(\Gamma^-(s)): 0 \leq s < 1$, выходящим из точки $\theta(0) = \theta^+(1)$. Так как

$$\Gamma^-(1 - 0) = \lim_{t \uparrow 1} \int_0^{+\infty} t(t, r, w_{1-t}^+) l(dr) = \Gamma^-(1) = +\infty, \quad (10)$$

то предложенная интерпретация условия (7) доказана.

Попутно мы получаем, что необходимое условие $\int_0^1 s \, dl = -\infty$

является также достаточным для того, чтобы косое произведение можно было дополнить до диффузии. Действительно, пусть $r(0) = 0$; θ — независимое от радиальной части сферическое броуновское движение, определенное при $-\infty < t < +\infty$; и пусть $\theta(0)$ имеет равномерное распределение по сфере. Тогда нетрудно видеть, что входящая в $R^d \setminus 0$ траектория

$$\begin{aligned} 0, & \quad t = 0; \\ [r(t), \theta(-t(1-t))], & \quad 0 < t \leq 1; \\ [r(t), \theta(t(1-t), \omega_t)], & \quad t > 1, \end{aligned} \quad (11)$$

обладает марковским свойством и на $R^d \setminus 0$ совпадает с косым произведением (1), причем операторы Грина отображают $C(R^d)$ в себя.

Задача 1. Дать полное доказательство всех утверждений, сделанных относительно процесса (11).

Задача 2. Используя критерии Эрдеша — Дворецкого и Спитцера из § 4.12, вычислить скорость роста $\Gamma(t) (t \uparrow 1)$ для производящих операторов

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^\varepsilon} \Delta \right), \quad \varepsilon > 0, \quad d \geq 0.$$

Задача 3. Найти все изотропные марковские пополнения косого произведения (1) в случае $\int_0^1 s(\xi) l(d\xi) > -\infty$.

7.17. Индивидуальная эргодическая теорема для стандартного двумерного броуновского движения

Рассмотрим стандартное двумерное броуновское движение. Пусть $e = e(t)$ — аддитивный функционал от броуновской траектории. Мы можем определить такую неотрицательную меру $e(db)$, что для любой гриновской области D

$$E_a [e(m_{\partial D})] = \int_D G_D(a, b) e(db), \quad a \in D, \quad (1)$$

где G_D — функция Грина области D . Чтобы доказать это, достаточно заметить, что левая часть равенства (1) — эксцессивная функция от $a \in D$ и применить результаты § 7.5. (Относительно

таких броуновских аддитивных функционалов см. Г. П. Маккин и Х. Танака [1], а также § 7.19.)

Как и в одномерном случае (§ 6.8), мы докажем, что

$$P. \left\{ \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{e_1(t)}{e_2(t)} = \frac{e_1(R^2)}{e_2(R^2)} \right\} = 1, \text{ если } 0 < e_2(R^2) < +\infty, \quad (2a)$$

и

$$\lim_{t \uparrow +\infty} P. \left\{ \frac{4\pi}{\ln t} e(t) < ue(R^2) \right\} = 1 - e^{-u}, \quad u \geq 0, \\ 0 < e(R^2) < +\infty. \quad (2b)$$

Элементарным примером аддитивного функционала является

$$e(t) = \int_0^t f[x(s)] ds; \quad (3)$$

для него $e(db) = 2f(b)db$. В этом частном случае формула (2a) была доказана Г. Маруяма и Х. Танака [2], а формула (2b) — Дж. Каллианпуром и Г. Роббинсом [1].

Докажем эти формулы в общем случае. Предположим, что $x(0) = 0$ (это не ограничит общности), и введем обозначение $m_t = \min\{t: |x| = l\}$. Определим m^n ($n \geq 0$) как последовательные моменты возвращения на окружность $|a| = 1$ через $|a| = 2$; т. е. положим

$$m^0 = m_1, \quad m^n = m^{n-1} + m(\omega_m^{+n-1}) \quad (n \geq 1), \quad m = m_2 + m_1(\omega_m^{+2}). \quad (4)$$

В силу изотропности x последовательность $e_n = e(m^n) - e(m^{n-1})$ ($n \geq 1$) инвариантна относительно сдвигов, и из индивидуальной эргодической теоремы Биркгофа вытекает, что существует $\gamma = \lim_{n \uparrow +\infty} e(m^n)/n$. Случайная величина γ измерима относительно σ -алгебры $\bigcap_{n \geq 1} B\{x(t): t > n\}$, которая совпадает с σ -алгеброй $\bigcap_{n \geq 1} B\{tx(1/t): t < 1/n\}$. Так как процесс $[tx(1/t), p_0]$ имеет те же распределения, что $x(t)$, то, согласно блюменталевскому закону 0—1, эта величина постоянна; а из эргодической теоремы Биркгофа вытекает, что $\gamma = E_0(e_1)$, т. е.

$$P_0 \left\{ \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{e(m^n)}{n} = E_0(e_1) \right\} = 1. \quad (5)$$

Пользуясь аддитивностью e и изотропностью x , легко получаем, что

$$E_0(e_1) = E_0[e(m') - e(m^0)] = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta [E_{(1, \theta)}(e(m_2)) + E_{(2, \theta)}(e(m_1))] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta [E_{(1, \theta)}(e(m_2)) + \lim_{n \uparrow +\infty} E_{(2, \theta)}(e(m_1 \wedge m_n))] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_{R^2} G_{02}((1, \theta), b) e(db) + \lim_{n \uparrow +\infty} \int_{R^2} G_{1n}((2, \theta), b) e(db) \right] = \\
&= \int_{R^2} e(db) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta [G_{02}((1, \theta), b) + \lim_{n \uparrow +\infty} G_{1n}((2, \theta), b)] d\theta, \quad (6)
\end{aligned}$$

где G_{02} — функция Грина области $|a| < 2$, а G_{1n} — области $1 < |a| < n$.

Подинтегральная функция $G(b)$ внешнего интеграла в силу изотропности процесса x , очевидно, является функцией только от радиуса $G(|b|)$; она полунепрерывна снизу как предел неубывающей последовательности непрерывных функций.

Применяя формулу (6) к функционалу (3), соответствующему неотрицательной функции от радиуса f , получаем

$$E_0 \left[\int_{m^0}^{m^1} f(x(s)) ds \right] = 2 \int_{R^2} G(|b|) f(b) db = 4\pi \int_0^{+\infty} G(r) f(r) r dr. \quad (7)$$

С другой стороны, мы можем вычислить это математическое ожидание, пользуясь бesselевским процессом D^* : $r(t) = |x(t)|$. Обозначая через m^* момент первого достижения этим процессом точки 1 через точку 2, а через t^* — бesselевское локальное время, имеем

$$\begin{aligned}
E_0 \left[\int_{m^0}^{m'} f(|x(s)|) ds \right] &= E_1 \left[\int_0^{m^*} f(r(s)) ds \right] = \\
&= E_1 \left[\int_0^{t^*} f(r) 2r dr \right] = 2 \int_0^{+\infty} E_1[t^*(m^*, r)] f(r) r dr = \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \ln 2f(r) r dr \quad (8)
\end{aligned}$$

[см. (6.8.6)].

Сравнивая (7) с (8), получаем, что $G(r) = \ln 2/2\pi$ для почти всех r , а поскольку функция $G(r)$ полунепрерывна снизу, это верно для всех r . Иначе говоря,

$$P_0 \left\{ \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{e(m^n)}{n} = \frac{\ln 2e(R^2)}{2\pi} \right\} = 1. \quad (9)$$

Так же как в § 6.8, из (9) получаем (2а).

В силу (2а) достаточно доказать формулу (2б) для $e(t) = \int_0^t f[|x(s)|] ds$, где $f \geq 0$ и $0 < \int f(r) r dr < +\infty$. Это можно сделать, используя бесселевский процесс D : $r(t) = |x(t)|$. Имеем

$$P_0 \left\{ \frac{4\pi}{\ln t} e(t) < ue(R^2) \right\} =$$

$$= P_0 \left\{ \frac{4}{\ln t} \int_0^t f[r(s)] ds < 4u \int_0^{+\infty} f(r) r dr \right\} =$$

$$= P_0 \left\{ \frac{2}{\ln t} \int_0^t f[r(s)] ds < u \int_0^{+\infty} f(r) 2r dr \right\}.$$

Согласно задаче 6.8.4, при $t \uparrow +\infty$ последнее выражение стремится к $1 - e^{-u}$.

Об эргодической теореме для общих марковских процессов см. Т. Харрис и Г. Роббинс [1], Г. Маруяма и Х. Танака [2] и Т. Уэно [1].

7.18. Накрывающие броуновские движения

Пусть K — накрывающая поверхность без ветвления для открытой связной области $D \subset R^2$, и пусть j означает естественную проекцию поверхности K на D . Выберем точку o на K и рассмотрим траекторию, начинающуюся в o и накрывающую¹⁾ стандартную броуновскую траекторию $x(t)$: $t < m_{oD}$, начинающуюся в точке $j(o)$, как это изображено на рис. 1.

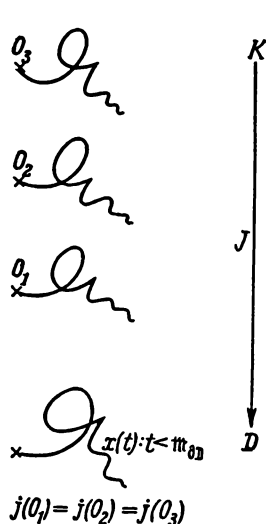
Пусть m — марковский момент для накрывающего движения. Проектируя при помощи j , видим, что m является марковским моментом также и для первоначального движения; а так как оно начинается заново в момент m , то из определения накрывающей траектории следует, что и накрывающее движение начинается заново в момент m .

Легко видеть, что накрывающее движение является диффузией и что в малом ее производящий оператор задается формулой $\mathcal{G}u = (1/2) [\Delta u (j^{-1})](j)$, где j^{-1} — локальное обратное отображение для локального гомеоморфизма j .

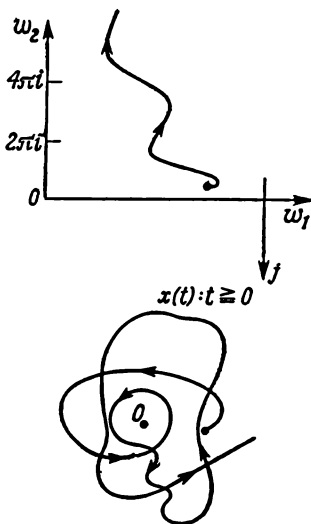
С помощью накрывающих движений мы можем дать простое доказательство результата П. Леви [3: 270], состоящего в том, что если j — непостоянная регулярная функция на открытой связной области $D \subset R^2$, причем j' не обращается в 0 нигде на D , то

¹⁾ Зейферт и Трельфалль [1:212 — 217].

композиция j и стандартного броуновского движения на D представляет собой стандартное броуновское движение на $j(D)$ с заменой времени. Приведем доказательство: D — накрывающая поверхность без ветвления для $j(D)$ с естественной проекцией j ; накрывающее движение стандартного броуновского движения на $j(D)$ есть стандартное броуновское движение на D с некоторой заменой времени. Если сделать обратную замену времени в обеих



Р и с. 1.



Р и с. 2.

траекториях — накрывающей и первоначальной, то видно, что, проектируя при помощи j стандартное броуновское движение на D , получаем стандартное броуновское движение на $j(D)$, протекающее в обратной временной шкале.

Из результата П. Леви следует, что с точностью до замены времени двумерная броуновская траектория конформно инвариантна.

В качестве простейшего примера рассмотрим стереографическую проекцию двумерной сферы S^2 на R^2 :

$$j: (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \rightarrow \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right) \in R^2.$$

В этом случае

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} (1 - \cos \psi)^2 \left[\frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \sin \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right],$$

где $0 \leq \psi \leq \pi$ — широта, отсчитываемая от полюса, а $0 \leq \theta < 2\pi$ — долгота. Таким образом, накрывающее (стереографическое) броу-

новское движение — это стандартное сферическое броуновское движение $\mathbf{BM}(S^2)$, протекающее во временной шкале $\bar{f}^{-1}(t)$, где $\bar{f}(t) =$

$$= \int_0^t [1 - \cos \psi(s)]^{-2} ds, \text{ а } \psi(t): t \geq 0 \text{ — широта для } \mathbf{BM}(S^2).$$

В качестве следующего примера рассмотрим проекцию $j: w \rightarrow e^w$ римановой поверхности R^2 для функции $w = \ln z$ на $R^2 \setminus 0$ (см. рис. 2). Здесь

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{2} |j'(w)|^{-2} \Delta = \frac{1}{2} e^{-2w_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial w_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial w_2^2} \right),$$

$$w = w_1 + iw_2.$$

Таким образом, накрывающее движение здесь — это стандартное броуновское движение $\mathbf{BM}(R^2)$, совершаемое во временной шкале

$$\bar{f}^{-1}(t), \text{ где } \bar{f}(t) = \int_0^t e^{2x_1(s)} ds, \text{ а } x_1(t): t \geq 0 \text{ — горизонтальная составляющая движения } \mathbf{BM}(R^2).$$

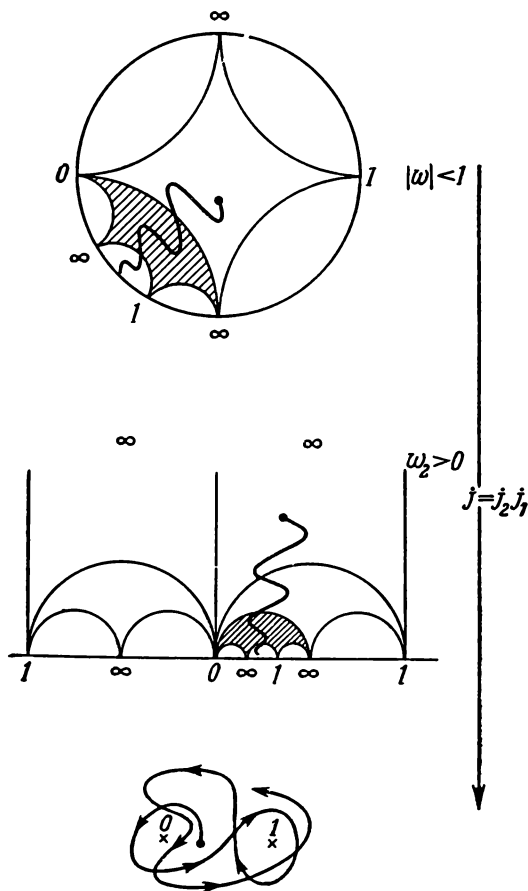
Это движение бесконечное число раз достигает каждого круга; значит, таким же свойством обладает и накрывающее движение. Так как накрывающая траектория переходит с i -го листа поверхности на j -й, когда накрываемая траектория обвивается $j-i$ раз вокруг 0, то эта траектория обвивается против часовой стрелки вокруг 0 и свивается обратно бесконечное число раз (для накрывающего движения это означает, что оно возвращается в полосу $0 \leq w_2 < 2\pi$).

В качестве третьего примера рассмотрим проекцию j эллиптической модулярной фигуры¹⁾, изображенной на рис. 3, на проколотую плоскость $R^2 \setminus (0 \cup 1)$. В этом случае j — это композиция дробно-линейного отображения $j(w) = \frac{1-i}{2} \cdot \frac{w+1}{w-i}$ открытого единичного круга $|w| < 1$ на полуплоскость $w_2 > 0$ и функции $j_2 = k^2 = \theta_2^4 \theta_3^{-4}$, составленной из эллиптических функций Якоби и отображающей полуплоскость $w_2 > 0$ на проколотую плоскость. Оператор \mathfrak{G} равен $(1/2) |j'(w)|^{-2} (\partial^2/\partial w_1^2 + \partial^2/\partial w_2^2)$ для $|w| < 1$, а накрывающее движение — это $\mathbf{BM}(R^2)$ с временной шкалой $\bar{f}^{-1}(t)$, которая растягивается, когда накрывающая траектория выходит изнутри круга к границе $|w| = 1$. Из того, что листы накрывающей поверхности соответствуют элементам фундаментальной группы проколотой плоскости (свободной группы с двумя образующими), легко вывести, что броуновское движение на плоскости при $t \uparrow +\infty$ все более и более запутывается вокруг точек 0 и 1 и больше не распутывается.

1) Курант и Гурвиц [1: 432].

Дополнительные сведения о накрывающих броуновских движениях можно найти у С. Какутани [3].

Задача 1. Почему броуновское движение на дважды проколотой плоскости не может распутаться?



Р и с. 3.

[Согласно эргодической теореме для $\mathbf{BM}(R^2)$ (§ 7.17), доля времени, которое броуновская траектория проводит в круге $|\omega| < 1$ до момента t , имеет порядок $(\ln t)^{-1}$. Обвивание траектории вокруг единственной точки зависит только от угла, но не от радиуса; если же есть две точки, то траектория может обвиться вокруг одной из них, не обвившись вокруг другой, и времени $(\ln t)^{-1} t$ недостаточно, чтобы распутать сделанные таким образом петли.]

Задача 2. Используя эргодическую теорему для $\mathbf{BM}(R^2)$ и стереографическую проекцию, доказать для сферического броуновского движения $\mathbf{BM}(S^2)$, что

$$P_* \left\{ \lim_{t \uparrow +\infty} t^{-1} \int_0^t f(x_s) ds = \int_{S^2} f d\omega \right\} = 1, \quad f \in L^1(S^2).$$

Задача 3. Доказать результат задачи 2 для $\mathbf{BM}(S^d)$ ($d \geq 2$) по-другому, предполагая, что $e(f) = \lim_{t \uparrow +\infty} t^{-1} \int_0^t f(x_s) ds$ существует.

[Предполагая, что $e(f)$ существует, рассмотрим σ -алгебру $A = \bigcap_{t>0} \mathbf{B}\{x(s): s \geq t\}$. Для $A \in A$ функция $p = P_*(A)$ удовлетворяет уравнению $\Delta p = 0$ и потому постоянна. Отсюда мы выводим, что $P_*(A) \equiv 0$ или 1. Случайная величина $e(f)$ измерима относительно A и поэтому не зависит от ω ; из ее инвариантности относительно вращений вытекает нужное нам равенство $e(f) = \int_{S^d} f d\omega$.

Развитие этого метода см. в § 8.7.]

Задача 4. Пусть Γ — группа неевклидовых движений (в модели Пуанкаре), переводящих в себя открытый круг E^2 . Доказать, что Γ не меняет распределения плоской кривой $x|_{[0, m_{\partial E^2}]}$, которую частица, совершающая стандартное броуновское движение, описывает при $t < m_{\partial E^2}$. Найти общий вид топологического отображения, обладающего этим свойством.

[Пусть дано неевклидово движение g и стандартная броуновская траектория; тогда с точностью до замены времени $gx(t \wedge m_{\partial E^2})$ — стандартное броуновское движение с остановкой на ∂E^2 . Поэтому распределение $x|_{[0, m_{\partial E^2}]}$ инвариантно относительно g . Если дано топологическое отображение $g_1: E^2 \rightarrow E^2$, оставляющее неизменным распределение $x|_{[0, m_{\partial E^2}]}$, выберем неевклидово движение g_2 , переводящее $g_1(0)$ в 0, и рассмотрим $g_3 = g_2 g_1$. Для любой дуги $B \subseteq \partial E^2$ функция

$$P_a \{g_3 x(m_{\partial E^2}) \in B\} = P_b \{x(m_{\partial E^2}) \in B\} = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{1 - |b|^2}{|e^{i\beta} - b|^2} d\beta \quad (b = g_3 a)$$

является гармонической. Поэтому при любом $0 \leq \beta < 2\pi$ функция $(1 - |b|^2)/|e^{i\beta} - b|^2$ гармонична по a . Таким же образом находим, что $(1 - |a|^2)/|e^{i\alpha} - a|^2$ гармонична по b при любом $0 \leq \alpha < 2\pi$ (нужно вместо g_3 рассмотреть g_3^{-1}). Отсюда следует, что любому $\alpha \in [0, 2\pi)$ соответствует некоторое $\beta \in [0, 2\pi)$, такое, что $(1 - |a|^2)/|e^{i\alpha} - a|^2$ отличается от $(1 - |b|^2)/|e^{i\beta} - b|^2$ только постоянным множителем. Поскольку $g_3(0) = 0$, этот множитель

равен 1 и

$$\min_{0 \leq \alpha < 2\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{i\alpha} - a|^2} = \frac{1 - |a|^2}{1 + |a|^2} \geq \frac{1 - |b|^2}{1 + |b|^2}.$$

Точно так же $(1 - |b|^2)/(1 + |b|^2) \geq (1 - |a|^2)/(1 + |a|^2)$, т. е. $|a| = |b|$; поэтому g_3 топологически отображает окружность $|a| = l < 1$ на себя. Выберем движение g_2 так, чтобы g_3 сохраняло ориентацию всех окружностей $|a| = l < 1$ (одновременно). Пользуясь тем, что $(1 - |a|^2)/|e^{i\alpha} - a|^2 = (1 - |b|^2)/|e^{i\beta} - b|^2$, доказываем, что у $e^{-i\alpha}a$ и у $e^{-i\beta}b$ одинаковая действительная часть; отсюда следует, что $b = e^{i\gamma}a$ ($\gamma = \beta - \alpha$), т. е. g_3 — вращение. Это доказывает, что g_1 — не что иное, как неевклидово движение $g_2^{-1}g_3$, и задача решена.]

7.19. Диффузии с броуновскими выходными вероятностями

Пусть D есть d -мерная область, $h(a, db) = h_{\partial D}(a, db)$ — классическое гармоническое распределение на ∂D относительно точки $a \in D$. Вспомним, что для стандартного броуновского движения

$$h(a, db) = P_a \{x(m_{\partial D}) \in db\} \quad (1)$$

(см. § 7.12). Будем говорить, что диффузия на $R^d \cup \infty$ имеет *броуновские выходные вероятности*, если для всех ограниченных областей $D \subset R^d$ выполняется равенство (1). В частном случае $d = 1$ любая диффузия, рассматриваемая в естественной шкале, имеет броуновские выходные вероятности. В этом параграфе будет доказано, что производящий оператор \mathfrak{G} d -мерной диффузии с броуновскими выходными вероятностями можно представить в виде

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \frac{-e^u(da)}{m(da)}, \quad (2)$$

где m — соответствующим образом подобранная мера скорости, а e^u — мера Рисса для функции $u \in D(\mathfrak{G})$ (см. § 7.5). Для $d = 1$ имеем $-e^u(a, b) = u^+(b) - u^+(a)$; см. § 4.2.

Пусть D — ограниченная область в R^d , а функция $f \in C_\infty(R^d)$ тождественно равна 0 на \bar{D} и положительна вне \bar{D} . Тогда функция $\mathfrak{G}G_1f = G_1f$ ограничена снизу на \bar{D} положительной константой c , так что для $u = G_1f/c$ на \bar{D} выполнено неравенство $\mathfrak{G}u \geq 1$. Применяя формулу Дынкина, получаем, что внутри D

$$\begin{aligned} e_D(a) = E_a(m_{\partial D}) &\leq E_a \left[\int_0^{m_{\partial D}} \mathfrak{G}u \, dt \right] = \\ &= E_a[u(x(m_{\partial D}))] - u(a) \leq \|u\|_\infty < +\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Положим $m = m_{\partial D_1}$, где $D_1 \subset D$; тогда для $a \in D_1$ имеем

$$e_D(a) = E_a(m + m_{\partial D}(\omega_m^+)) = e_{D_1}(a) + \\ + \int h_{\partial D_1}(a, db) e_D(b) > \int h_{\partial D_1}(a, db) e_D(b). \quad (4)$$

С помощью разложения Рисса [см. § 7.5] находим, что $e_D(a)$ является потенциалом $\int G_D(a, b) m(db)$ ¹⁾ неотрицательного распределения масс m , положительного на открытых множествах. Так как имеет место правило композиции

$$G_D(a, b) = G_{D_1}(a, b) + \int h_{\partial D_1}(a, d\xi) G_D(\xi, b), \quad (5) \\ a, b \in D_1 \subset D,$$

и из него можно вывести формулу

$$e_{D_1}(a) = e_D(a) - \int h_{\partial D_1}(a, db) e_D(b) = \int G_D(a, b) m(db) - \\ - \int h_{\partial D_1}(a, d\xi) \int G_D(\xi, b) m(db) = \int G_{D_1}(a, b) m(db), \quad (6)$$

то m не зависит от D .

Теперь докажем формулу (2). Пусть $u_1 \in D(\mathcal{G})$ и $\mathcal{G}u_1 \leq -1$ на D . Тогда если $u \in D(\mathcal{G})$, то для $u_2 = u + nu_1$ имеем $\mathcal{G}u_2 \leq 0$ на D при $n \geq \|\mathcal{G}u\|_\infty$. Из формулы Дынкина вытекает, что для $D_1 \subset D$

$$v(a) - \int h_{\partial D_1}(a, db) v(b) = -E_a \left[\int_0^{m_{\partial D_1}} \mathcal{G}v dt \right] \geq 0, \quad (7) \\ a \in D_1, v = u_1 \text{ или } u_2.$$

Применяя еще раз разложение Рисса, представляем функцию $u(a) - \int h_{\partial D}(a, b) u(db)$ в виде потенциала распределения зарядов разных знаков e^u . Положим $\alpha \equiv \inf_D \mathcal{G}u$, $\beta \equiv \sup_D \mathcal{G}u$; тогда, поскольку неотрицательным потенциалам соответствуют неотрицательные полные заряды, оценки

$$\alpha \int G_D(a, b) m(db) = \alpha e_D(a) \leq E_a \left[\int_0^{m_{\partial D}} \mathcal{G}u dt \right] = \\ = \int h_{\partial D}(a, db) u(b) - u(a) = - \int G_D(a, b) e^u(db) \leq \\ \leq \beta e_D(a) = \beta \int G_D(a, b) m(db) \quad (8a)$$

¹⁾ G_D — функция Грина области D .

показывают, что

$$\alpha m(D) \leq -e^u(D) \leq \beta m(D). \quad (8b)$$

Отсюда в силу непрерывности \mathcal{G}_u сразу следует формула (2).

Г. П. Маккин и Х. Танака [1] описали меры скорости для более широкого класса движений с броуновскими выходными вероятностями. Для рассматриваемого случая можно доказать, что m является мерой скорости тогда и только тогда, когда потенциал этой меры $e_D = \int G_D dm$ для любой области D непрерывен внутри этой области и стремится к 0 в несингулярных точках из ∂D , причем любое множество Z нулевой m -меры является *тонким* в следующем смысле:

$$P.\{Z \cap \{x(t): t > 0\} = \emptyset\} = 1$$

для траектории стандартного броуновского движения.

Если дана мера, обладающая описанными свойствами, естественно ожидать, что соответствующая диффузия будет стандартным броуновским движением со случайной временной шкалой f^{-1} ; эту шкалу можно было бы определить как обратную к интегралу Хеллингера

$$f(t) = \int_{R^d} \frac{\text{mes}\{s: x(s) \in db, s \leq t\} m(db)}{2db} 1. \quad (9)$$

Известен ряд результатов, близких к этому утверждению (см. Г. П. Маккин и Х. Танака [1], Р. Блюменталь, Р. Гетур и Г. П. Маккин [1], а также § 8.3).

Так как двумерное броуновское движение возвратно, то возвратно и движение, связанное с оператором \mathcal{G} , в случае $d=2$. Если $d \geq 3$, оно уходит на ∞ . Вероятность $P.\{m_\infty < +\infty\}$ ²⁾ равна 1, если R^d можно представить в виде $A \cup B$, где

$$\int_A |b|^{2-d} m(db) < +\infty, \quad (10)$$

а множество B тонко на ∞ , т. е. для траекторий броуновского движения

$$P.\{x(t) \in B \text{ бесконечное число раз при } t \uparrow +\infty\} = 0. \quad (11)$$

В противном случае $P.\{m_\infty < +\infty\} \equiv 0$. Для проверки выполнения утверждения (11) можно применять критерий Винера.

¹⁾ $\text{mes}\{s: x(s) \in db, s \leq t\}$ при $d \geq 2$ не абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т. е. нельзя определить локальных времен.

²⁾ $m_\infty \equiv \inf\{t: x(t-0) = \infty\}$.

Задача 1. Пусть имеется стандартное двумерное броуновское движение с компонентами a и b ; пусть t — локальное время $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \text{mes} \{s: 0 \leq b(s) < \varepsilon, s \leq t\}$. Задача состоит в том, чтобы вычислить меру скорости e^* и производящий оператор \mathfrak{G}^* для движения D^* : $x^* = x(\bar{f}^{-1})$ ($\bar{f} = t + 2t$) (другое описание D^* см. у Т. Уэно [1]).

[При $|b| > 0$ $e^*(da \times db) = 2dad b$; $e^*(da \times 0)$ инвариантна относительно сдвига вдоль оси a , поэтому пропорциональна одномерной мере Лебега da . Так как $\bar{f} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t [1 + \varepsilon^{-1} \chi_{[0, \varepsilon)}](x_s) ds$

и $\int_{R^2} f 2da db + \int_{R^1 \times 0} f 2da = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{R^2} [1 + \varepsilon^{-1} \chi_{[0, \varepsilon)}] 2da db$, то $e^*(da \times 0) = 2da$.

Пусть теперь u принадлежит $D(\mathfrak{G}^*)$, а $A \times B$ — какой-то открытый прямоугольник, пересекающийся с $R^1 \times 0$. Из сказанного следует, что с точностью до функции класса $C^1(A \times B)$ $-u = \int_{A \times 0} G \mathfrak{G}^* u 2da$ на $A \times B$, где G — функция Грина для $A \times B$.

Отсюда сразу вытекает, что для $a \in A$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} [u(a, \varepsilon) - 2u(a, 0) + u(a, -\varepsilon)] =$$

$$= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{A \times 0} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} \mathfrak{G}^* u 2dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{-1}}{\pi} \int_{R^1 \times 0} \ln \frac{(x-a)^2 + \varepsilon^2}{(x-a)^2} \mathfrak{G}^* u dx =$$

$$= (\mathfrak{G}^* u)(a, 0) \cdot \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{-1}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\varepsilon^2 + z^2}{z^2} dz = 2(\mathfrak{G}^* u)(a, 0).$$

Теперь $D(\mathfrak{G}^*)$ можно описать как класс таких функций $u \in C(R^2)$, что

$$u^* = \begin{cases} \Delta u / 2 & \text{вне } R^1 \times 0; \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} \left[\frac{u(a, \varepsilon) + u(a, -\varepsilon)}{2} - u(a, 0) \right] & \text{на } R^1 \times 0 \end{cases}$$

принадлежит классу $C(R^2)$. Здесь Δ — локальный производящий оператор броуновского движения, задаваемый формулой (7.2.3). Для функций $u \in D(\mathfrak{G}^*)$ имеем $\mathfrak{G}^* u = u^*$.]

7.20. Процессы с траекториями, непрерывными справа

Рассмотрим движение в произвольном фазовом пространстве, удовлетворяющее условиям § 7.1, но от траекторий будем требовать только непрерывности справа. Оператор \mathfrak{G} может быть

введен так же, как и ранее, и к нему применима формула Дынкина

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \lim_{b \downarrow a} E_a(m)^{-1} [E_a[u(x_m)] - u(a)], \quad (1)$$

где m — момент первого выхода $\inf\{t: x(t) \notin B\}$ из маленькой замкнутой окрестности B точки a . Распределение $P_a\{x_m \in db\}$ не обязательно будет сосредоточено на ∂B , потому что мы разрешаем траектории *выпрыгивать* из B ; это находит свое отражение в том, что \mathfrak{G} может быть *нелокальным* оператором.

В качестве простейшего примера рассмотрим односторонний процесс с независимыми приращениями на $[0, +\infty)$, описываемый формулой Леви

$$E_0[e^{-\alpha x(t)}] = \exp\left(-t\left[m\alpha + \int_0^+ (1 - e^{-\alpha l}) n(dl)\right]\right), \quad (2)$$

$$m \geq 0, \quad n(dl) \geq 0, \quad \int_0^+ (1 - e^{-l}) n(dl) < +\infty.$$

Вероятности P_a мы определим следующим образом:

$$P_a(B) = P_0\{x + a \in B\}, \quad a \geq 0. \quad (3)$$

(См. замечание о процессах с независимыми приращениями в конце § 1.8.)

Для $f \in C[0, +\infty)$ и $a \geq 0$ положим по определению $f_a(b) = f(a+b)$. Рассмотрим оператор Грина G_1 ; поскольку $(G_1 f)(b) = -(G_1 f)(a) = G_1(f_b - f_a)(0)$, множество $C^1(\mathfrak{G}) = D(\mathfrak{G}) \cap C^1[0, +\infty)$ включает в себя $G_1 C^1[0, +\infty)$, т. е. в $C^1(\mathfrak{G})$ *достаточно много функций*.

Вычислим \mathfrak{G} на $C^1(\mathfrak{G})$.

При $\gamma > 0$ функция $u = e^{-\gamma l}$ удовлетворяет уравнению $G_1 u = cu$, где $c = (G_1 u)(0)$; поэтому она принадлежит $D(\mathfrak{G})$. Сравнивая выражения

$$(\mathfrak{G}u)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^+ (e^{-\gamma l} - 1) n_\varepsilon(dl), \quad (4a)$$

$$n_\varepsilon(dl) = E_0(m_\varepsilon)^{-1} \cdot P_0\{x(m_\varepsilon) \in dl\},$$

$$m_\varepsilon = \inf\{t: x(t) > \varepsilon\},$$

и

$$(\mathfrak{G}u)(0) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} E_0[e^{-\gamma x(t)} - 1] = -m\gamma + \int_0^+ (e^{-\gamma l} - 1) n(dl), \quad (4b)$$

убеждаемся, что мера $(1 - e^{-l}) n_\varepsilon(dl)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ сходится к мере

$$\begin{aligned} n^*(dl) &= (1 - e^{-l}) n(dl), \quad l > 0; \\ n^*(0) &= m. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть u — любая функция из $C^1(\mathcal{G})$; тогда функция

$$u^*(l) = \begin{cases} \frac{u(l) - u(0)}{1 - e^{-l}}, & l > 0; \\ u^+(0), & l = 0, \end{cases} \quad (6)$$

принадлежит $C[0, +\infty)$ и поэтому

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}u)(0) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{+\infty} [u(l) - u(0)] n_\varepsilon(dl) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{+\infty} u^*(l) (1 - e^{-l}) n_\varepsilon(dl) = \int_0^{+\infty} u^* n^*(dl) = \\ &= mu^+(0) + \int_0^{+\infty} [u(l) - u(0)] n(dl). \end{aligned} \quad (7)$$

Пользуясь тем, что $(\mathcal{G}u)(a) = (\mathcal{G}u_a)(0)$, находим выражение для оператора \mathcal{G} в суженной области определения $C^1(\mathcal{G})$:

$$(\mathcal{G}u)(a) = mu^+(a) + \int_0^{+\infty} [u(b+a) - u(a)] n(db), \quad a \geq 0. \quad (8)$$

Задача 1 (по Е. Б. Дынкину [4: 58]). Проверить, что для одностороннего устойчивого процесса с показателем $0 < \alpha < 1$

и скоростью $1/2$ ($m = 0$, $\int_0^{+\infty} (1 - e^{-\gamma l}) d\eta = \gamma^\alpha/2$) выполнены соотношения¹⁾

$$\begin{aligned} P_0\{x(m_\varepsilon) < l\} &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_{\varepsilon/l}^1 (1-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} dt, \quad l > \varepsilon; \\ E_0(m_\varepsilon) &= \frac{2\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

¹⁾ У Дынкина в выражении для $E_0(m_\varepsilon)$ содержится неверная константа.

[При $\gamma > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} E_0 [e^{-\gamma x(t)}] dt &= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma l} \int_0^{+\infty} dt P_\alpha \{x(t) \in dl\} = 2\gamma^{-\alpha} = \\ &= 2\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma l} l^{\alpha-1} dl. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\int_0^{+\infty} dt P_0 \{x(t) \in dl\} = 2\Gamma(\alpha)^{-1} t^{\alpha-1} dl.$$

Отсюда следует, что если $f \in C[0, +\infty)$ обращается в 0 вблизи $+\infty$ и левее ε , то

$$\begin{aligned} (G_{+0}f)(0) &= E_0 \left[\int_0^{+\infty} f(x) dt \right] = 2\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{+\infty} a^{\alpha-1} f(a) da = \\ &= E_0 \left[\int_0^{+\infty} f(x(t+m_\varepsilon)) dt \right] = \int_0^{+\infty} P_0 \{x(m_\varepsilon) \in da\} (G_{+0}f)(a) = \\ &= \int_0^{+\infty} P_0 \{x(m_\varepsilon) \in da\} 2\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{+\infty} (b-a)^{\alpha-1} f(b) db = \\ &= 2\Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{+\infty} f db \int_0^b (b-a)^{\alpha-1} P_0 \{x(m_\varepsilon) \in da\}. \end{aligned}$$

Из этого выводим, что

$$\int_0^b (b-a)^{\alpha-1} P_0 \{x(m_\varepsilon) \in da\} = b^{\alpha-1} \text{ или } 0$$

в зависимости от того, $b \geq \varepsilon$ или $b < \varepsilon$.

Беря преобразование Лапласа от обеих частей, находим $P_0 \{x(m_\varepsilon) \in da\}$. Теперь перейдем к $E_0(m_\varepsilon)$. Так как при замене $x(t) \rightarrow \varepsilon x(t/\varepsilon^\alpha)$ мера $P_0(B)$ не меняется, то m_ε имеет такое же распределение, как $\varepsilon^\alpha m_1$; значит, $E_0(m_\varepsilon) = \varepsilon^\alpha E_0(m_1)$. Значение $E_0(m_1) = 2/\Gamma(\alpha+1)$ получаем, рассматривая функцию $u = e^{-l}$ ($l \geq 0$) и сравнивая выражения

$$(\mathcal{G}u)(0) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} E_0 [e^{-x(t)} - 1] = -\frac{1}{2}$$

и

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{G}u)(0) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [E_0(m_\varepsilon)]^{-1} E_0 [e^{-x(m_\varepsilon)} - 1] = \\
 &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [E_0(m_1)]^{-1} \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-l} - 1}{(l - \varepsilon)^\alpha} \frac{dl}{l} = \\
 &= \frac{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-l} - 1}{l^{1+\alpha}} dl}{E_0(m_1) \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} = \frac{1}{E_0(m_1) \alpha \Gamma(\alpha)}.]
 \end{aligned}$$

7.21. Потенциалы Рисса

Мы знаем, что ньютоновские потенциалы

$$\int |b - a|^{2-d} e(db), \quad e \geq 0, \quad d \geq 3, \quad (1)$$

связаны с d -мерным броуновским движением посредством формулы

$$\int_0^\infty (2\pi t)^{-d/2} e^{-|b-a|^2/2t} dt = \text{const} \cdot |b-a|^{2-d}. \quad (2)$$

Что можно сказать о потенциалах дробной размерности (потенциалах Рисса)

$$\begin{aligned}
 &\int |b-a|^{\gamma-d} e(db), \quad e \geq 0, \\
 &0 < \gamma < 1, \quad d = 1, \\
 &0 < \gamma < 2, \quad d \geq 2?
 \end{aligned} \quad (3)$$

При $0 < \gamma \leq 2$ преобразование Фурье

$$\begin{aligned}
 P\gamma(t, a, b) &= (2\pi)^{-d} \int_{R^d} e^{i(b-a) \cdot c} e^{-t|c|^\gamma/2} dc = \\
 &= (2\pi)^{-d} \int_0^{+\infty} e^{-tr^\gamma/2} r^{d-1} dr \int_{S^{d-1}} e^{i|b-a|r \cos \theta} d\theta = \\
 &= (2\pi)^{-d/2} \int_0^{+\infty} e^{-tr^\gamma/2} r^{d/2} J_{d/2-1}(|b-a|r) dr, \quad t > 0, \quad a, b \in R^d, \quad (4)
 \end{aligned}$$

неотрицательно. При $\gamma = 2$ получаем d -мерное гауссово ядро²⁾.

¹⁾ $a \cdot b$ — скалярное произведение в R^d .

²⁾ Здесь для удобства мы отбрасываем множитель $1/2$ в гауссовой плотности.

Тем же методом, которым по p_2 строится d -мерная винеровская мера, можно построить d -мерный (строго) марковский процесс с непрерывными справа траекториями и с переходными вероятностями $p_\gamma(t, a, b)db$; это так называемый *изотропный устойчивый процесс* с показателем γ .

Пусть функция $f \in C(R^d)$ такова, что $\hat{f} = \int_{R^d} e^{-ic \cdot a} f da$ мало вблизи ∞ ; тогда оператор Грина $G_\alpha: f \rightarrow E. \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right]$ переводит f в $(2\pi)^{-d} \int_{R^d} e^{ia \cdot c} (\alpha + |c|^\gamma/2)^{-1} \hat{f} dc$. Введем оператор

$$\mathfrak{G}: f \rightarrow -\frac{1}{2} (2\pi)^{-d} \int_{R^d} |c|^\gamma f dc;$$

ясно, что $(\alpha - \mathfrak{G})G_\alpha f = f$. Иначе говоря, производящий оператор изотропного устойчивого процесса — это

$$-\frac{1}{2} (-\Delta)^{\gamma/2}, \quad (5)$$

если оставить в стороне технический вопрос нахождения его области определения. Здесь $(-\Delta)^{\gamma/2}$ обозначает неотрицательный корень из неотрицательного оператора $-\Delta$ в смысле спектрального разложения (преобразования Фурье) над гильбертовым пространством $L^2(R^d, db)$; см. С. Бохнер [1].

При $\gamma < 2$ оператор \mathfrak{G} является *нелокальным*.

Займемся теперь ядром потенциала

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} p_\gamma(t, a, b) dt &= 2 (2\pi)^{-d/2} \int_0^{+\infty} r^{d/2-\gamma} J_{d/2-1}(|b-a|r) dr = \\ &= 2 (2\pi)^{-d/2} \int_0^{+\infty} r^{d/2-\gamma} J_{d/2-1} dr \cdot |b-a|^{\gamma-d} = \\ &= \begin{cases} = +\infty, & d=1, \gamma \geq 1; \\ < +\infty, & d=1, \gamma < 1 \text{ или } d \geq 2, \gamma < 2. \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

Это и есть ядро $(d-\gamma)$ -мерных потенциалов М. Рисса [1]; ср. В. Феллер [13].

Пусть B — компактное подмножество в R^d ; $\gamma < 1$ ($d=1$) или $\gamma < 2$ ($d \geq 2$). Если m_B — момент $\inf \{t: t > 0, x(t) \in B\}$ первого достижения, то $P. \{m_B < +\infty\}$ является электростатическим потен-

циалом; т. е. — это наибольший из потенциалов

$$p = \int_B \frac{e(db)}{|a-b|^{d-\gamma}}, \quad e \geq 0, \quad p \leq 1. \quad (7)$$

Электростатическое распределение

$$e(db) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} db \cdot P_b \{m_B < +\infty, m_B(w_\varepsilon^+) = +\infty\} \quad (8)$$

и электростатическая $(d-\gamma)$ -мерная емкость по Риссу $C(B) = e(B)$ обладают большинством свойств ньютоновских электростатических распределений и емкостей, но не всеми. Например, электростатическое распределение шара B распространено на всю внутренность шара и $C(\partial B) = 0$ (более подробно об этом см. задачу 2).

Критерий Винера для сингулярных точек принимает вид

$P_a \{m_B = 0\} = 0$ или 1 в зависимости от того, расходится

$$\text{или сходится ряд } \sum_{n \geq 1} 2^{(d-\gamma)n} C(B_n), \quad (9)$$

где $a \in B$, а B_n — пересечение шара B и шарового слоя $2^{-n-1} \leq |a-b| < 2^{-n}$; доказательство этого — такое же, как в броуновском случае.

Задача 1. Для одностороннего устойчивого процесса с показателем $0 < \alpha < 1$ и скоростью $1/2$ доказать, что если B — компактное подмножество в R^1 , то $P_\cdot \{m_B < +\infty\}$ является $(1-\alpha)$ -мерным электростатическим потенциалом, т. е. наибольшим из потенциалов

$$p(a) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_{b \geq a} \frac{e(db)}{(b-a)^{1-\alpha}} \leq 1, \quad e \geq 0, \quad e(R^1 \setminus B) = 0.$$

Задача 2. Вычислить $(1-\alpha)$ -мерную емкость

$$C_{1-\alpha}(B) \equiv \max e(B): e \geq 0, \quad e(R^1 \setminus B) = 0, \quad \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_{b \geq a} \frac{e(db)}{(b-a)^{1-\alpha}} \leq 1,$$

для отрезка $B = [a, b]$.

[Распределение $e(db) = db/(1-b)^\alpha 2\Gamma(1-\alpha)$ является решением уравнения

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^1 \frac{e(db)}{(b-a)^{1-\alpha}} \equiv 1 \quad (0 < a < 1);$$

$C_{1-\alpha}[0, 1]$ — это полный заряд $e[0, 1] = 1/2 \Gamma(2-\alpha)$. Отсюда

$$C_{1-\alpha}[a, b] = C_{1-\alpha}[0, l] = l^{1-\alpha} C_{1-\alpha}[0, 1] = \frac{l^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)}, \quad l = b-a.]$$

Задача 3. Пусть дан *изотропный* d -мерный ($d \geq 2$) устойчивый процесс с показателем $0 < \alpha < 2$, для которого $E_0 [e^{i\gamma \cdot x(t)}] = e^{-t|\gamma|^\alpha/2}$ ($\gamma \in R^d$). Доказать, что для компакта $B \subset R^d$ функция $P_\cdot \{m_B < +\infty\}$ является $(d-\alpha)$ -мерным электростатическим потенциалом, т. е. наибольшим из потенциалов

$$p(a) = \frac{\Gamma\left(\frac{d-\alpha}{2}\right)}{\pi^{d/2} 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int \frac{e(db)}{|b-a|^{d-\alpha}} \leq 1, \quad de \geq 0, \quad e(R^d \setminus B) = 0.$$

Задача 4 (по Пойа и Сегё [1: 39]). Доказать, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{-\alpha/2} (\xi^2 - 2r\xi \cos \psi + r^2)^{(\alpha-3)/2} r^2 \sin \psi \, dr \, d\psi \, d\theta \equiv \\ \equiv 2\pi \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \end{aligned}$$

и вывести отсюда, что $(3-\alpha)$ -мерная емкость $C_{3-\alpha}(B)$ трехмерного шара $B: |b| \leq 1$ равна

$$\frac{\pi 2^{\alpha-3}}{\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5-\alpha}{2}\right)}.$$

Изобразить электростатическое распределение

$$e_{3-\alpha}(db) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{\alpha-2} (1-|b|^2)^{-\alpha/2} db}{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2}\right)}, \quad |b| \leq 1,$$

для α вблизи 0, $\alpha=1$ и α вблизи 2; дать вероятностное истолкование изменения вида этого распределения.

ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О МНОГОМЕРНОЙ ДИФФУЗИИ

8.1. Подобные диффузии

Пусть D — диффузия (консервативная) на пространстве Q (определение см. в § 7.1). Ее производящий оператор \mathfrak{G} можно выразить для открытых множеств $D \subset Q$ в терминах выходных вероятностей и средних времен выхода

$$h(a, db) = h_{\partial D}(a, db) = P_a \{x(m_{\partial D}) \in db, m_{\partial D} < +\infty\}; \quad (1a)$$

$$e(a) = e_D(a) = E_a(m_{\partial D}) \quad (1b)$$

с помощью формулы Дынкина

$$(\mathfrak{G}u)(a) = \lim_{D \downarrow a} e(a)^{-1} \left[\int_{\partial D} h(a, db) u(b) - u(a) \right], \quad u \in D(\mathfrak{G}). \quad (2)$$

Пользуясь выражением В. Феллера, можно сказать, что h — это карта путей, т. е. h показывает, по каким путям разрешается двигаться частице, а e управляет скоростью.

Мы говорим, что одна диффузия подобна другой, если есть гомеоморфное соответствие между их фазовыми пространствами, при котором карта путей одной диффузии переходит в карту путей другой.

Если дана несингулярная консервативная диффузия на $Q = R^1$, то ее выходные вероятности можно представить в виде

$$P_{\xi} \{m_a < m_b\} = \frac{s(b) - s(\xi)}{s(b) - s(a)}, \quad a < \xi < b, \quad (3)$$

и две такие диффузии подобны тогда и только тогда, когда интервалы $s(Q)$ и $s^*(Q)$ подобны в евклидовом смысле; т. е. тогда и только тогда, когда или интервалы $s(Q)$ и $s^*(Q)$ совпадают с R^1 , или оба являются полупрямыми, или оба ограничены.

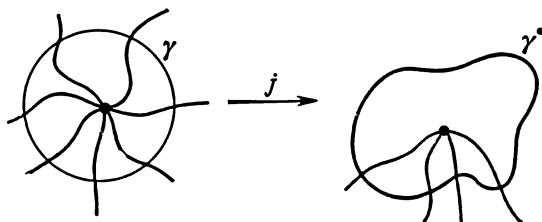
В качестве второго примера рассмотрим стандартное броуновское движение и пространственно-временное броуновское движение.

Рассмотрим стандартную броуновскую траекторию, начинающуюся в центре круга γ . Предположим, что имеется гомеоморфизм j , переводящий вероятности первого достижения для броуновской траектории в вероятности первого достижения для пространственно-временного броуновского движения, как это показано на рис. 1.

Тогда у каждой открытой дуги образа γ^* окружности γ при отображении j была бы положительная выходная вероятность относительно пространственно-временного движения. Но этого не может быть; *поэтому рассматриваемые движения не подобны друг другу*. Можно доказать, что на плоскости имеется бесконечное число не подобных друг другу диффузий.

В терминах карт путей и скоростей движения основные задачи, возникающие при изучении многомерной диффузии, можно описать следующим образом:

Q1) описать геометрически все основные не подобные друг другу карты путей (о том, что значит *геометрически*, см. § 8.6);



Р и с. 1.

Q2) выделить среди диффузий с одинаковой картой путей одну особенно простую (*броуновское движение*) и показать, как строятся ее траектории (значение слова *простую* будет зависеть от геометрического вида карты путей);

Q3) для двух диффузий с одной картой путей найти изменение скорости (замену времени), переводящее одну из них в другую (выражение этой замены см. в § 8.3).

Задача Q3) решена (см. § 8.3); остальные задачи не решены, но разбираются до конца в большом числе частных случаев. Ниже читателю предлагается неформальный отчет положения в этой области в настоящее время и некоторые грубые идеи о том, что нужно делать.

8.2. \mathcal{G} как дифференциальный оператор

Пусть дана диффузия на пространстве $Q = R^d$ ($d \geq 1$) с такими же выходными вероятностями, как у стандартного броуновского движения. В этом случае средние времена выхода $e_D = E_*(m_{\partial D})$ являются потенциалами $\int_D G dm$ некоторой (положительной) меры скорости m , не зависящей от D (здесь G — классическая функция Грина области D). Любую функцию $u \in D(\mathcal{G})$ можно представить

в малом в виде суммы потенциала $\int G(a, b) e^u(db)$ некоторой меры со знаком $e^u(db)$ и гармонической функции, причем

$$\mathfrak{G}u = -\frac{e^u(db)}{m(db)} \quad (1)$$

(см. § 7.19).

Т. Уэно [1] удалось найти другой случай, когда \mathfrak{G} можно представить как дифференциальный оператор $-e^u(db)/m(db)$.

Пусть имеется возвратная диффузия; т. е. пусть

$$P.\{\mathfrak{m}_D < +\infty\} \equiv 1, \quad D - \text{открытое непустое множество.} \quad (2a)$$

Дополнительно предположим, что выполнены следующие условия:

$$\int_{\partial D} h(\cdot, db) f(b) \in C(Q \setminus \partial D), \quad f \in B(\partial D); \quad (2b)$$

$$P.\{\mathfrak{m}_{\partial D_1} < \mathfrak{m}_{\partial D_2}\} > 0, \quad (2c)$$

$$a \notin \overline{D_1} \cup \overline{D_2}, \quad \overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \emptyset, \quad \text{множество } Q \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2}) \text{ связно.}$$

Если D_1 и D_2 — множества, удовлетворяющие условиям (2с), с компактными границами ∂D_1 и ∂D_2 , положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_1 &= \mathfrak{m}_{\partial D_1}, \quad \mathfrak{m}_2 = \min\{t: x(t) \in \partial D_2, \quad t > \mathfrak{m}_1\}, \\ \mathfrak{m}_3 &= \min\{t: x(t) \in \partial D_1, \quad t > \mathfrak{m}_2\}, \\ \mathfrak{m}_4 &= \min\{t: x(t) \in \partial D_2, \quad t > \mathfrak{m}_3\}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3)$$

тогда

$$P.\{\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \mathfrak{m}_3 < \dots \uparrow +\infty\} \equiv 1,$$

а точки первого достижения

$$x(\mathfrak{m}_{2n-1}) \quad (n \geq 1) \text{ и } x(\mathfrak{m}_{2n}) \quad (n \geq 1)$$

на ∂D_1 и ∂D_2 образуют эргодические марковские цепи с вероятностями перехода за один шаг

$$\int_{\partial D_2} h_{\partial D_2}(a, d\xi) h_{\partial D_1}(\xi, db) \equiv p_1(a, db), \quad (4a)$$

$$\int_{\partial D_1} h_{\partial D_1}(a, d\xi) h_{\partial D_2}(\xi, db) \equiv p_2(a, db). \quad (4b)$$

Здесь выполняется условие К. Иосида, что позволяет ввести стационарные распределения e_1 и e_2 :

$$\int_{\partial D_1} e_1(da) p_1(a, db) = e_1(db), \quad e_1(\partial D_1) = 1; \quad (5a)$$

$$\int_{\partial D_2} e_2(da) p_2(a, db) = e_2(db), \quad e_2(dD_2) = 1. \quad (5b)$$

При этом мера

$$m(db) = \int_{\partial D_1} e_1(da) E_a [\text{mes} \{t: x(t) \in db, t < m_{\partial D_2}\}] + \\ + \int_{\partial D_2} e_2(da) E_a [\text{mes} \{t: x(t) \in db, t < m_{\partial D_1}\}] \quad (6)$$

оказывается положительной на открытых множествах, конечной на компактах и *стационарной*:

$$\int_Q m(da) P_a \{x(t) \in db\} = m(db), \quad t > 0. \quad (7)$$

Более того, любая другая такая стационарная мера отличается от m только постоянным множителем. Относительно формул (6) и (7) см. также Г. Маруяма и Х. Танака [2] и Хасьминский [1]; другой подход к стационарным мерам см. Нельсон [1].

В случае когда D — подмножество в Q со средним временем выхода $E. (m_{\partial D}) < +\infty$, Уэно доказывает, что мера Грина

$$G(a, db) = E_a [\text{mes} \{t: x(t) \in db, t > m_{\partial D}\}] \quad (8)$$

разлагается на $D \times D$ на множители: *функцию Грина* $G(a, b)$ и стационарную меру $m(db)$. При этом в силу формулы

$$\int G(a, b) e^u(db) = - \int G(a, b) \mathcal{G}u m(db) = \\ = - E_a \left[\int_0^{m_{\partial D}} (\mathcal{G}u)(x_t) dt \right] = u(a) - \int_{\partial D} h(a, db) u(b) \quad (9)$$

$\mathcal{G}u$ представляется в виде $-e^u(db)/m(db)$.

Функция $G(a, b)$ должна была бы зависеть только от карты путей, но в общем случае это не доказано; эта функция не обязана быть симметричной (обзор потенциалов для таких несимметричных функций Грина см. в § 8.4).

Ввиду результата Уэно кажется правдоподобным, что для любой диффузии должны существовать положительная мера (мера скорости) $m(db)$ и функция Грина $G(a, b)$, зависящие только от карты путей, такие, что $\mathcal{G}u = -e^u(db)/m(db)$. Мера $e^u(db)$ должна зависеть только от $u \in D(\mathcal{G})$ и от карты путей; вероятностную формулу для e^u см. в § 8.5.

8.3. Замены времени

Пусть имеются две диффузии с одной и той же картой путей, одинаковыми функциями Грина, траекториями x и x^* и производящими операторами

$$\mathfrak{G}u = -\frac{e^u(db)}{m(db)}, \quad u \in D(\mathfrak{G}); \quad (1a)$$

$$\mathfrak{G}^*u = -\frac{e^u(db)}{m^*(db)}, \quad u \in D(\mathfrak{G}^*). \quad (1b)$$

Очевидно, следует ожидать, что существует замена времени $t \rightarrow \mathfrak{f}^{-1}$, переводящая x в x^* (см. § 8.1). Если $m^*(db) = \mathfrak{f}(b)m(db)$, где $0 < \mathfrak{f} \in C(Q)$, естественно рассмотреть классическую замену времени

$$t \rightarrow \mathfrak{f}^{-1}, \quad \mathfrak{f}(t) = \int_0^t \mathfrak{f}(x_s) ds; \quad \text{легко показать, что процесс } x(\mathfrak{f}^{-1}) \text{ сов-}$$

падает по распределению с процессом x^* .

Но если мера m^* сингулярна относительно m , то описанная замена теряет смысл. Что же касается интеграла Хеллингера

$$\mathfrak{f}(t) \equiv \int_Q \frac{\text{mes}\{s: x(s) \in db, s \leq t\} m^*(db)}{m(db)}, \quad (2)$$

который с первого взгляда кажется многообещающим, то его не удастся здесь применить, хотя, по-видимому, этот интеграл должен сходиться.

В. Волконский [1] в одномерном случае и Г. П. Маккин и Х. Танака [1] в случае диффузии с броуновскими выходными вероятностями в d -мерном пространстве, $d \geq 1$, обошли это препятствие, аппроксимируя замену $t \rightarrow \mathfrak{f}^{-1}$ подходящими классическими заменами времени; Р. Блюменталь, Р. Гетур и Г. П. Маккин [1] использовали тот же метод для широкого класса движений, включающего общие диффузии.

Заметив, что в случае броуновских выходных вероятностей средние времена выхода являются эксцессивными в смысле Дж. Ханта:

$$E_a\{e_D^\bullet(x_t), t < m_{\partial D}\} \uparrow e_D^\bullet(a), \quad t \downarrow 0, \quad a \in D, \quad (3)$$

Маккин и Танака определили \mathfrak{f} при $t < m_{\partial D}$ как предел выражения

$$\mathfrak{f}_\varepsilon(t) = \int_0^t \varepsilon^{-1} [e_D^\bullet(x(s)) - E_{x(s)}\{e_D^\bullet(x_\varepsilon), \varepsilon < m_{\partial D}\}] ds \quad (4)$$

по некоторой последовательности $\varepsilon \downarrow 0$. Идея этого определения состоит в следующем. Так как функция

$$\mathfrak{G}_\varepsilon u = \varepsilon^{-1} [E_\bullet\{u(x_\varepsilon), \varepsilon < m_{\partial D}\} - u], \quad u \in D(\mathfrak{G}), \quad (5)$$

сходится при $\varepsilon \downarrow 0$ к $\mathcal{G}u$ на D и так как $\mathcal{G}^*e_D^* = -1$, то должно быть справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{G}_\varepsilon e_D^* dm = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{G}_\varepsilon^* e_D^* dm^* = -dm^* \quad (6)$$

и выражение

$$f_\varepsilon(t) = - \int_Q \frac{\text{mes}\{s: x(s) \in db, s \leq t\} \mathcal{G}_\varepsilon e_D^* m(db)}{m(db)} \quad (7)$$

должно сходиться к интегралу Хеллингера (2). М. Г. Шур [1] придал этой идее другую форму, изящную и полезную.

Поскольку у одномерного броуновского движения есть локальные времена, для него все положительные меры являются мерами скорости. Но в случае числа измерений $d \geq 2$ положение не так просто; например, в случае диффузий со стандартными броуновскими выходными вероятностями мера скорости должна иметь непрерывные потенциалы, а множества нулевой меры должны быть *тонкими* для броуновского движения; т. е. если $Z_1 \supset Z_2 \supset \dots$ — открытые множества и $m(\bigcap_{n \geq 1} Z_n) = 0$, то

$$P_a \{m_{\partial Z_n} \downarrow 0, n \uparrow +\infty\} \equiv 1, a \in \bigcap_{n \geq 1} Z_n.$$

(См. Г. П. Маккин и Х. Танака [1].)

8.4. Потенциалы

Здесь будут изложены некоторые более глубокие свойства потенциалов, которые были изучены Дж. Хантом [2(3)]. Мы увидим, что изучавшееся нами стандартное броуновское движение — слишком простой в этом отношении пример, так как симметрия его переходных плотностей не позволяет заметить важность вводимого ниже обращенного движения.

Пусть имеется *невозвратная* диффузия на некомпактном пространстве Q с положительной стационарной мерой e и непрерывными переходными плотностями $p(t, a, b)$, такими, что¹⁾

$$\int_Q e(da) p(t, a, b) \equiv 1; \quad (1a)$$

$$\int_Q p(t-s, a, \xi) p(s, \xi, b) e(d\xi) \equiv p(t, a, b); \quad (1b)$$

$$G(a, b) \equiv \int_0^{+\infty} p(t, a, b) dt < +\infty \text{ при } a \neq b \quad (1c)$$

¹⁾ Условие (1a) почти автоматически вытекает из стационарности меры e .

(так же, как в трехмерном броуновском случае). Тогда обращенное ядро $p^*(t, a, b) \equiv p(t, b, a)$ удовлетворяет условиям

$$\int_Q p^*(t, a, b) e(db) \equiv 1; \quad (2a)$$

$$\int_Q p^*(t-s, a, \xi) p^*(s, \xi, b) e(d\xi) \equiv p^*(t, a, b); \quad (2b)$$

т. е. $p^*(t, a, b)$ можно рассматривать как переходные плотности для некоторого консервативного *обращенного* движения, начинающегося заново в любой момент $t \geq 0$. Мы называем его *обращенным* потому, что если разрешить бесконечные (положительные) вероятности, то *стационарное обращенное* движение с вероятностями

$$\begin{aligned} P\{x(t_1) \in db_1, x(t_2) \in db_2, \dots, x(t_n) \in db_n\} \equiv \\ \equiv e(db_1) p^*(t_2 - t_1, b_1, b_2) e(db_2) \dots p^*(t_n - t_{n-1}, b_{n-1}, b_n) e(db_n), \\ -\infty < t_1 < t_2 < \dots < t_n, \end{aligned} \quad (3a)$$

— это не что иное, как *стационарное прямое* движение с вероятностями

$$\begin{aligned} P\{x(t_1) \in db_1, x(t_2) \in db_2, \dots, x(t_n) \in db_n\} = \\ = e(db_1) p(t_2 - t_1, b_1, b_2) e(db_2) \dots p(t_n - t_{n-1}, b_{n-1}, b_n) e(db_n), \\ -\infty < t_1 < t_2 < \dots < t_n, \end{aligned} \quad (3b)$$

в котором *направление времени изменено на обратное*.

Если предположить, что обращенное движение является диффузией, легко видеть, что ее производящий оператор \mathfrak{G}^* является сопряженным по отношению к оператору \mathfrak{G} прямого движения. Подробнее, если $u \in D(\mathfrak{G})$ и $u^* \in D(\mathfrak{G}^*)$ обращаются в нуль вне некоторой области, то

$$\begin{aligned} \int_Q u^* \mathfrak{G} u \, de &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_Q u^*(a) e(da) \varepsilon^{-1} \left[\int_Q p(t, a, b) u(b) e(db) - u(a) \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_Q u(b) e(db) \varepsilon^{-1} \left[\int_Q p^*(t, b, a) u^*(a) e(da) - u^*(b) \right] = \\ &= \int_Q u \mathfrak{G}^* u^* \, de. \end{aligned} \quad (4)$$

Неотрицательная функция u называется *эксцессивной* для *прямого* движения, если $\int_Q p(t, a, b) u e(db) \uparrow u$ при $t \downarrow 0$.

Если u — эксцессивная функция в этом смысле, то мера $e^*(db) \equiv u e(db)$ является эксцессивной для *обращенного* движения,

т. е. $\int_Q e^*(da) p^*(t, a, b) e(db) \uparrow e^*(db)$ при $t \downarrow 0$. Обратно, если $e^* \geq 0$ является эксцессивной мерой для обращенного движения, то $u \equiv \lim_{t \downarrow 0} \int_Q e^*(da) p^*(t, a, b)$ — эксцессивная функция для прямого движения и $e^*(db) = ue(db)$. Короче говоря, между эксцессивными функциями для прямого движения и эксцессивными мерами для обращенного установлено взаимно однозначное соответствие. Хант использовал этот факт для того, чтобы доказать, что эксцессивная функция u для прямого движения может быть представлена в виде суммы прямого потенциала $\int_Q G(a, b) e^*(db)$ некоторой неотрицательной меры e'' и функции $u_\infty \equiv \lim_{t \uparrow +\infty} \int_Q p u de$ (еще одно замечание о мере e'' см. в § 8.5).

Если A — ограниченное замкнутое или открытое подмножество в Q , то прямые и обращенные вероятности достижения

$$p_A = P. \{m_A < +\infty\}; \quad (5a)$$

$$p_A^* = P^*. \{m_A < +\infty\} \quad (5b)$$

являются эксцессивными функциями. Таким образом, p_A — это прямой потенциал

$$\int G(a, b) e_A(db)$$

плюс $\lim_{t \uparrow +\infty} P. \{m_A(w_t^i) < +\infty\}$ (равный 0 в силу невозвратности), а p_A^* — обращенный потенциал

$$\int G^*(a, b) e_A^*(db)^1$$

плюс $\lim_{t \uparrow +\infty} P^*. \{m_A(w_t^i) < +\infty\}$ (равный 0).

Дж. Хант [2 (3): 175] обнаружил, что $e_A(Q) = e_A^*(Q)$, и назвал этот общий для прямого и обращенного движений полный заряд *естественной емкостью* множества A .

Приведем простое доказательство.

Пусть компакт A содержится в ограниченном открытом множестве B , а другое ограниченное открытое множество D со-

¹⁾ $G^*(a, b) = G(b, a)$.

держит \bar{B} . Тогда

$$\begin{aligned} e_A(Q) &= \int_Q p_B^*(b) e_A(db) = \\ &= \int_Q \left[\int_Q e_B^*(da) G(a, b) \right] e_A(db) = \int_Q e_B^*(da) p_A(a) \leq \\ &\leq \int_Q e_B^*(da) p_D(a) = \int_Q p_B^*(b) e_D(db) \downarrow \int_Q p_A^*(b) e_D(db) = \\ &= \int_Q e_A^*(da) p_D(a) = e_A^*(Q), \quad B \downarrow A. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь мы использовали то, что $p_B^* \downarrow p_A^*$ на ∂D и что $e_D(Q \setminus \partial D) = 0$. Аналогично $e_A^*(Q) \leq e_A(Q)$, откуда $e_A(Q) = e_A^*(Q)$. Пользуясь тем, что при $A \uparrow B$

$$e_A(Q) = \int_Q e_B^*(da) p_A(a) \uparrow \int_Q e_D^*(da) p_B(a) = e_B(Q), \quad (7)$$

и таким же соотношением для $e_A^*(Q)$, находим, что для открытых множеств B также $e_B(Q) = e_B^*(Q)$.

Функция $e_A(Q) = e_A^*(Q)$ от множества A является альтернирующей в смысле Г. Шоке [см. (7.8.13)].

Дополнительные сведения о потенциалах читатель найдет у Е. Б. Дынкина [7], Дж. Ханта [2(1, 2, 3)], Бёрлинга и Дени [1], Ф. Спитцера [2] и М. Г. Шура [1].

8.5. Границы

Рассмотрим стандартное броуновское движение на открытом круге $E^2: |b| < 1$, останавливающееся на ∂E^2 , с переходными вероятностями

$$\begin{aligned} g^*(t, a, b) 2db &= P_a \{x(t) \in db, t < \mathfrak{m}_{\partial E^2}\}, \\ (t, a, b) &\in (0, +\infty) \times E^2 \times E^2, \end{aligned} \quad (1a)$$

функцией Грина

$$G(a, b) = \int_0^{+\infty} g^*(t, a, b) dt = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1-ab}{b-a} \right|, \quad (a, b) \in E^2 \times E^2, \quad (1b)$$

и выходными вероятностями (задающимися ядром Пуассона)

$$\begin{aligned} h(a, e^{i\theta}) d\theta &= P_a \{x(\mathfrak{m}_{\partial E^2}) \in d\theta\} = \lim_{r \uparrow 1} (1-r)^1 G(a, re^{i\theta}) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1-|a|^2}{|a-e^{i\theta}|^2} d\theta, \quad |a| < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{aligned} \quad (1c)$$

При любом $\theta \in [0, 2\pi)$ функция $u_\theta(a) = h(a, e^{i\theta})$ является минимальной гармонической функцией, т. е. если выполняются условия

$$0 \leq u \leq u_\theta, \quad (2a)$$

$$u \text{ — гармоническая функция в } E^2, \quad (2b)$$

то

$$u \text{ отличается от } u_\theta \text{ только постоянным множителем.} \quad (3)$$

Обратно, пусть $0 \leq u$ — минимальная гармоническая функция; ее можно представить в виде $\int_{E^2} u_\theta e(d\theta)$ ($e \geq 0$), причем мера e

должна быть сосредоточена в единственной точке $\theta \in \partial E^2$, т. е. u только множителем отличается от u_θ . Иначе говоря, отображение $\theta \rightarrow u_\theta$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками границы и минимальными гармоническими функциями.

Мы видим, что граница ∂E^2 обладает следующими двумя свойствами:

она не слишком велика, т. е. траектория при $t \uparrow m_{\partial E^2}$ стремится к единственной точке на ∂E^2 ; (4a)

она не слишком мала, т. е. если $0 \leq u$ — гармоническая функция на E^2 , то

$$u(a) = \int_{\partial E^2} h(a, e^{i\theta}) e(d\theta), \quad |a| < 1, \quad e \geq 0. \quad (4b)$$

Рассматривая броуновское движение на некоторой гриновской области $Q \subset R^d$, останавливающееся на ∂Q , мы не можем надеяться, что геометрическая граница ∂Q будет достаточно велика для того, чтобы имело место представление Пуассона (4b). Это показывает простой пример разрезанного круга

$$Q: 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Однако, как обнаружил Р. С. Мартин [1], можно сохранить свойства (4a) и (4b), если соответствующим образом расщепить ∂Q .

Для этого рассмотрим классическую функцию Грина $G(a, b)$ области Q .

Пусть $b \in Q$; если $\partial B \subset Q$ — маленькая сфера с центром в точке b , не содержащая какой-то другой точки $a \in Q$, то для c вблизи ∂Q

$$\begin{aligned} G(a, c) &\geq E_a \left[\int_{m_{\partial B}}^{+\infty} g^*(t, x(m_{\partial B}), c) dt \right] = \\ &= E_a \{ m_{\partial B} < +\infty, G(x(m_{\partial B}), c) \} \geq \\ &\geq \text{const} \cdot \int_{\partial B} G(\cdot, c) d\sigma = \text{const} \cdot G(b, c), \end{aligned} \quad (5)$$

т. е. функция

$$u_{ab} = \frac{G(b, \cdot)}{G(a, \cdot)} \text{ ограничена вблизи } \partial Q. \quad (6)$$

Учитывая (6), определяем границу Мартина Q° , области Q как пространство идеальных точек, добавляемых к Q при наименьшей компактификации $\bar{Q} = Q + Q^\circ$, при которой u_{ab} непрерывны на $\bar{Q} \setminus (a \cup b)$ для любого выбора a и $b \in Q$.

Пусть $\theta \in Q^\circ$. При фиксированном $a \in Q$ функция

$$h(b, \theta) = \lim_{c \rightarrow \theta} \frac{G(b, c)}{G(a, c)} \quad (7)$$

является гармонической, но может не быть минимальной. Несмотря на это, отображение $\theta \rightarrow h(\cdot, \theta)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между некоторым борелевским подмножеством Q° границы Q° и минимальными гармоническими функциями u , $u(a) = 1$. При этом выполняется (4b), т. е. если $0 < u$ — гармоническая функция, то $u(b) = \int_{Q^\circ} h(b, \theta) e^u(d\theta)$, причем мера $e^u (\geq 0)$ единственна.

Поэтому граница Q° не слишком мала; а как доказал Дуб [6], она также не слишком велика, т. е. почти все траектории сходятся при $t \uparrow m_{\partial Q}$ к единственной точке из Q° (см. также Дж. Хант [3]).

Дуб нашел также изящное выражение для e^u :

$$e^u(d\theta) = \frac{u(b) P_b^u \{x(m_{\partial Q} - 0) \in d\theta\}}{h(b, \theta)}, \quad (8)$$

где $P_b^u(B)$ — вероятность события B для u -движения с переходными вероятностями

$$P_a^u \{x(t) \in db\} = \frac{P_a \{x(t) \in db, t < m_{\partial Q}\}}{u(a)} u(b). \quad (9)$$

В частности, при $u \equiv 1$ получаем

$$h(b, \theta) = \frac{P_b \{x(m_{\partial Q} - 0) \in d\theta\}}{e^1(d\theta)}. \quad (10)$$

Это выражение является аналогом классического выражения ядра Пуассона в виде выходной плотности, так же как выражение (7) является аналогом представления ядра Пуассона в виде нормальной производной функции Грина [см. (1c)].

Дубовское выражение для e^u через u -движение применяется также к потенциалам. Если функция $0 < u$ является эксцессивной, т. е. если $2 \int g^*(t, a, b) u(b) db \uparrow u$ при $t \downarrow 0$, и если u не является

чисто гармонической, то соответствующее u -движение иногда будет убиваться в момент $m_\infty < m_{\partial Q}$. Мера Рисса

$$e^u(db) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} [u(b) - E_b\{u(x_\varepsilon), \varepsilon < m_{\partial Q}\}] \cdot 2 db, \quad (11)$$

участвующая в представлении u в виде суммы потенциала $\int_Q G(a, b) e^u(db)$ и неотрицательной гармонической функции (см. § 7.5), имеет следующий вид:

$$e^u(db) = \frac{u(a) P_a^u\{x(m_\infty - 0) \in db, m_\infty < m_{\partial Q}\}}{G(a, b)} \text{ внутри } Q. \quad (12)$$

Для $Q = R^d$ ($d \geq 3$) граница $Q^* = Q^\circ$ состоит из одной точки (об одноточечных границах см. § 8.7).

Границы Мартина рассматривались также для цепей Маркова (см. Дуб [7], Дуб, Снелл и Вильямсон [1], Хант [3], Т. Ватанабе [1]; другая граница рассматривалась В. Феллером [8]). Нет сомнения, что аналогичные границы можно связать со всяким приличным марковским процессом (см. Бишоп и де Лейв [1] и Д. Рэй [3]).

Пусть дана консервативная диффузия на пространстве Q с хорошей границей Q^* (не слишком большой и не слишком малой). Сделаем так, чтобы время вдоль траекторий возрастало настолько медленно, что $x(t) \rightarrow Q^*$ при $t \uparrow m < +\infty$. Пусть \mathfrak{Q} — соответствующий локальный производящий оператор внутри Q . Поставим следующую задачу: найти все консервативные производящие операторы $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{Q}$, т. е. найти все граничные условия, которые могут быть наложены на \mathfrak{Q} .

В качестве иллюстрации рассмотрим стандартный броуновский производящий оператор \mathfrak{Q} ¹⁾ в открытом единичном круге $Q = E^2$. Здесь Q^* — это единичная окружность ∂E^2 . Представляется вероятным, что наиболее общий консервативный диффузионный оператор $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{Q}$ можно выразить через некоторый консервативный одномерный дифференциальный оператор \mathfrak{Q}^* на ∂E^2 и борелевскую функцию $0 \leq p(\theta) \leq 1$, а именно предположение состоит в том, что \mathfrak{G} совпадает с оператором \mathfrak{Q} , который применяется к классу $D(\mathfrak{G})$ таких функций $u \in C(\bar{E}^2)$, что $\mathfrak{Q}u$ непрерывно продолжается на \bar{E}^2 и

$$p(\theta) \frac{\partial u}{\partial r}(1 - 0, \theta) + [1 - p(\theta)] (\mathfrak{Q}u)(1 - 0, \theta) = (\mathfrak{Q}^* u^*)(\theta), \quad (13)$$

$$0 \leq \theta < 2\pi, \quad u^* \equiv u(1, \theta).$$

¹⁾ $\mathfrak{Q}u = \Delta u/2$ для $u \in C^2(E^2)$.

Пусть x — броуновское движение с отражением в круге $\left[\frac{\partial u}{\partial r}(1-0, \cdot) \equiv 0 \right]$, и пусть $t(t)$ — локальное время в точке $r=1$ для его радиальной (бесселевской) части, а ψ — независимое от x броуновское движение по окружности. Тогда движения, соответствующие граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1-0, \theta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(1, \theta); \quad (14a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1-0, \theta) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(1, \theta), \quad (14b)$$

можно задать выражениями

$$xe^{i\psi(t)}; \quad (15a)$$

$$xe^{it} \quad (15b)$$

[см. задачу 7.15.4]. Движение (15b) следует рассматривать как броуновское движение с косым отражением, потому что условие (14b) можно представить в виде $\partial u / \partial \sigma = 0$, где $\partial u / \partial \sigma$ означает дифференцирование по косому направлению, составляющему угол -45° с внешней нормалью.

Что касается нашей общей задачи, то там должны получаться аналогичные граничные условия $p(\partial u / \partial n) + (1-p)\Omega u = \Omega^* u^*$, а соответствующие движения должны выражаться через движение с отражением ($\partial u / \partial n = 0$), распределение $t(t, d\theta)$ локального времени на Q^* (для процесса с отражением) и движение по границе, связанное с оператором Ω^* . См. об этом А. Вентцель [1], Т. Уэно [2], Н. Икеда [1], К. Сато [1] и К. Сато и Х. Танака [1]. Хорошую задачу представляет выяснение смысла броуновского движения с отражением на замыкании (мартинговском) гриновской области $D \subset R^3$ (см. Дж. Дуб [8]).

8.6. Эллиптические операторы

Рассмотрим хорошее дифференцируемое многообразие Q и на нем эллиптический оператор Ω , имеющий в локальных координатах вид

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq d} e_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j \leq d} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (1)$$

Оператор Ω порождает некоторую диффузию, если его коэффициенты удовлетворяют условию Гёльдера, а матрица $e = [e_{ij}]$ симметрична и положительно определена в каждой точке из Q . Точнее, Ω совпадает на $C^2(Q)$ с производящим оператором некоторой диффузии, которая, может быть, уходит на ∞ раньше момента $+\infty$, если многообразие Q не компактно (см. Погор-

жельский [1]). К. Ито [3] доказал, что искомое движение удовлетворяет стохастическому уравнению

$$dx = \sqrt{e(x)} db + f(x) dt \quad (2)$$

вплоть до момента, когда оно выходит из окрестности, на которой имеет место представление (1). Здесь \sqrt{e} — это симметричный положительно определенный корень из e , $f = (f_1, f_2, \dots, f_d)$, а $b(t)$ — стандартное d -мерное броуновское движение, причем предполагается, что гильдеровский показатель коэффициентов равен 1.

При изменении локальных координат $x \rightarrow x^*$ матрица e^{-1} изменяется по следующему закону:

$$e_{ij}^{-1} = \sum_{k, l \leq d} e_{kl}^{-1} \frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_l}{\partial x_j^*}. \quad (3)$$

Поэтому форма

$$\sum_{i, j \leq d} e_{ij}^{-1} dx_i dx_j \quad (4)$$

задает риманово расстояние на Q . Оператор Δ может быть представлен в виде оператора Лапласа — Бельтрами

$$\frac{1}{2} \Delta = \frac{1}{2} \sum_{i, j \leq d} \sqrt{|e|} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{e_{ij}}{\sqrt{|e|}} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (5)$$

плюс оператор первого порядка (*векторное поле*) f , соответствующий сносу (см., например, Е. Нельсон [1]). При этом уравнение (2) упрощается, принимая вид $dx = db + f(x) dt$, где b — движение, связанное с оператором $\Delta/2$ (броуновское движение).

Дифференциальный оператор $\mathcal{G}u = -e^u (db)/m(db)$, который мы рассматривали в § 8.2, так же, как и эллиптические операторы порядка не более 2, обладает тем свойством, что $\mathcal{G}u \leq 0$ в точке локального минимума функции $u \in D(\mathcal{G})$. Поэтому следует надеяться, что некоторые черты приведенной выше геометрической картины сохраняются и в общем случае.

Дополнительные сведения об эллиптических операторах читатель может получить в следующих работах, кроме уже цитированных: Хасьминский [1], Нельсон [2], Иосида [3], а также в § 8.7.

Задача 1. Доказать, что если дифференциальный оператор \mathcal{G} с непрерывными коэффициентами обладает тем свойством, что $\mathcal{G}u \leq 0$ в точке локального минимума функции $u \in C^\infty(R^d)$, то он является эллиптическим оператором порядка не более 2, не содержащим членов нулевого порядка.

8.7. Малая граница Феллера и σ -алгебры «хвостов»

Пусть дана такая диффузия на пространстве Q , что

$$\int h_{\partial D}(a, db) f(b) \in C(D), \quad f \in B(\partial D). \quad (1)$$

Обозначим через B^* σ -алгебру «хвостов» $\bigcap_{n \geq 1} B\{x(t): t \geq n\}$, профакторизованную по идеалу событий вероятности 0^1 .

Если $B \in B^*$, то вероятность $p = P_*(B)$ удовлетворяет уравнению

$$p(a) = P_a\{\omega_m^+ \in B\} = \int h_{\partial D}(a, db) p(b), \quad a \in D. \quad (2)$$

Таким образом, $p \in C(Q)$, и так как

$$p = \int e^{-t} P_*(\omega_t^+ \in B) dt = G_1 p, \quad (3)$$

то p является решением задачи

$$0 \leq p \leq 1; \quad (4a)$$

$$p \in D(\mathfrak{G}); \quad (4b)$$

$$\mathfrak{G}_p = 0. \quad (4c)$$

Обратно, пусть p — какое-нибудь решение задачи (4). Тогда $E_*[p(x_t) | B_s] = E_{x(s)}[p(x_{t-s})] =$

$$= p(x_s) + E_{x(s)} \left[\int_0^{t-s} (\mathfrak{G}_p)(x_\theta) d\theta \right] = p(x_s), \quad t \geq s, \quad (5)$$

т. е. $p(x_t)$ ($t \geq 0$) — ограниченный мартингал. Поэтому p сходится при $t \uparrow +\infty$ к B^* -измеримому пределу p_∞ ; получаем

$$p(x_t) = E_*(p_\infty | B_t) = E_{x(t)}(p_\infty), \quad t \geq 0. \quad (6a)$$

В частности, если $p = P_*(B)$ ($B \in B^*$), то

$$\lim_{t \uparrow +\infty} p(x_t) = \lim_{t \uparrow +\infty} P(B | B_t) = P_*(B | B) = \chi_B. \quad (6b)$$

Дж. Хант указал нам, что формула (6) задает взаимно однозначное соответствие между событиями $B \in B^*$ и крайними точками множества решений задачи (4) (это множество компактно и выпукло).

¹⁾ Для того чтобы результаты этого параграфа были справедливы, нужно рассмотреть несколько меньшую σ -алгебру, а именно σ -алгебру B^{**} , состоящую из всех таких событий B , что $\omega \in B \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \omega_t^+ \in B$. Для предлагаемой авторами σ -алгебры можно привести пример, для которого нарушается (2): в качестве $x(t)$ можно взять движение с единичной скоростью вправо по прямой; $B = \{x(t) = t, t \geq n\}$. Тогда $P_0(B) = 1 \neq P_0\{\omega_m^+ \in B\} = 0$. Представляет интерес вопрос, когда σ -алгебры B^* и B^{**} совпадают. — Прим. перев.

В. Феллер [8] использовал это соответствие для того, чтобы представить B^* как σ -алгебру подмножеств некоторого топологического пространства Q^* , присоединяемого к Q в качестве границы. Это Q^* мы и называем малой границей Феллера (относительно ее связи с границей Мартина см. Дж. Фельдман [1]).

Пусть дано не являющееся константой решение p задачи (4); тогда можно выбрать $a < b$ и такие открытые множества A и $B \subset Q$, что $p < a$ на A и $p > b$ на B . Если движение возвратно (т. е. если $P\{\tau_D < +\infty\} \equiv 1$ для любого открытого множества $D \subset Q$), то при $t \uparrow +\infty$ траектория бесконечное число раз попадает и в A и в B . Значит, ограниченный мартингал $p(x_t)$ ($t \geq 0$) не может сходиться, потому что $p(x_t) < a$ и $p(x_t) > b$ бесконечное число раз при $t \uparrow +\infty$. Итак, p должно быть постоянно, и должен выполняться закон 0—1:

$$P_*(B) = 0 \text{ или } 1, \quad B \in B^*. \quad (7)$$

Теперь предположим, что $Q = R^d$ и что наш производящий оператор \mathfrak{Q} — это эллиптический оператор

$$\mathfrak{Q} = \sum_{i, j \leq d} e_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (8)$$

с непрерывными коэффициентами. Поставим следующую задачу: найти условия на квадратичную форму $(e\xi, \xi) = e_{11}\xi_1^2 + \dots$, при которых выполняется закон нуля или единицы (7), т. е. все решения задачи (4) постоянны. Подробнее, пусть γ_+ и γ_- — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы e в некоторой точке; спрашивается, какова наибольшая скорость роста γ_+/γ_- , при которой

$$\text{движение возвратно;} \quad (9a)$$

$$\text{все решения задачи (4) постоянны;} \quad (9b)$$

$$\text{все неотрицательные решения уравнения } \mathfrak{Q}p = 0 \text{ постоянны?} \quad (9c)$$

Известно, что если γ_+/γ_- ограничено, то выполняется (9c). Имеется также замечательный результат С. Бернштейна [1], состоящий в том, что условие (9b) выполнено, если $d=2$, и $\gamma_- > 0$ в каждой точке. Бернштейн дал также простой пример оператора

$$\mathfrak{Q} = (2 + 4b^2) \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 4b \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2}{\partial b^2},$$

для которого не выполнено (9c) ($p = e^{a-b^2}$), причем $\gamma_+/\gamma_- \sim 4b^4$ при $b \uparrow +\infty$. Другие примеры, связанные с результатом Бернштейна, см. Э. Хопф [1]; более современная информация содержится у Мозера [1].

ЛИТЕРАТУРА

СПИСОК НЕКОТОРЫХ СОКРАЩЕНИЙ

AM	— Annals of Mathematics
AMS	— The Annals of Mathematical Statistics
BAMS	— Bulletin of the American Mathematical Society
Berk. Symp.	— Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability
CPAM	— Communications on Pure and Applied Mathematics
IJM	— Illinois Journal of Mathematics
JMAA	— Journal of Mathematical Analysis and Applications
JMM	— Journal of Mathematics and Mechanics
PCPS	— Proceedings of the Cambridge Philosophical Society
PNAS	— Proceedings of the National Academy of Sciences USA
TAMS	— Transactions of the American Mathematical Society
ДАН	— Доклады Академии наук СССР
ТВ	— Теория вероятностей и ее применения
УМН	— Успехи математических наук

Александров П. С., Хопф (Alexandroff P., Hopf H.)
1 Topologie, I, J. Springer, Berlin, 1935.

Башелье (Bachelier L.)

1. Théorie de la spéculation, *Ann. Sci. École. Norm. Sup.*, 17 (1900), 21—86.

Безикович (Besicovitch A. S.)

1. On linear sets of points of fractional dimension, *Math. Ann.*, 101 (1929), 161—198.
2. On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure, *Indagationes Math.*, 14 (1952), 339—344.

Безикович, Тейлор (Besicovitch A. S., Taylor S. J.)

1. On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure, *J. London Math. Soc.*, 29 (1954), 449—459.

Бергман, Шиффер (Bergman S., Schiffer M.)

1. Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, New York, 1953.

Бёрлинг, Дени (Beurling A., Deny J.)

1. Dirichlet spaces, *PNAS*, 45 (1959), 208—215.

Бернштейн С. Н.

1. Об одной геометрической теореме и ее применении к дифференциальным уравнениям с частными производными эллиптического типа, *УМН* (1940), 75—81.

- Бишоп, де Лейв (Bishop E., de Leeuw K.)
 1. The representations of linear functionals by measures on sets of extreme points, *Ann. Inst. Fourier*, **9** (1959), 305—331.
- Блюменталь (Blumenthal R.)
 1. An extended Markov property, *TAMS*, **85** (1957), 52—72.
- Блюменталь, Гетур (Blumenthal R., Getoor R.)
 1. Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments, *JMM*, **10** (1961), 493—516.
- Блюменталь, Гетур, Маккин (Blumenthal R., Getoor R., McKean H. P.)
 1. Markov processes with identical hitting distributions, *IJM*, **6** (1962), 402—420.
- Бойлан (Boylan E.)
 1. Local times for a class of Markov processes, *IJM*, **8** (1964), 19—39.
- Борель (Borel E.)
 1. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **27** (1909), 247—271.
- Бохнер (Bochner S.)
 1. Diffusion equation and stochastic processes, *PNAS*, **35** (1949), 368—370.
 2. Positive zonal functions on spheres, *PNAS*, **40** (1954), 1141—1147.
- Ватанабе С. (Watanabe S.)
 1. On stable processes with boundary conditions, *J. Math. Soc. Japan*, **14** (1962), 170—198.
- Ватанабе Т. (Watanabe T.)
 1. On the theory of Martin boundaries induced by countable Markov processes, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, Math.*, **33** (1960), 39—108.
- Вейль (Weyl H.)
 1. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 220—269.
 2. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **39** (1915), 1—50.
- Вентцель А. Д.
 1. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов, *ТВ*, **4** (1959), 172—185.
- Винер (Wiener N.)
 1. Differential space, *J. Math. Phys.*, **2** (1923), 131—174.
 2. The Dirichlet problem, *J. Math. Phys.*, **3** (1924), 127—146.
 3. Generalized harmonic analysis, *Acta Math.*, **55** (1930), 117—258.
- Волконский В. А.
 1. Случайная замена времени в строго марковских процессах, *ТВ*, **3** (1958), 332—350.
 2. Построение неоднородных марковских процессов при помощи случайной замены времени, *ТВ*, **6** (1961), 47—56.
- Гальмарино (Galmario A. R.)
 1. Representation of an isotropic diffusion as a skew product, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **1** (1963), 359—378.
- Гаусс (Gauss C. F.)
 1. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, № 2, Leipzig, 1889.
- Даниель (Daniell P. J.)
 1. A general form of integral, *AM*, **19** (1917—18), 279—294.

- Дворецкий, Эрдёш (Dvoretzky A., Erdős P.)
1. Some problem on random walk in space, 2-d Berk. Symp., 353—367. University of California Press, 1951.
- Дворецкий, Эрдёш, Какутани (Dvoretzky A., Erdős P., Kakutani S.)
1. Double points of Brownian motion in n -space, *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged), 12 (1950), 75—81.
2. Multiple points of paths of Brownian motion in the plane, *Bull. Res. Council Israel*, 3 (1954), 364—371.
3. Nonincreasing everywhere of the Brownian motion process, 4-th Berk. Symp. II, 103—116, Univ. of Calif. Press., 1961.
- Дворецкий, Эрдёш, Какутани, Тейлор (Dvoretzky A., Erdős P., Kakutani S., Taylor S. J.)
1. Triple points of Brownian paths in 3-space, *PCPS*, 53 (1957), 856—862.
- Дерман (Derman C.)
1. Ergodic property of the Brownian motion process, *PNAS*, 40 (1954), 1155—1158.
- Дёч (Doetsch G.)
1. Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.
- Доблин (Doob J. L.)
1. Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables, *Bull. Soc. Math. France*, 66 (1938), 210—220.
- Донскер (Donsker M. D.)
1. An invariance principle for certain probability limit theorems, *Mem. Amer. Math. Soc.*, № 6 (1951).
- Дуб Дж. Л. (Doob J. L.)
1. Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
2. Semi-martingales and subharmonic functions, *TAMS*, 77 (1954), 86—121.
3. Martingales and one-dimensional diffusion, *TAMS*, 78 (1955), 168—208.
4. A probabilistic approach to the heat equation, *TAMS*, 80 (1955), 216—280.
5. Brownian motion on a Green space, *TB*, 2 (1957), 3—33.
6. Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 431—458.
7. Discrete potential theory and boundaries, *JMM*, 8 (1959), 433—458.
8. Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 12 (1962), 573—622.
- Дуб, Снелл, Вильямсон (Doob J. L., Snell J., Williamson R.)
1. Application of boundary theory to sums of independent random variables, *Contributions to Probability and Statistics*, 182—197, Stanford University Press, 1960.
- Дынкин Е. Б.
1. Непрерывные одномерные марковские процессы, *ДАН*, 105, (1955), 405—408.
2. Инфинитезимальные операторы марковских случайных процессов, *ДАН*, 105 (1955), 206—209.
3. Марковские процессы и полугруппы операторов, *TB*, 1 (1956), 25—37.
4. Инфинитезимальные операторы марковских процессов, *TB*, 1 (1956), 38—60.
5. Одномерные непрерывные строго марковские процессы, *TB*, 4 (1959), 3—54.
6. Основания теории марковских процессов, Физматгиз., М., 1959.
7. Естественная топология и эксцессивные функции, связанные с марковским процессом, *ДАН*, 127 (1959), 17—19.
8. Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963.

Дынкин Е. Б., Юшкевич А.

1. Строго марковские процессы, *ТВ*, 1 (1956), 149—155.

Зейферт Г., Трельфалль В.

1. Топология, ГОНТИ, М.—Л., 1938.

Икеда (Ikeda N.)

1. On the construction of two-dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problem, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A., Math.*, 33 (1961), 368—427.

Ито К. (Itô K.)

1. On stochastic processes, 1. *Japanese J. Math.*, 18 (1942), 261—301.
2. On a stochastic integral equation, *Proc. Japan Acad.*, 22 (1946), 32—35.
3. Stochastic differential equations on a differentiable manifold, *Nagoya Math. J.*, 1 (1950), 35—47.
4. Multiple Wiener integral, *J. Math. Soc. Japan*, 3 (1951), 157—169.
5. О стохастических дифференциальных уравнениях, *сб. Математика*, 1 (1957), 78—116.

Ито, Маккин (Itô K., McKean H. P.)

1. Potentials and the random walk, *IJM*, 4 (1960), 119—132.
2. Brownian motion on a half line, *IJM*, 7 (1963), 181—231.

Иосида (Yosida K.)

1. On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators, *J. Math. Soc. Japan*, 1 (1948), 15—21.
2. Integration of Fokker-Planck's equation in a compact Riemannian space, *Ark. Math.*, 1 (1949), 71—75.
3. A characterization of second order differential operators, *Proc. Japan Acad.*, 31 (1955), 406—409.
4. Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semi-groups generated by them, *Proc. Japan Acad.*, 36 (1960), 86—89.

Какутани (Kakutani S.)

1. On Brownian motion in n -space, *Proc. Acad. Japan*, 20 (1944), 648—652.
2. Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions, *Proc. Acad. Japan*, 20 (1944), 706—714.
3. Random walk and the type problem of Riemann surfaces, Contribution to the theory of Riemann surfaces, 95—101. Princeton University Press, 1961.

Каллианпур, Роббинс (Kallianpur G., Robbins H.)

1. Ergodic property of the Brownian motion process, *PNAS*, 39 (1953), 525—533.

Камерон (Cameron R. H.)

1. The generalized heat flow equation and a corresponding Poisson formula, *АМ*, 59 (1954), 434—462.

Камерон, Мартин (Cameron R. H., Martin W. T.)

1. Evaluations of various Wiener integrals by use of certain Sturm-Liouville differential equations, *BAMS*, 51 (1945), 73—90.

Каметани (Kametani S.)

1. On Hausdorff's measures and generalised capacities with some of their applications to the theory of functions, *Jap. J. Math.*, 19 (1945), 217—257.

Каратеодори (Carathéodory C.)

1. Funktionentheorie, Basel, 1950.

Карлин, Макгрегор (Karlin S., McGregor J.)

1. The differential equations of birth-and-death-process and the Stieltjes moment problem, *TAMS*, 85 (1957), 489—546.
2. Random walks, *IJM*, 3 (1959), 66—81.

3. Coincidence probabilities, *Pacific J. Math.*, 9 (1959), 1141—1164.
 4. A characterization of the birth-and-death-processes, *PNAS*, 45 (1959), 375—379.
 5. Classical diffusion processes and total positivity, Technical Report № 1, Appl. Math. and Stat. Lab., Stanford University, California, 1960.
- Кац (Kac M.)
1. On some connections between probability theory and differential and integral equations, 2-d Berk. Symp., 189—215. University of California Press, 1951.
- Келлогг (Kellogg O. D.)
1. Foundations of potential theory, Grundlehren der Math. Wissenschaften, 31, Berlin, 1929.
- Колмогоров А. Н.
1. Об аналитических методах в теории вероятностей, *УМН*, 5 (1938), 5—41.
 2. Основные понятия теории вероятностей, ГТТИ, М., 1936.
- Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.
1. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме, *Бюллетень МГУ, сер. матем. и механ.*, 1 (1937), 1—26.
- Комацу (Komatsu Y.)
1. Elementary inequalities for Mills' ratio, *Rep. Statist. Appl. Res. Un. Jap. Sci. Engrs.*, 4 (1955), 69—70.
- Кристал (Chrystal G.)
1. Electricity, *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., 8 (1879), 3—104.
- Курант Р., Гильберт Д.
1. Методы математической физики, т. I, ГТТИ, М.—Л., 1933.
 2. Методы математической физики, т. II, ГТТИ, М.—Л., 1945.
- Курант, Гурвиц (Courant R., Hurwitz A.)
1. Funktionentheorie, Berlin, 1929.
- Ламперти (Lamperti J.)
1. An invariance principle in renewal theory, *AMS*, 33 (1962), 685—696.
 2. Wiener's test and Markov chains, *JMAA*, 6 (1963), 58—66.
- Лебег (Lebesgue H.)
1. Sur le problème de Dirichlet, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 24 (1907), 371—402.
 2. Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet, *C. R. Acad. Sci. Paris* (1924), 349—354.
- Леви (Lévy P.)
1. Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 2nd ed., 1954.
 2. Sur certains processus stochastiques homogènes, *Compositio Math.*, 7 (1939), 283—339.
 3. Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris, 1948.
 4. Le mouvement brownien, Paris, 1954.
 5. Remarques sur le processus de W. Feller et H. P. McKean, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 245 (1957), 1772—1774.
 6. Construction du processus de W. Feller et H. P. McKean en partant du mouvement Brownien. Probability and Statistics (the Harald Cramér volume), Stockholm, 1959.
- де Лейв, Меркил (de Leeuw K., Mirkil H.)
1. A priori sup norm estimates for differential operators, *IJM*, 8 (1964), 112—124.
- Магнус и Оберхеттингер (Magnus N., Oberhettlinger F.)

1. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, New York, 1949.
 2. Anwendung der elliptischen Functionen in Physik und Technik, Berlin, 1949.
- Маккин (McKean H. P., jr.)
1. Sample functions of stable processes, *AM*, 61 (1955), 564—579.
 2. Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations, *TAMS*, 82 (1956), 519—548.
 3. The Bessel motion and a singular integral equation, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A., Math.*, 33 (1960), 317—322.
 4. A Hölder condition for Brownian local time, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1 (1962), 195—201.
 5. Excursions of a non-singular diffusion, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1 (1963), 230—239.
 6. A Skorohod's integral equation for a reflecting barrier diffusion, *J. Math. Kyoto Univ.*, 3 (1963), 85—88.
- Маккин, Рэй (McKean H. P., jr., Ray D. B.)
1. Spectral distribution of a differential operator, *Duke Math. J.*, 29 (1962), 281—292.
- Маккин, Танака (McKean H. P., jr., Tanaka H.)
1. Additive functionals of the brownian path, *Memoirs Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, Math.*, 33 (1961), 479—506.
- Мартин (Martin R. S.)
1. Minimal positive harmonic functions, *TAMS*, 49 (1941), 137—172.
- Маруяма, Танака (Maruyama G., Tanaka H.)
1. Some properties of one-dimensional diffusion processes, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, 11 (1957), 117—141.
 2. Ergodic property of n -dimensional Markov processes, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, 13 (1959), 157—172.
- Мозер (Moser J.)
1. On Harnack's theorem for elliptic partial differential equations, *CPAM*, 14 (1961), 577—591.
- Мотоо (Motoo M.)
1. Proof of the law of iterated logarithm through diffusion equation, *Ann. Inst. Statist. Mech.*, 10 (1959), 21—28.
- Мотоо, Ватанабе (Motoo M., Watanabe H.)
1. Ergodic property of recurrent diffusion process in one dimension, *J. Math. Soc. Japan*, 10 (1958), 272—286.
- Найт (Knight F.)
1. On the random walk and Brownian motion, *TAMS*, 103 (1962), 218—228.
 2. Random walks and a sojourn density process of Brownian motion, *TAMS*, 107 (1963), 56—86.
- Нельсон (Nelson E.)
1. The adjoint Markov process, *Duke Math. J.*, 25 (1958), 671—690.
 2. Representation of a Markovian semi-group and its infinitesimal generator, *JMM*, 7 (1958), 977—988.
- Перрон (Perron O.)
1. Über die Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Z.*, 18 (1923), 42—54.
- Петровский И. Г. (Petrovski I.)
1. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, *Compositio Math.*, 1 (1935), 383—419.
 2. Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961.

- Погоржельский (Pogorzelski W.)
1. Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique, *Ric. Math.*, 5 (1956), 25—57.
- Пойа (Pólya G.)
1. Qualitatives über Wärmeausgleichung, *Z. Angew. Math. Mech.*, 13 (1933), 125—128.
- Пойа, Сегё (Pólya G., Szegő G.)
1. Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, *J. Reine Angew. Math.*, 165 (1931), 4—49.
- Пэли Р., Винер Н.
1. Преобразование Фурье в комплексной области, М., 1964.
- Пэли, Винер, Зигмунд (Paley R., Wiener N., Zygmund A.)
1. Note on random functions, *Math. Z.*, 37 (1933), 647—668.
- Рисс М. (Riesz M.)
1. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Math.*, 81 (1949), 1—223.
- Рисс Ф. (Riesz F.)
1. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel. 1, 2, *Acta Math.*, 48 (1926), 329—343; 54 (1930), 321—360.
- Рэй (Ray D. B.)
1. On spectra of second-order differential operators, *TAMS*, 77 (1954), 299—321.
2. Stationary Markov processes with continuous paths, *TAMS*, 82 (1956), 452—493.
3. Resolvents, transition functions, and strongly Markovian processes, *AM*, 76 (1959), 43—72.
4. Sojourn times of a diffusion process, *IJM*, 7 (1963), 615—630.
- Сато (Sato K.)
1. Time change and killing for multi-dimensional reflecting diffusion, *Proc. Japan. Acad.*, 39 (1963), 69—73.
- Сато, Танака (Sato K., Tanaka H.)
1. Local times on the boundary for multi-dimensional reflecting diffusion, *Proc. Japan. Acad.*, 38 (1962), 699—702.
- Секефальви-Надь (Sz. - Nagy B., von)
1. Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, *Ergeb. Math.*, 5, № 5, Berlin, 1942.
- Спитцер (Spitzer F.)
1. Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion, *TAMS*, 87 (1958), 187—197.
2. Recurrent random walk and logarithmic potential, 4-th Berk. Symp. II, 515—534, Univ. of Calif. Press (1961).
3. Electrostatic capacity in heat flow and Brownian motion, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* (в печати).
- Танака (Tanaka H.)
1. Certain limit theorems concerning one-dimensional diffusion processes, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, 12 (1958), 1—11.
- Тейлор (Taylor S.)
1. The α -dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path, *PCPS*, 51 (1955), 265—274.
- Тесельский (Ciesielski Z.)
1. Hölder condition for realizations of Gaussian processes, *TAMS*, 99 (1961), 403—413.

Тихонов (Tihonov A.)

1. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, *Матем. сб.*, 42 (1935), 119—216.

Томпсон (Thompson D'Arcy).

1. On growth and form, Cambridge, 1959.

Троттер (Trotter H. F.)

1. A property of Brownian motion paths, *IJM*, 2 (1958), 425—433.
2. An elementary proof of the central limit theorem, *Arch. Math.*, 10 (1959), 226—234.

Уитман (Whitman W.)

1. Some strong laws for random walks and Brownian motion, *TAMS*, (в печати).

Уэно (Ueno T.)

1. On recurrent Markov processes, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 12 (1960), 109—142.
2. The diffusion satisfying Wentzell's boundary condition and the Markov process on the boundary, I, *Proc. Japan Acad.*, 36 (1960), 533—538.

Феллер (Feller W.)

1. Zur Theorie der stochastischen Prozesse (Existenz- und Eindeutigkeitssätze), *Math. Ann.*, 133 (1936), 133—160.
2. On the general form of the so-called law of the iterated logarithm, *TAMS*, 54, (1943), 373—402.
3. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, изд-во «Мир», М., 1964.
4. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, *AM*, 55 (1952) 468—519.
5. The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension, *AM*, 60 (1954), 417—436.
6. Diffusion processes in one dimension, *TAMS*, 77 (1954), 1—31.
7. On second order differential operators, *AM*, 61 (1955), 90—105.
8. Boundaries induced by non-negative matrices, *TAMS*, 83 (1956), 19—54.
9. Generalized second order differential operators and their lateral conditions, *IJM*, 1 (1957), 459—504.
10. On the intrinsic form for second order differential operators, *IJM*, 2 (1958), 1—18.
11. Differential operators with the positive maximum property, *IJM*, 3 (1959), 182—186.
12. The birth and death processes as diffusion processes, *J. Math. Pures Appl.*, 38 (1959), 301—345.
13. On a generalization of Marcel Riesz potentials and the semi-groups generated by them, *Comm. Semi. Math. Univ. Lund Suppl. Vol.* 72—81 (1952).

Фельдман (Feldman J.)

1. Feller and Martin boundaries for countable sets, *IJM*, 6 (1962), 356—366.

Фростман (Frostman O.)

1. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.*, 3 (1935), 1—118.

Халмош П. (Halmos P.)

1. Теория меры, ИЛ, М., 1958.
2. Марковские процессы и потенциалы, ИЛ, М., 1962.
3. Markoff chains and Martin boundaries, *IJM*, 4 (1960), 313—340.

- Хант (Hunt G.)
1. Some theorems concerning Brownian motion, *TAMS*, 81 (1956), 294—319.
- Харрис, Роббинс (Harris T. E., Robbins H.)
1. Ergodic theory of Markov chains admitting an infinite invariant measure, *PNAS*, 39 (1953), 860—864.
- Хасминский Р. З.
1. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений, *ТВ*, 5 (1960), 196—214.
- Хаусдорф (Hausdorff F.)
1. Dimension und äußeres Maß, *Math. Ann.*, 79 (1918), 157—179.
- Хейнс (Heins M.)
1. On a notion of convexity connected with a method of Carleman, *J. d'Anal. Math.*, 7 (1959), 53—77.
- Хилле (Hille E.)
1. Representation of one-parameter semi-groups of linear transformations, *PNAS*, 28 (1942), 175—178.
- Хильдебранд (Hildebrand F. B.)
1. Advanced calculus for engineers, New York, 1949.
- Хинчин А. Я.
1. Асимптотические законы теории вероятностей, ОНТИ, М.—Л., 1936.
- Хорф (Horf E.)
1. Bemerkungen zu einem Satze von S. Bernstein aus der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen, *Math. Z.*, 29 (1929), 744—745.
2. Ergodentheorie, *Ergebn. Math.*, 5, № 2, Berlin, 1937.
- Чжун Кай-лай, Эрдеши, Сирао (Chung K. L., Erdős P., Siraо T.)
1. On the Lipschitz's condition for Brownian motions, *J. Math. Soc. Japan*, 11 (1959), 263—274.
- Чжун Кай-лай, Феллер (Chung K. L., Feller W.)
1. On fluctuation in coin-tossing, *PNAS*, 35 (1949), 605—608.
- Шоке (Choquet G.)
1. Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 5 (1953—54), 131—295.
- Шур М. Г.
1. Непрерывные аддитивные функционалы от марковских процессов и экспессивные функции, *ДАН*, 137 (1961), 800—803.
- Эйнштейн (Einstein A.)
1. Investigations on the theory of the Brownian movement, New York, 1956.
- Эрдейи (Erdélyi A.)
1. Tables of integral transforms. 1, 2. New York, 1954.
2. Higher transcendental functions. 1, 2, 3. New York, 1953, 1955.
- Эрдеши (Erdős P.)
1. On the law of the iterated logarithm, *AM*, 43 (1942), 419—436.
- Эрдеши, Кац (Erdős P., Кас М.)
1. On the number of positive sums of independent random variables, *BAMS*, 53 (1941), 1011—1021.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

α	переменное в преобразовании Лапласа;
\mathbf{B}	σ -алгебра;
$\mathbf{B}\{x(t, \omega): a \leq t < b\}$	наименьшая σ -алгебра, относительно которой измеримы $x(t): a \leq t < b$;
\mathbf{B}_t	σ -алгебра $\mathbf{B}\{x_s: s \leq t\}$;
\mathbf{B}_{m+0}	σ -алгебра $\{B: B \cap \{m < t\} \in \mathbf{B}_t, t \geq 0\}$;
$\mathbf{B}(Q)$	наименьшая σ -алгебра, относительно которой измеримы все открытые подмножества из Q ;
$B(Q)$	пространство ограниченных измеримых по Борелю функций $f: Q \rightarrow R^1$;
$C(Q)$	пространство ограниченных непрерывных функций $f: Q \rightarrow R^1$;
$C^n(Q)$	пространство ограниченных, n раз непрерывно дифференцируемых функций $f: Q \rightarrow R^1$;
$C_\infty(Q)$	пространство непрерывных функций, обращающихся в нуль на ∞ ;
$C(B)$	ньютоновская емкость множества B (см. § 7.8);
d	размерность;
D	в гл. 3—6 пространство таких функций $f \in B(Q)$, что $f(a \pm 0) = f(a)$, если $P_a\{m_{a \pm 0} = 0\} = 1$ (см. § 3.6); в гл. 7, 8 область (связное открытое множество);
∂D	граница области D ;
\mathbf{D}	диффузия;
$D(\mathfrak{G})$	область определения оператора \mathfrak{G} ;
Δ	оператор Лапласа;
do	равномерное распределение на поверхности шара;
E^2	единичный круг;
$E_*(f)$	математическое ожидание функции, связанное с P_* ;
$E_*(f, A)$	математическое ожидание функции f , умноженной на характеристическую функцию множества A ;
$e(d\gamma, a, b) = efe$	дифференциал спектрального разложения (см. § 4.11);
$f = f(d\gamma)$	спектральная мера (см. § 4.11);
$f^- = f^-(a)$	левая производная;
$f^+ = f^+(a)$	правая производная;

$f(da)$	мера, связанная с функцией интервала $f(a, b) = f(b+0) - f(a+0)$;
$\bar{f} = \bar{f}(t)$	интеграл от локального времени (см. § 5.2);
$g = g(t, a, b)$	гауссово ядро $(2\pi t)^{-1/2} \exp[-(b-a)^2/2t]$;
g_1, g_2	возрастающее и убывающее решения уравнения $\mathfrak{G}g = \alpha g$ (см. § 4.6);
$G = G(a, b)$	функция Грина (см. § 2.6, 4.11 и 7.4);
G_α	оператор Грина (см. § 3.6);
\mathfrak{G}	производящий оператор (см. § 3.7);
$h(a, B)$	классическая гармоническая мера множества $B \subseteq \partial D$; относительно точки $a \in D$ (см. § 7.12);
K_-	множество точек левого переноса (см. § 3.4);
K_+	множество точек правого переноса (см. § 3.4);
κ	скорость убывания для $K_- \cap K_+$ (см. § 4.8);
k	убывающая мера (см. § 4.3);
k_\pm	меры, убывающие при переносе (см. § 4.8);
$\bar{f} = \bar{f}(t)$	убывающий функционал (см. § 5.6);
\bigwedge^h	хаусдорфова мера, соответствующая функции h (см. замечание 2.5.2);
\bigwedge^α	мера Хаусдорфа — Безиковича размерности α (см. замечание 2.5.2);
$L^2(Q, m)$	пространство m -измеримых функций f с нормой $\ f\ _2 = \sqrt{\int f^2 dm} < +\infty$;
m	мера скорости (см. § 4.2);
m	марковский момент (см. § 1.6 и 3.2);
m_a	момент первого достижения точки a ;
m_B	момент входа в множество B (см. задачу 7.1.1);
m_∞	момент убывания (см. § 2.3);
n	мера Леви (см. замечание 1.7.1);
$P_\alpha(B)$	вероятности для траекторий, начинающихся в a ;
$P_\bullet(B)$	$P_\alpha(B)$ как функция от a ;
$p = p(t, a, b)$	плотность переходной вероятности (см. § 4.11);
p	пуассоновская мера, участвующая в разложении Леви для возрастающего процесса с независимыми приращениями (см. замечание 1.7.1), или оператор проектирования (см. § 4.11);
Q	фазовое пространство диффузии;
R^d	d -мерное евклидово пространство;
$s = s(a)$	шкала (см. § 4.2);
s_\pm	шкалы переноса (см. § 4.8);
S_d	d -мерная единичная сфера в R^{d+1} ;
t	время;
$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(t, a) = \mathfrak{t}(t, a, \omega)$	локальное время (см. § 2.2 и 5.4);
W	пространство траекторий;

$w: t \rightarrow x(t)$	траектория;
w_s^+	сдвинутая траектория $x_t(w_s^+) = x_{t+s}(w)$;
w_s^*	остановленная траектория $x_t(w_s^*) = x_{t \wedge s}(w)$;
$x(t, w) = x(t)$	значение траектории w в момент t ;
χ_A	характеристическая функция множества A ;
\mathbb{Z}^1	множество всех целых чисел;
$\mathfrak{Z} = \{t: x(t) = 0\}$	множество моментов пребывания;
$\mathfrak{Z}_n (n \geq 1)$	смежные интервалы множества \mathfrak{Z} ;
$a \wedge b$	меньшее из a и b ;
$a \vee b$	большее из a и b ;
$\#(C)$	число объектов в классе C ;
$\binom{n}{m} = n!/m!(n-m)!$	для $m = 0, 1, \dots, n$;
$\ln_2 t = \ln(\ln t)$, $\ln_n t = \ln(\ln_{n-1} t)$	$(n \geq 3)$;
$\ f\ = \ f\ _\infty = \sup_Q f $;	
$\ f\ _2 = \sqrt{\int f^2 dm}$;	
$a \uparrow b$	a , возрастаая, стремится к b ;
$a \downarrow b$	a , убывая, стремится к b ;
$f \in \uparrow$	возрастающая (неубывающая) функция;
$f \in \downarrow$	убывающая (невозрастающая) функция;
$\{x(t) < h(t), t \downarrow 0\}$	означает, что существует такое $t_1 > 0$, что $x(t) < h(t)$ при $0 < t < t_1$;
$\{x(t) < h(t), t \uparrow + \infty\}$	означает, что существует такое $t_2 > 0$, что $x(t) < h(t)$ при $t > t_2$;
\emptyset	пустое множество;
∞	дополнительное состояние (см. § 2.3);
$\pm \infty$	концы числовой прямой.

УКАЗАТЕЛЬ

d = размерность, \mathcal{G} = производящий оператор, t = локальное время, $Z = \{t : x = 0\}$

Аддитивные функционалы от броуновского движения, индивидуальная эргодическая теорема ($d = 1$) 280; ($d = 2$) 336

— — — — как интегралы от локальных времен 236

— — — — формула Каца 76

— — — — — применения 81

— — — — см. также Замены времени

Аддитивный функционал, используемый в качестве шкалы времени в косом произведении 328

Арсинуса закон см. Стандартное одномерное броуновское движение; Случайное блуждание

Бесселевский процесс 82

— — доказательство отсутствия нулей у траектории 85, 86, 170

— — как решение уравнения $r = b + (d - 1) \int (2r)^{-1} 84$

— — моменты первого достижения 85, 170, 283

— — применение к броуновским локальным временам 89

— — — — экскурсиям 104

— — \mathcal{G}^+ как радиальная часть от $\Delta/2$ 84

Блюменталевский закон 0—1 ($d = 1$) 45, 112; ($d \geq 2$) 286

Бореля — Кантелли леммы 16

Бросание монеты см. Случайное блуждание

Броуновское движение косое 149

— — накрывающее 339

Броуновское движение пространственно-временное 324

— — — — критерий Колмогорова 326

— — — — применение к задаче

Дирихле для $\partial/\partial t$ — $\Delta/2$ 325

— — с отражением в круге, применение к граничным условиям для $\Delta/2$ 333, 366

— — — — — к задаче Неймана 322

— — — — на $[0, +\infty)$ как $|x|$ 61

— — — — — как f^-x 61

— — — — — как $x(f^{-1})$ 107

— — — — см. также Локальное время, нули

— — с эластичным экраном 67

— — стандартное двумерное, бесконечность числа достижений любого круга 290

— — — — закон Каллианпура — Роббинса 337

— — — — индивидуальная эргодическая теорема 336

— — — — критерий Винера в применении к концу простой дуги 315

— — — — Какутани и логарифмические емкости 308

— — — — накрывающие движения с приложениями к конформному отображению и запутыванию траектории 339

— — — — площадь траектории = 0 286

— — — — спитцеровский закон вращения 329

— — — — точки самопересечения 318

— — — — функции Грина и гриновские области 291

— — — — см. также Стандартное многомерное броуновское движение

- Броуновское движение стандартное многомерное 82, 287
- — — — — бesselевский процесс как радиальная часть броуновского движения 83
 - — — — — задача Дирихле для Δ 320
 - — — — — закон повторного логарифма 84
 - — — — — критерий Винера 312
 - — — — — — применения 316
 - — — — — Дворецкого — Эрдеша — Спитцера 206
 - — — — — Пуанкаре 314
 - — — — — ньютоновские электростатические потенциалы, представление в виде броуновских вероятностей достижения 303
 - — — — — точки самопересечения 318
 - — — — — уход на ∞ 290
 - — — — — функция Грина уравнения $(\alpha - \Delta/2)u = f$ 287
 - — — — — $\Delta u/2 = -f$ и гриновские области 291
 - — — — — эксцессивные (= супергармонические) функции 298
 - — — — — $\mathcal{G} = \Delta/2$ 288
 - — — — — \mathcal{G} , выражение через меру Рисса 300
 - — — — — см. также Гармонические функции; Границы; Диффузия; Емкости; Задача Дирихле; Потенциалы; Эксцессивные функции
 - — — — — одномерное 27
 - — — — — аппроксимация бросанием монеты 58
 - — — — — арксинуса законы 45, 80, 81
 - — — — — закон Каллианпура — Роббинса 282
 - — — — — повторного логарифма 52, 55
 - — — — — изменение масштаба 33
 - — — — — индивидуальная эргодическая теорема 280
 - — — — — конструкция Н. Винера 38
 - — — — — П. Леви 35
 - — — — — критерий Колмогорова 52, 203
 - — — — — Чжуна — Эрдеша — Сирао 55
 - — — — — локальные времена 86
 - — — — — условные как диффузия 89
- Броуновское движение стандартное одномерное, марковские моменты 39
- — — — — марковское свойство 32, 39
 - — — — — моменты 34
 - — — — — — первого достижения 42
 - — — — — недифференцируемость 34
 - — — — — нули 46
 - — — — — обращение времени 33
 - — — — — принцип отражения Д. Андреса 43
 - — — — — процесс восстановления, связанный с \mathcal{Z} , по Ламперти 103
 - — — — — условие Гельдера 55
 - — — — — формула Каца для аддитивных функционалов от броуновского движения 76
 - — — — — функция максимума 45
 - — — — — экскурсии 100
 - — — — — описание в терминах условных бesselевских процессов 104
 - — — — — \mathcal{G} и операторы Грина 32
 - — — — — сферическое 328
 - — — — — индивидуальная эргодическая теорема 342, 343
 - — — — — связь со стереографической проекцией 342
 - — — — — условное (= с закрепленным концом) 73
 - — — — — Феллера 232
- Вейлевское распределение собственных значений $\Delta/2$ 301
- Вероятности совпадения 199
- Взрыв массы 254
- Винера критерий для броуновского движения 312
- — — — — — применения 315
 - — — — — — связь с задачей Дирихле 320
 - — — — — — пространственно-временного броуновского движения (= критерий Колмогорова) 326
 - — — — — — устойчивых процессов 353
- Винеровская конструкция броуновского движения 38
- — — — — мера 31
- ВКБ-приближение, применение к нему формулы Каца 81
- Вращение изотропной диффузии 333
- Вход 141
- Выход 141

- Гальмарино теорема о марковских моментах 113
- Гармонические функции см. Задача Дирихле для Δ
- Гауссов принцип положительного полного заряда для ньютоновских потенциалов 306
- Гауссова квадратичная форма для ньютоновских потенциалов 310
- Гауссовские распределения 18
- Границы, малая Феллера 369
- Мартина 364, 365
- постановка граничных условий на границе 366
- Граничные точки, феллеровская классификация (входы и выходы) 141, 167
- Грина операторы для броуновского движения ($d = 1$) 33; ($d \geq 2$) 287
- — — многомерной диффузии 285
- — — общей одномерной диффузии, инвариантность относительно них пространства D 122
- функции для броуновского движения ($d = 1$) 33; ($d \geq 2$) 287
- — — многомерной диффузии 358
- — — несингулярной одномерной диффузии 190
- — — уравнения $\alpha u - (u''/2 - ku) = f$, с применением к формуле Каца 78
- — — $\Delta u/2 = -f$, электрическая и вероятностная интерпретация 291
- Гриновские области, описание в терминах броуновского движения 291
- Движения с вероятностями, зависящие от времени, и связанные с ними пространственно-временные движения 327
- — — — — замены времени 327
- Дворецкого — Эрдеша — Сирао критерий для броуновского движения 206
- Диффузия многомерная 285
- — броуновское движение как пример диффузии 287
- — границы 363, 369
- — замены времени 359
- — обращенное движение 361
- Диффузия многомерная, подобные диффузии 355
- — потенциалы 360
- Диффузия многомерная с броуновскими выходными вероятностями 344
- — стационарное распределение 358
- — формула Дынкина для \mathcal{G} 285
- — см. также Броуновское движение; Косые произведения; Пространственно-временные движения; Эксцессивные функции; Эллиптические дифференциальные операторы
- общая одномерная 110
- — — вероятности совпадения 199
- — — возвратная 160
- — — локальные времена 218
- — — характеристики 116
- — — марковские моменты 113
- — — марковское свойство 111
- — — моменты первого достижения 182
- — — операторы Грина 122
- — — остановленная 133
- — — условная 136
- — — переходные плотности 189
- — — подчинение 220
- — — разложение на простые ку-ски 120
- — — сообщение 120
- — — спектральные разложения для \mathcal{G} и т. д. 189
- — — точки переноса 119
- — — траектории, общий обзор (замены времени, убивание, перенос) 207
- — — формула Дынкина для \mathcal{G} 129
- — — функции Грина 190
- — — экскурсии 275
- — — \mathcal{G} 127
- — — \mathcal{G} как дифференциальный оператор, общий обзор 137
- — — см. также Граничные точки; Замены времени; Локальное время; Марковские моменты; Марковское свойство; Мера скорости; Нули; Перенос; Производящий оператор; Точки переноса; Убивание; Шкала
- Дынкина формула для \mathcal{G} ($d = 1$) 129; ($d \geq 2$) 285, 347
- Емкости дробного числа измерений, связь с размерностью Хаусдорфа — Безиковича 279

- Емкости естественные, по Дж. Ханту 362
- логарифмические и критерий Какутани 308
 - ньютоновские 306
 - — неравенства Шоке 307
 - — спитцеровская интерпретация ($d \geq 3$) 309
 - — см. также Критерий Венера; Потенциалы
 - риссовские (с дробным числом измерений), связь с устойчивыми процессами 353
- Задача Дирихле для Δ 319
- — — гармоническая мера, представление в виде броуновских выходных вероятностей 322
 - — — критерий Венера 312
 - — — Пуанкаре 314
 - — — крокодил Литлвуда 326
 - — — применение к бесселевским выходным вероятностям 85
 - — — решение задачи Дирихле с помощью броуновского движения 320
 - — — с помощью пространственно-временного броуновского движения 325
 - — — связь с критерием Колмогорова 326
 - — — формула Пуассона 363, 364
 - — — шип Лебега 319
 - — $\partial/\partial t - \Delta/2$ 324
 - Неймана 322
- Закон 0 — 1, блюменталевский ($d = 1$) 42, 112; ($d \geq 2$) 286
- — колмогоровский 15
 - повторного логарифма для броуновского движения ($d = 1$) 52, 55; ($d \geq 2$) 84
- Замены времени для движений с вероятностями, зависящими от времени 327
- — — многомерной диффузии 359
 - — — одномерной диффузии на точках переноса 242
 - — — — общий обзор 207
 - — — — применение к построению броуновского движения с отражением на $[0, +\infty)$ 107
 - — — — цепное правило 220
 - — — — $Q = R^1$ 211
 - — — — $Q = [0, +\infty)$ 214
- Запутывание траектории двумерного броуновского движения, применение к нему накрывающих движений 341
- Какутани критерий для двумерного броуновского движения 308
- Каллианпура — Роббинса закон для броуновского движения ($d = 1$) 282; ($d = 2$) 337
- Каца формула для функционалов от броуновского движения 76
- — — — — применения 80, 81
- Кельвина принцип для ньютоновских потенциалов 312
- Колмогорова критерий для броуновского движения 52
- — — — — связь с пространственно-временным броуновским движением 326
 - — — — — доказательство Мотто 203
- Колмогоровский закон 0—1 15
- Косые произведения 328
- — представление изотропной диффузии в виде косоугольного произведения, по Гальмарино 330
 - — — применение к вращению для изотропной диффузии 333
 - — — — граничным условиям для оператора Δ в круге 333, 366
 - — — — обвинанию двумерного броуновского движения вокруг нуля 329
- Ламперти процесс восстановления, связанный с β 103
- Лебега шип 319
- Леви конструкция броуновского движения 35
- формула для процессов с независимыми приращениями 49, 185
- Литлвуда крокодил 326
- Локальное время для броуновского движения с отражением 42
- — — — — как мера на \mathbb{R}^+ размерности $1/2$ 72
 - — — — — плотность времени, проводимого в 0 65
 - — — — — применение к конструкции броуновского движения с эластичным экраном 67

- Локальное время для броуновского движения с отражением, связь с пересечениями сверху вниз 70
 — — — — — со смежными интервалами \mathfrak{Z}^+ 64
 — — — — — с $\dim(\mathfrak{Z}^+)$ 66, 72
 — — — — — несингулярной одномерной диффузии 218
 — — — — — как диффузия 274
 — — — — — как мера Хаусдорфа — Безиковича на \mathfrak{Z} 274
 — — — — — обратное локальное время как процесс с независимыми приращениями 262
 — — — — — пример, когда t^{-1} — односторонний устойчивый процесс 277
 — — — — — связь с пересечениями сверху вниз 274
 — — — — — со смежными интервалами \mathfrak{Z} 269
 — — — — — формула Леви для t^{-1} 265
 — — — — — стандартного одномерного броуновского движения 86
 — — — — — условие Гельдера 88
 — — — — — условное локальное время как диффузия, описание в терминах условных беселевских процессов 89
 Локальные характеристики диффузии 116
 Марковские моменты 113
 — — для бросания монеты 20
 — — — — — одномерного броуновского движения 39
 — — — — — моменты входа в множество для многомерной диффузии 286
 — — — — — моменты первого достижения для броуновского движения 42
 — — — — — теорема Гальмарино 113
 — — — — — σ -алгебры, связанные с марковскими моментами 111
 Марковское свойство для бросания монеты 19, 20
 — — — — — общей одномерной диффузии 111
 — — — — — одномерного броуновского движения 32, 39
 — — — — — связь с гладкостью операторов Грина ($d = 1$) 124; ($d \geq 2$) 285
 Мартина границы 364, 365
 Мартингалы, неравенство для субмартингалов 75
 — — — — — сходимость 74
 Мера скорости для многомерной диффузии в случае движений с броуновскими выходными вероятностями 344
 — — — — — стационарное распределение как мера скорости 358
 — — — — — несингулярной одномерной диффузии в изолированной точке переноса 161
 — — — — — определение через средние времена выхода 139, 142, 148, 158
 — — — — — условную диффузию 152
 Моменты первого достижения для беселевского процесса 85, 170, 283
 — — — — — бросания монеты 21
 — — — — — броуновского движения 42
 — — — — — одномерной диффузии, формула Леви для них 182
 Мотоо доказательство критерия Колмогорова 203
 Нули для броуновского движения с отражением 63
 — — — — — $\dim(\mathfrak{Z}^+)$ 66, 72
 — — — — — t^+ как мера размерности $1/2$ на \mathfrak{Z}^+ 72
 — — — — — несингулярной диффузии, критерий сравнения для $\dim(\mathfrak{Z})$ 276
 — — — — — $\dim(\mathfrak{Z}) = \text{const}$ 275
 — — — — — t как мера Хаусдорфа — Безиковича на \mathfrak{Z} 274
 — — — — — стандартного одномерного броуновского движения 46
 — — — — — $\dim(\mathfrak{Z}_a)$ 97
 — — — — — процесс восстановления, связанный с \mathfrak{Z} , по Ламперти 103
 Ньютоновские емкости, потенциалы см. Емкости; Потенциалы
 Обратное локальное время см. Локальное время
 Обращенное движение 361
 Переходные плотности для броуновского движения с остановкой 291
 — — — — — несингулярной диффузии 189
 Подобные диффузии 355

- Построение траекторий с переносом 239, 240
 — — — на канторовом множестве 211
 — — — на отрезке, состоящем из точек переноса 180
 — — — с убиванием 243
 Потенциалы ньютонические, гауссов принцип положительного полного заряда 306
 — гауссова квадратичная форма 310
 — как эксцессивные функции 299
 — принцип Кельвина 312
 — формула Рисса 300
 — электростатические потенциалы, представление в виде вероятностей достижения для броуновского движения 303
 — см. также Ньютоновские емкости
 — риссовские, связь с устойчивыми процессами 351
 — см. также Риссовские емкости
 Предельная теорема Муавра -- Лапласа, обобщение Донскера 60
 Принцип отражения Д. Андрэ 43
 Производящий оператор для многомерной диффузии 285
 — — — представление \mathcal{G} в виде дифференциального оператора с помощью меры скорости 344, 358
 — — — формула Дынкина 285
 — — — общей одномерной диффузии 127
 — — — — локальность 130, 131, 170
 — — — — несингулярный случай 144, 150, 172
 — — — — общий обзор 137
 — — — — распределение собственных значений 196
 — — — — сингулярный случай 160, 174, 180
 — — — — спектральные разложения 189
 — — — — формула Дынкина 128
 — — — — см. также Мера скорости; Точка переноса; Убивающая мера; Шкала; Шкала переноса
 — — — отдельных движений: беселевского процесса 84
 Производящий оператор для отдельных движений: броуновских движений Феллера 232
 — — — — броуновского движения в круге 333
 — — — — — с прилипанием на границе круга 322
 — — — — — остановкой 301
 — — — — — отражением на $[0, +\infty)$ 61
 — — — — — эластичным экраном на $[0, +\infty)$ 45
 — — — — движений с разрывными траекториями 347
 — — — — диффузией с броуновскими выходными вероятностями 344
 — — — — изотропных устойчивых процессов 352
 — — — — односторонних процессов с независимыми приращениями 347
 — — — — стандартного броуновского движения ($d=1$) 32; ($d \geq 2$) 288
 Пространственно-временное броуновское движение 324
 Пространственно-временные движения, применение к движениям с вероятностями, зависящими от времени 327
 Процессы с независимыми приращениями, изотропные 351
 — — — — связь с риссовскими потенциалами 352
 — — — — \mathcal{G} как дробная степень $\Delta/2$ 352
 — — — — с возрастающими траекториями: броуновские моменты первого достижения как процесс с независимыми приращениями 42
 — — — — — обратное локальное время как процесс с независимыми приращениями 262
 — — — — — односторонний устойчивый процесс как процесс с независимыми приращениями 51
 — — — — — связанная с этими процессами формула Леви и пуассоновская мера 49, 185
 — — — — — \mathcal{G} 347
 Пуанкаре критерий для броуновского движения 314

- Пуассона формула для границ Мартина 363
 — — — уравнения $\Delta u = 0$ в гرينовской области 320
 — — — — в круге 363
 — — — $\frac{du}{dt} - \Delta u/2 = 0$ в области в виде ящика 325
 Пуассоновская мера для броуновских моментов первого достижения 44
 — — — моментов первого достижения для одномерной диффузии 182
 — — — одностороннего процесса с независимыми приращениями 49, 185
- Радемахера функции, применение к бросанию монеты 21
 Размерности и мера Хаусдорфа — Безиковича 75
 — — — — связь с емкостью дробного числа измерений 279
 — — — — см. также Локальные времена; Нули
 Рисса формула см. Потенциалы; Эксцессивные функции
 Риссовские емкости и потенциалы см. Емкости; Потенциалы
- Сингулярные точки для броуновского движения см. Винера критерий; Задача Дирихле; Колмогорова критерий; Лебега шип; Пуанкаре критерий; Шипы
 — — — — одномерной диффузии см. Точки переноса
 Случайное блуждание (= бросание монеты) 19
 — — — аппроксимация броуновского движения случайным блужданием 58
 — — — законы арксинуса 23, 60
 — — — марковские моменты 20
 — — — марковское свойство 20
 — — — моменты первого достижения 21
 — — — описание при помощи функций Радемахера 21
 — — — функция максимума 26
 — — — см. также Предельная теорема Муавра — Лапласа
- Создание и уничтожение массы 247
 — — — — вероятности взрыва и вырождения как решения нелинейных параболических уравнений 258
 — — — — построение взрывов 254
 Сообщение 120
 Спектральные разложения для \mathfrak{U} , и т. п. 189
 Стационарное распределение, формула Уэно 358
 Супергармонические функции см. Эксцессивные функции
- Точка переноса 119
 Траектории одномерной диффузии, общий обзор 207; см. также Замечны времени; Построение траекторий с переносом; убивание
 — — — — разрывные 347
- Убивание траекторий на точках переноса 243
 — — — несингулярный случай 223
 — — — общий обзор 209
 — — — убивание x^+ с помощью t^+ с целью построения броуновского движения с эластичным экраном 67
 Убивающая мера для несингулярной диффузии в изолированной точке переноса 162
 — — — — — на точках переноса 143, 176
 — — — — — определение в терминах выходных вероятностей 139, 142, 155
 — — — — — — — — — условной диффузии 152
 Усиленный закон больших чисел 15
 Устойчивый процесс односторонний 51
 — — — — броуновские моменты первого достижения как устойчивый процесс 42
 — — — — обратные локальные времена для некоторых диффузий как устойчивые процессы 277
 — — — — \mathfrak{U} 351
 — — — — изотропный, связь с потенциалами Рисса 352
 — — — — \mathfrak{U} как дробная степень $\Delta/2$ 352
 Уэно формула для стационарного распределения 358

- Феллера малая граница и σ -алгебры «хвостов» 369
- Феллеровская классификация граничных точек (входы и выходы) 141, 166
- Функции, выпуклые вверх 146
— — — относительно линейной формы 157
- Хаара функции в применении к конструкции броуновского движения по П. Леви 35
- Центральная предельная теорема см. Предельная теорема Муавра— Лапласа
- Чжуна — Эрдёша — Сирао критерий для броуновского движения 55
- Шип как пример сингулярной точки для броуновского движения 316
— Лебега 319
- Шкала несингулярной диффузии, определение в терминах выходных вероятностей 139, 142, 145, 155
— — — — — условной диффузии 152
- Шкала переноса 143, 175, 177
— — — на канторовом множестве 243
- Шоке неравенства для ньютонических емкостей 307
- Экскурсии для броуновского движения 100
— — — — — описание в терминах условных бесселевских процессов 104
— — — несингулярной диффузии 275
- Экспессивные функции для броуновского движения как потенциалы 300
— — — — — супергармонические функции 298
— — — — — многомерной диффузии 360
— — — — — как потенциалы (формула Рисса) 362
- Эллиптические дифференциальные операторы 367
— — — теорема С. Бернштейна 370
- Эргодическая теорема, индивидуальная, для броуновского движения ($d = 1$) 280; ($d = 2$) 336, (сферического) 342, 343
- σ -алгебры «хвостов» и малые границы Феллера 369

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие авторов	7
Предварительные сведения	13
 1. Стандартное броуновское движение	 19
1.1. Стандартное случайное блуждание	19
1.2. Моменты первого достижения для стандартного случайного блуждания	21
1.3. Хинчиновское доказательство предельной теоремы Муавра — Лапласа	24
1.4. Стандартное броуновское движение	27
1.5. Конструкция П. Леви	35
1.6. Строго марковское свойство	39
1.7. Моменты первого достижения для стандартного броуновского движения	42
1.8. Критерий Колмогорова и закон повторного логарифма	52
1.9. Гёльдеровское условие П. Леви	55
1.10. Аппроксимация броуновского движения случайным блужданием	58
 2. Броуновские локальные времена	 61
2.1. Броуновское движение с отражением	61
2.2. Локальное время Леви	63
2.3. Броуновское движение с эластичным экраном	67
2.4. t^+ и пересечения сверху вниз	70
2.5. t^+ как мера Хаусдорфа — Безиковича размерности $1/2$	72
2.6. Формула Каца для функционалов от броуновского движения	76
2.7. Бесселевские процессы	82
2.8. Стандартное броуновское локальное время	86
2.9. Броуновские экскурсии	100
2.10. Применение бесселевского процесса к броуновским экскурсиям	104
2.11. Замена времени	107

3. Общая одномерная диффузия	110
3.1. Определение	110
3.2. Марковские моменты	113
3.3. Некоторые локальные характеристики диффузии	116
3.4. Сингулярные точки	119
3.5. Разложение общей диффузии на простые куски	120
3.6. Операторы Грина и пространство D	122
3.7. Производящие операторы	127
3.8. Производящие операторы (продолжение)	130
3.9. Остановленная диффузия	133
4. Производящие операторы	137
4.1. Общий обзор	137
4.2. \mathfrak{U} как локальный дифференциальный оператор. Консервативный несингулярный случай	144
4.3. \mathfrak{U} как локальный дифференциальный оператор. Общий несингулярный случай	150
4.4. Другое доказательство	153
4.5. \mathfrak{U} в изолированной сингулярной точке	160
4.6. Решение уравнения $\mathfrak{U}^*u = au$	164
4.7. \mathfrak{U} как глобальный дифференциальный оператор. Несингулярный случай	172
4.8. Оператор \mathfrak{U} на точках переноса	174
4.9. \mathfrak{U} как глобальный дифференциальный оператор. Сингулярный случай	180
4.10. Моменты первого достижения	182
4.11. Спектральные разложения для функций Грина и переходные плотности	189
4.12. Критерий Колмогорова	203
5. Замены времени и убивание	207
5.1. Построение траекторий. Общий обзор	207
5.2. Замены времени. $Q = R^1$	211
5.3. Замены времени. $Q = [0, +\infty)$	214
5.4. Локальные времена	218
5.5. Подчинение и цепное правило	220
5.6. Моменты убивания	223
5.7. Броуновские движения Феллера	232
5.8. Пример Икеда	233
5.9. Замены времени должны производиться при помощи интегралов от локальных времен	236
5.10. Точки переноса	237
5.11. Точки переноса с убиванием	243

5.12. Процессы с созданием массы	247
5.13. Параболическое уравнение	249
5.14. Взрывы	254
5.15. Нелинейное параболическое уравнение	258
 6. Локальные времена и времена, обратные к ним	262
6.1. Локальные времена и времена, обратные к ним	262
6.2. Меры Леви	265
6.3. t и смежные интервалы множества \mathcal{Z}	269
6.4. Контрпример, касающийся t и смежных интервалов множества \mathcal{Z}	271
6.5a. t и пересечения сверху вниз	274
6.5b. t как мера Хаусдорфа	274
6.5c. t как диффузия	274
6.5d. Экскурсии	275
6.6. Размерности	275
6.7. Критерии сравнения	276
6.8. Индивидуальная эргодическая теорема	280
 7. Многомерное броуновское движение	285
7.1. Многомерная диффузия	285
7.2. Стандартное многомерное броуновское движение	287
7.3. Уход на ∞	290
7.4. Гриневские области и функции Грина	291
7.5. Эксцессивные функции	298
7.6. Приложение к спектру оператора $\Delta/2$	301
7.7. Потенциалы и вероятности достижения	303
7.8. Ньютоновские емкости	306
7.9. Гауссова квадратичная форма	310
7.10. Критерий Винера	312
7.11. Применения критерия Винера	315
7.12. Задача Дирихле	319
7.13. Задача Неймана	322
7.14. Пространственно-временное броуновское движение	325
7.15. Сферическое броуновское движение и косые произведения	328
7.16. Вращение	333
7.17. Индивидуальная эргодическая теорема для стандартного двумерного броуновского движения	336
7.18. Накрывающие броуновские движения	339
7.19. Диффузии с броуновскими выходными вероятностями	344
7.20. Процессы с траекториями, непрерывными справа	347
7.21. Потенциалы Рисса	351

8. Общее представление о многомерной диффузии	355
8.1. Подобные диффузии	355
8.2. \mathcal{U} как дифференциальный оператор	356
8.3. Замены времени	359
8.4. Потенциалы	360
8.5. Границы	363
8.6. Эллиптические операторы	367
8.7. Малая граница Феллера и σ -алгебры «хвостов»	369
Л и т е р а т у р а	371
Список обозначений	380
У к а з а т е л ь	383

К. Ито, Г. Маккин

**ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ
И ИХ ТРАЕКТОРИИ**

Редактор *Л. Б. Штейнпресс*

Художник *Н. С. Хмелевская*

Художественный редактор *В. И. Шаповалов*

Технические редакторы *Ф. Х. Третьякова,*

Е. С. Потапенкова

Корректор *Л. Д. Кучерова*

Сдано в производство 31/VII—1967 г.

Подписано к печати 22/XII—1967 г.

Бумага тип. № 1 60 × 90¹/₁₆ 12,44 бум. л.

24,88 печ. л., в т/ч. вкл. 1

Уч.-изд. л. 22,12. Изд. № 1/4076

Цена 1 р. 77 к. Зак. 1209

Темплан изд-ва «Мир» 1967 пор. № 11

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16

Главполиграфпрома Комитета по печати

при Совете Министров СССР

Москва, Трехпрудный пер., 9.

